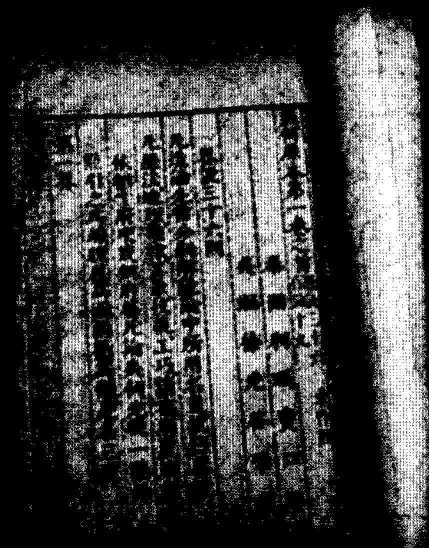
中国科学院知识创新工程项目
中国近现代科学技术史研究丛书
丛书主编 路甬祥

中国数学的西化历程

THE WESTERNIZATION OF MATHEMATICS IN CHINA

田淼 著



山东教育出版社

总　序

《中国近现代科学技术史研究丛书》是中国科学院知识创新工程项目“中国近现代科学技术发展综合研究”的成果，是百余位科技史专家、学者和研究生们辛勤劳动的结晶。

这也是中国科技界第一次有规模地对中国近现代科学技术发展的历程进行比较全面的、系统的、综合的研究。中国近现代科技史是中国近现代史的重要组成部分，研究中国近现代科技史对研究中国近现代史具有重要意义。立题时确定的目标是：系统地收集、抢救和整理中国近现代科学技术史实资料，建立完整的数据库，为中国近现代科技发展史研究积累基本资料；研究中国近现代科技发展历程中的重大事件、重要人物、历史文化背景及其对于中国经济社会文明进步的作用；对一些重要史实展开专题研究，力求取得新的认知和新的突破；科学地总结中国近现代科技发展历史的经验和教训，为新世纪中国科学技术的发展、创新能力的提高、创新体系的建设提供历史镜鉴；通过研究工作培养一批中青年科技史人才。

值得高兴的是，经过三年的努力，这些目标大都实现了。这套丛书是作者们奉献给读者的一份丰厚礼物，也将成为研究我国近现代科技史的宝贵资料。科技创新永无止境，科学技术史的研究也永无止境。我衷心希望读者和科技史界同仁能不吝批评，并在此基础上继续将我国近现代科学技术史研究推向前进，共同为全面建设小康社会，加快推进社会主义现代化建设做出贡献。

中国科学院院长　路甬祥

2003年6月5日

《中国近现代科学技术史研究丛书》出版前言

近代科学技术自19世纪传入中国以来，经历了一段非同寻常的曲折过程。从19世纪中叶自强运动中开始的“师夷之长技”，到20世纪初年的“科学救国”、“实业救国”思潮，从50年代的“向科学进军”，到20世纪末叶的“科教兴国”战略，中国人对科学技术给予了多少希望、梦想和憧憬！150年来，中国科学技术的进步是巨大的，但在全人类共同创建的现代科学技术大厦中，中国的贡献还很有限，中国科学技术的现代化还没有完成。站在新世纪的门槛上，中国应该如何发展科学技术，追赶国际先进水平，实现“科教兴国”的历史重任？面对这样重大的问题，我们不仅要深入了解和借鉴科学技术发达国家的经验，还必须深入研究中国近现代科学技术发展的历程及其与社会文化的关系，准确地把握科学技术的特性及其发展机制，总结中国近现代科学技术发展的历史经验和教训。

令人遗憾的是，我们在致力于解决眼前的科学和技术问题，追赶国际先进水平的时候，却很少系统地探讨和总结我国一二百年来科技发展的经验和教训。长期以来，我们对如何推进中国科学技术的进步、创造有利于科学技术发展的社会条件和文化氛围缺乏应有的认识。结果，我们不仅不易充分汲取历史的经验教训，反而可能重复旧的失当的政策和举措。因此，在面临重任和挑战的今天，系统地研究中国近现代科学技术发展史不但是学术研究的一项紧迫任务，也是现实赋予我们的重大课题。

大约15年前，中国科学院自然科学史研究所计划开展中国近现代科学技术发展史的研究工作。其主要成果就是董光璧先生主编《中国近现代科学技术史》和吴熙敬先生主编《中国近现代技术史》两部大型著作，分别由湖南教育出版社和科学出版社印行问世。在完成上述著作不久，自然科学史研究所又提出了系统地研究中国近现代科学技术史的大型研究计划，几经周折，终于在2000年列为中国科学院知识创新工程重要方向项目。“中国近现代科学技术发展综合研究”是一个跨越基础科学、应用科学、工程技术和人文社会科学等多学科的重要研究项目，主要包括专题研究、资料集与工具书、中国近现代科技史资料库这三大课题。经征求各方面意见，我们选定了30多个二级课题，于2000年11月正式启动了这项研究。国内近30个科

研院所、高等院校和其他机构的百余位科学技术史研究者和研究生承担了研究项目的二级课题。

中国近现代科学技术史的研究起步较晚，许多专题研究还有待开展，尚不具备编纂系统性史书的条件，加之项目的实施期限仅为三年，因此，我们预定的研究任务是以有创意的专题研究和重要的资料建设为主，以期为进一步系统深入的研究打下基础。我们希望本项目研究中国近现代科技发展历程中的基本问题，拓展研究方向，推动研究队伍的建设；以多角度的综合性研究、个案研究和学科史专题研究为主，力求在探索中国近现代科技发展的基本史实和脉络等方面取得进展；收集、抢救和整理重要的历史资料，编辑史料选辑，建立资料中心，为深入探讨中国近现代科技发展积累基本资料；总结中国近现代科技发展的历史经验和教训，为推动当代中国科学技术的发展提供历史启发。在梳理史实的同时，也致力于探讨科学、技术、经济、社会和文化的互动，尝试现代科学哲学、科学社会学和科技政策学等关于科学技术的理论和方法。

在短短的三年里，各课题组克服了很多困难，在资料搜集和研究方面花了大量精力，并积极配合项目的组织工作。经过努力，绝大多数课题组基本上完成了预期的研究任务，其主要研究成果就是奉献给读者的这套“中国近现代科学技术史研究丛书”。

项目的研究工作由中国科学院自然科学史研究所组织实施，是在中国科学院基础局、综合计划局、政策局和院所领导的大力支持下完成的。一部分课题还得到国家自然科学基金委员会的资助。自然科学史研究所人员承担了项目的约一半的课题，研究所领导全力支持项目组的工作，为完成研究工作提供了人力保证和相应的经费。自然科学史研究所前所长廖克、前副所长王渝生和有关人员为项目的立项和前期工作做出了重要的贡献。山东教育出版社将丛书列为重点图书出版计划，并为研究工作提供了部分配套经费，在专著的出版编辑方面做了很多工作。

中国科学院数学与系统科学研究院、中国科学院科技政策与管理科学研究所、中国科学院地理科学与资源研究所、中国科学院沈阳分院、中国科学院国际合作局、中国社会科学院近代史研究所、大连化工研究院制碱研究所、中国科技大学、清华大学、北京大学、上海交通大学、北京航空航天大学、哈尔滨工业大学、国防科技大学、西北大学、天津师范大学、首都师范大学、中共中央党校、中国农业博物馆、中国科技馆、国家测绘局、国家地震局地质

研究所、中国电力信息中心、庐山植物园、辽宁省图书馆等近30个单位为课题承担人给予了多方面的支持甚至提供配套经费。

在资料收集和建设方面，项目和各课题组得到了相关图书馆、档案馆和有关机构的理解和配合。中国科学院办公厅档案处、辽宁省档案馆等单位为查阅和利用档案资料提供了很多方便和帮助。还有许多单位的档案或资料管理机构向本项目二级课题提供了很多资料和帮助，具体情况详见丛书各卷的致谢或后记。自然科学史研究所图书馆为项目的资料建设做了许多工作。《自然科学史研究》、《中国科技史料》等学术期刊出版了项目的部分研究成果。

项目顾问就项目的设立和实施提出了指导意见。项目专家组在学术指导和课题评议等方面发挥了重要作用。丛书编委会、常务编委会和审稿专家审阅各课题书稿，为提高书稿质量做出了重要贡献。项目办公室负责项目的各项日常工作，组织学术活动，付出了辛勤的劳动。

在此，我们谨向项目的主管部门和合作单位以及顾问、专家和有关工作人员表示诚挚谢意！向项目各课题负责人和参与人员致以深深的谢意！

编撰这样规模的中国近现代科学技术史丛书是一个初步的尝试，不少著作还只是初步的研究成果，其中难免有疏漏和错误，恳请同人和广大读者赐教，以共同促进中国近现代科学技术史研究的开展。

张柏春　王扬宗

2003年10月31日

目　录

前　言

本书试图展示16世纪末至19世纪末中国数学发展的历程。在这三百年间，中国数学经历了西方数学的传入、中国传统数学的复兴及西方数学的再次传入和中国传统数学被取代的过程。作者选择“西化”一词作为本书的书名，并不是说“西化”是这一段历史时期中国数学的全部内容和意义，只是想以“西化”为脉络梳理这段历史，因此，本书反映的可能只是这段历史的一个侧面。

早在1997年，在我的博士学位论文《清末书院的数学教育》中，我曾提出“19世纪末中国数学的早期近代化已基本完成”这样一个结论。“早期近代化”是一个不确切的词汇，我曾大费周折地解释这个词，但归结起来，其含意为：来自西方的数学方法在19世纪末已在中国占主导地位，中国传统数学方法和思维模式在当时已经基本被取代，并正在淡出历史舞台。当然，来自西方的数学知识和方法并非完全是由西方人所独创的，现代数学的构成和产生是科学史上尚在争论和探讨的重要课题。“西化”一词并不反映作者对现代数学起源的看法。从17世纪以来，中国学者通常以“西学”统称来自西方的知识，这段历史上有名的“西学中源”说和时而出现的中、西之争都与这样的认识有关。这样，从某种角度来看，较之“近代化”或“现代化”，“西化”似乎可以更贴切地反映那段历史发展的主要特征及其中人物的活动特点。

16世纪末至19世纪末的中国数学发展史一直是数学史界一个活跃的研究领域。李俨先生、钱宝琮先生、严敦杰先生等早就对这一时期中国数学家的研究成果和传入的西方数学的具体内容给出统计和分析，并大致梳理出这段历史的发展脉络。此后的数学史家又进一步深化了他们的研究。其中，如梅荣照、刘钝、王渝生及安国风对《几何原本》在中国流传的研究；詹嘉玲、韩琦对耶稣会士，尤其是法国耶稣会士与西方数学在中国的传播的研究及对康熙时期西方数学知识传入的内容和传播方式的研究；李迪、梅荣照、刘钝、郭世荣等对梅文鼎的研究；李兆华、韩琦等对《数理精蕴》的研究；郭书

春等关于乾嘉时期数学著作，尤其是《九章算术》的校勘的研究；刘钝、李兆华、郭世荣、洪万生、朱家生、吴裕宾等关于乾嘉时期数学成果的整理及乾嘉学派与数学的关系的研究；何绍庚、罗见今、李兆华、王荣彬、特古斯等关于函数幂级数展开式的研究；王渝生、李兆华、洪万生等关于李善兰及其他清末数学家的工作的研究等等，都使我们对16世纪末至20世纪初中国数学研究的内容和成果有了更深入和全面的了解。要探讨明清数学的发展，还须理解当时西学东渐、天主教传教史，以及社会与文化的发展状况。一些学者的研究工作为科学史的探究提供了必要的条件。徐宗泽的《中国天主教传教史概论》、方豪的《中西交通史》、谢和耐的《中国与基督教》、樊洪业所著的《耶稣会士与中国科学》、孙尚扬的《基督教与明末儒学》、梁家勉的《徐光启年谱》、陈旭麓的《近代社会的新陈代谢》、王扬宗的《傅兰雅与近代中国的科学启蒙》及熊月之的《西学东渐与晚清社会》等著作对耶稣会士在中国的活动及其在传播西方科学中所扮演的角色，明末至清末中国历史的发展脉络及西学东渐的社会和文化背景等给出了深入的分析。正是在科学史界和历史界的这些成果的基础上，本书才可以综述三百余年间西方数学在中国传播的文化、社会背景及传播的具体内容，并从纵向探讨个别数学分支在此期间的发展情况。当然，要在本书中全面反映这些研究成果是不可能的，因此，书中只是围绕主题征引了部分前人著述。

除前人的研究成果外，本书还引用了大量的原始文献、新版古籍及现代西方汉学家和科学史家的著作。大部分史料来自中国科学院自然科学史研究所图书馆、北京图书馆及柏林马克斯—普朗克科学史研究所图书馆。

本书将主要分两部分。前四章构成本书第一部分。在这部分中，我们将分四个阶段探讨西方数学在中国的传播特点。这四个阶段分别是：16世纪末至17世纪40年代，在明末学者对空疏的学术风气已产生反动的文化背景下及王朝将倾的特殊历史关头，欧洲数学知识被引入中国；17世纪40年代至18世纪40年代，在此期间，清代帝王出于统治需要及个人兴趣给予传教士更大的自由，西方数学被较为系统地介绍到中国；18世纪40年代至19世纪60年代，中国学者在复兴古学及进一步思考和理解已经传入的欧洲知识的基础上，深化了对传统数学和泊来的欧洲数学知识的研究，这一时期的工作成为中国传统数学发展史上的最后一个亮点；最后一个阶段为19世纪60年代至19世纪末，鸦片战争之后，近代数学乘着坚船利炮卷土重来，中国传统数学终于抵御不住这一强猛的近代化趋势而退出历史舞台。在上述

的每一个历史时期中，欧洲数学亦或近代数学都有其能够在中国存在的特定的理由和不同的授受群体。随之而来的是,在这些不同的历史时期,其传播的方式及传入的具体内容也不尽相同。基于上述原因，作为对中国数学西化历史的追述，本书不能不辟出一定的篇幅对每个时期对数学发展有着质的影响的相关文化和历史背景作较为详细的描述。在这四章中，我们将尝试着回答这样一些问题:在什么样的历史环境下,欧洲数学传入中国？是什么样的机缘促使欧洲数学能够较为顺利地被中国学者接受？在中国传播欧洲数学科学的究竟是一些什么样的人？为什么为了传播宗教而来的传教士及其同伴要分神费力地在中国传播数学？哪些中国学者热衷于接受欧洲数学知识？他们是以什么样的心态来接受欧洲数学的？当时传入中国的究竟是些什么样的数学知识？清顺治帝和康熙帝何以会对西方数学和天文学感兴趣？清代帝王对传教士的优遇是否真的使传教士引入的知识在中国得到更为广泛的流传并扎下根来？伴随着西方知识传播而出现的“西学中源”说是在什么样的背景下产生的？西方数学知识的传入中断后，中国数学的西化是否亦随之中断了呢？西方数学是以什么样的方式最终取代中国传统数学的？等等。

作为一个高度严谨和独立的科学分支，数学的发展及传播必然有着其自身的特点。完全不涉及具体数学内容的数学史必然是不完备的。如前所述,本书并不追求对这三个世纪中国的数学发展给出面面俱到的描述,也不力图对当时的数学成果和内容给出全面深入的分析，而是试图以个案的形式从纵向探讨西方数学知识在中国扎根的过程。书中主要选取了三组个案，分别以代数学、三角学和中国传统的垛积术为例探讨中西数学的交汇、西方数学的传播及中国数学的消融过程。本书的第五章至第七章将由上述三个个案研究构成。在这一部分,我们希望能通过对数学研究内容、方法和成果的纵向描述展现中国数学西化具体过程。

最后,在本书的结语中,作者将归纳她的思考结果。

第一章　中国数学西化之肇始

谈到中国数学西化之肇始，我们必须追溯到在明万历十年(1582)踏上中国内陆的耶稣会士利玛窦(Mattieu Ricci，1552—1610)①，因为他是系统地在中国传播欧洲数学知识的第一人。通过他，欧几里得几何学被引入中国，一些士大夫和学者欣然接受了这一外来的知识体系，就此开始了长达三百余年的中国数学的西化历程。本章主要探讨从利玛窦来华到1644年明代灭亡的50年间，欧洲数学在中国传播的情况及与其相关的社会和文化背景。

第一节　欧洲数学传入中国的社会文化背景

一、明朝末年的政治与学术

欧洲数学能够在明末传入中国并被部分中国学者所接受是与当时中国数学的发展情况及社会状况密切相关的，而这两者又都受到了明代的政治与文化环境的决定性影响。

明代开国之君朱元璋富雄才而擅猜忌。虽然他不得不在治理国家方面倚赖士人，但又想尽办法抑制他们的势力。为此，他于洪武十三年废去自秦以来辅佐天子处理国政的宰相之位，将权力高度集中于内廷。他大兴狱状，广事牵连，使举朝上下震摄于其君威之下。同时，他又大施廷杖之法，以内官监杖，由卫卒行杖，令士大夫于大庭广众之下受辱。且使内监审狱，造就了皇家独裁的气象。

为帝者既刻意独裁，那么学者们又是一种什么样的局面呢？

---

① 中西交通并不自明代末年为始。关于中西交通的历史，详见：方豪．中西交通史．

明初，朱元璋曾废科举10年之久。但后来，他不仅恢复了科举考试，还扩大了取材额度并使考试程序进一步制度化和格式化。明代君主倡导理学，"科举考试中必须按规定用标准的程颐和朱熹的经义注疏，同时普遍推行这些教义作为道德价值和伦理行为的基础"。明代的科举制度本是考三场，然而阅卷官通常只注重初场《四书》义和经义，而经义考试又被限制取八股的形式。按这样的考试程式，欲求功名的"学者只就《四书》一经中，拟题一二百道。窃取他人文章记之，入场抄誊一过，便可侥幸中式"①。

当然，科举取士之法，虽然会严重影响士子的治学取向，但却并不能完全主宰当时的学术流向。实际上，"宋、明两朝六百年的政府，并不能主持教育，领导学术"。明代，不仅官方将程朱理学钦定为正统学说，学术界亦以提倡理学为标识。应该说，理学及心学的发端者并非不关心社会实际及政治改革。他们反对汉唐以来士子及官僚在政治上表现出来的个人目的性很强的"事功"。"他们要把事功消融于学术里，说成一种'义理'"②。所以，他们反对"事功"，并不意味着他们逃避任事或出世，理学家提倡的是一种以完美道德为出发点的经世和政治。他们强调天理与人欲的分辨，号召人们从个人的内省审察，以正"心术"，"其最终目的，则仍在改进政治，创造理想的世界"③。然而"宋儒的自觉运动，自始即带有一种近于宗教性的严肃的道德观念，因此每每以学术思想态度上的不同，而排斥异己者为奸邪。这又足以助成他们党争意见之激昂"④，"且过重道德，转忘所以重道德之本意，循致官场皆重小节，忽大略，但求无过，不求有功"⑤。这些在宋代已经出现的由理学引起的弊端，在明代发展到了极致。

在学术上，过于注重道德，造成了一种竞趋空疏的气象。明代学者对实学的认识与前朝有明显不同。胡居仁称："容貌辞气上做工夫，便是实学，谨独是要。"⑥另一位明代大儒陈献章则称："文章、功业、气节，果皆自吾涵养中来，三者皆实学也。"⑦在这样的治学宗旨影响下，明代学者大多鄙视具体实事。这一趋势又在明中叶大盛于朝野的"心学"中得到更进一步的发展。"心学"创始人王阳明称：

> 圣人之所以为圣，只是此心纯乎天理而无人欲之杂，犹精金之

---

①②③④⑤　钱穆．国史大纲．697;560;807;600;601．

⑥　胡居仁．居业录．引自：黄宗羲．明儒学案．卷二．浙江古籍出版社，1994.27．

⑦　陈献章．书漫笔后．引自：黄宗羲．明儒学案．卷五．93．

所以为精，但以其成色足而无铜铅之杂也。人到纯乎天理方是圣，金到足色方是精。然圣人之才力亦有大小不同，犹金之分两有轻重。所以为精金者，在足色而不在分两；所以为圣者，在纯乎天理而不在才力也。学者学圣人，不过是去人欲而存天理，犹炼金而求其足色耳。后世不知作圣之本，却专去知识才能上求圣人，敝精竭力，从册子上钻研，名物上考索，形迹上比拟，知识愈广而人欲愈滋，才力愈多而天理愈蔽。正如见人有万镒精金，不务煅炼成色，而乃妄希分两，锡、铅、铜、铁杂然投入，分两愈增而成色愈下，及其梢末，无复有金矣。①

王阳明认为，知识的追求对道德的完善并不起促进作用，相反，对知识的追求，反而会使“人欲更滋”，造成“才力愈多而天理愈蔽”的负面效果。在这样的政治和学术氛围中，数学自然很难得到学者们的重视。但当时，数学却也并未全废。下节将介绍明代数学发展的情况。

对于西学的传入，心学的影响方式非常复杂。以往的研究多强调西学之所以能够被接纳是基于明末士子对心学的反动及对实学的回归。明代末叶，社会制序濒临崩溃，为了应付当时的局势，儒家学者试图恢复传统的儒家行为规范，并倡导“实学”以期经世。这亦将早已出现的对理学和心学空疏一面的反动推向高潮。人们重新对科学技术知识感兴趣。樊洪业对《中国科学技术史稿》中提到的明代有关科学技术方面的著作做过统计，万历年以后出版的著作占其中85%，明代对科技有贡献的人物中，属于万历年以后的人占69%。②对实学及科学技术的重视使得传教士引入的西学中与此相关的内容备受关注。这显然是西学得以在中国顺利传播的条件。近年来，亦有学者开始讨论心学对西学传播所起到的正面影响。实际上，心学的认识论很可能使得当时的学术思想更为活跃与开放。王阳明曾称：

夫学贵得之心，求之于心而非也，虽其言之出于孔子，不敢以为是也，而况其未及孔子者乎？求之于是而是也，虽其言之出于庸常，不敢以为非也，而况其出于孔子者乎？③

---

① 王阳明．传习录．王阳明全集．卷1．27—28．

② 樊洪业．耶稣会士与中国科学．90．

③ 王阳明．答罗整庵少宰书．语录．吴光，钱明，董平，姚延福等编校．王阳明全集．上海古籍出版社，1992．上．卷2．76．



所以,王阳明可以说,“满街人是圣人”①。“良知良能,愚夫愚妇与圣人同”②。这实际上促成了部分学者在思想上对儒家经典的解放。正缘于此,王学流脉中可以产生出李贽这样特立独行,“离经叛道”的人物。③亦由此,西方传教士并没有因未受过儒家传统教育而被明末士大夫们所贬抑,有的传教士甚至会被冠以“西来孔子”的美名。心学始祖陆九渊的“东海有圣人出焉,此心同也,此理同也;西海有圣人出焉,此心同也,此理同也;南海、北海有圣人出焉,此心同也,此理同也”④的说法成为传教士的宗教和学术能在中国传播的理论基础,李之藻、熊明遇等热心传播西方知识的学者曾反复引用此语,而另一位积极传播西方知识的学者徐光启正是出身于心学。由此可见,心学亦对西学在中国的传播起到了促进作用。

二、明代的数学发展

耶稣会士传入的数学能够为中国学者和官员所接受,与中国当时的数学研究状况有关。那么当时中国的数学发展情况究竟是怎样的呢?

明代初年,科举考试中兼试算学。据明《太祖实录》所载,1370 年 8 月,京师及各行省开乡试。中试者后十日复以五事试之,曰:骑、射、书、算、律,其中对算的要求是“通于九法”。⑤所谓“九法”应该是取材于《九章算术》的。1392 年,朱元璋命:“学校生员,兼习射与书、数之法……数习《九章》之法,务在精通。俟其科举,兼考之。”⑥但这一制度在“宣德、嘉靖以后不复举及”。⑦明代政府对数学学习的倡导似乎并没有实际效果,因为到明代中、晚期,官方数学教育的主要教材《九章算术》已少有流传。15 世纪,吴敬花了很长时间才能找到一部《九章算术》的写本。16 世纪,程大位和徐光启虽然知道该书的基本内容,却无缘得见。⑧如果在 14 世纪末各级官方学校确实按照《太祖实录》中所记载的要求将《九章》中的算法作为教学和考试内容,

---

① 王阳明. 语录. 王阳明全集. 上. 卷 3. 116.
② 王阳明. 答顾东桥书. 语录. 王阳明全集. 卷 2. 49.
③ 关于李贽和王学的关系,参见:容肇祖. 李卓吾评传.
④ 引自:黄宗羲. 象山学案. 宋元学案. 第 5 册. 277.
⑤ 夏原吉监修. 太祖实录. 卷 55. 6b—7a.
⑥ 夏原吉监修. 太祖实录. 卷 216. 3a.
⑦ 李俨. 唐宋元明数学教育制度. 265.
⑧ 参见:郭世荣. 明代数学与天文知识的失传问题. 321—322.

则必会有很多书商翻刻该书,那么,它便不可能会在一二百年后近乎失传。

中国历史上多数出色的数学家并不是官方教育机构培养出来的。然而,单从数学成就上来看,明代非官方数学家的工作亦无太多可供圈点之处。中国传统数学源远流长,在算术、代数、几何等各方面都有出色的成果。宋元时期,中国传统数学的发展达到了顶峰。但此后中国数学开始衰落。一些传统数学著作失传,《九章算术》、《数书九章》、《测圆海镜》及《四元玉鉴》等虽尚有传本,但亦难得一见。中国传统数学中最出色的成就,如高次方程的数值解法的增乘开方术、设未知数解方程及多元高次方程组的天元术和四元术等已无人能懂。16 世纪顾应祥对天元术的无知妄议为描述明代数学衰落的一个著名案例。

顾应祥,号箬溪道人,湖州吴兴人。少曾受业于王阳明。嘉靖年间巡抚云南,迁刑部尚书。[①]自云"自幼性好数学,然无师传,每得诸家算书,辄中夜思索,至于不寐。久之,若神告之者,遂尽得其术"。[②]顾应祥是通过自己读书学习数学的。1550 年,他完成了《测圆海镜分类释术》,阐释元朝数学家李冶的《测圆海镜》中的数学方法。在《测圆海镜》中,李冶以天元术的方法构建出直角三角形及其内接正方形和内切圆的运算系统。[③] 由于顾应祥不能理解天元术,他删去李冶书中含天元术的术文。[④] 虽然如此,顾应祥对数学研究的认识还是值得我们认真分析的。在《测圆海镜分类释术》序中,顾应祥称:

> 数之为术,虽千变万化之不同,而其要不过一开阖而已。开者除也,阖者乘也,而又有以形求积、以积求形之异。古之为数者,有九九者,其用也。是故用之以贸易,则为粟米;用之以分别差等、较

---

① 阮元. 顾应祥. 畴人传. 卷 30. 3b.

② 顾应祥.勾股算术序.勾股算术.

③ 所谓天元术,即利用立未知数解高次方程的方法,该法似乎是在宋元之交时开始出现。现存最早的含天元术的著作为元朝李冶的《测圆海镜》。宋秦九韶《数书九章》中也有天元一术,但其术与一般意义下的天元术不同。

④ 顾应祥在其《测圆海镜分类释术》序中称:"但其(《测圆海镜》)每条下细草虽径立天元一。反覆合之,而无下手之术,使后学之士茫然无门路之可入。辄不自揆,每章去其细草,立一算术,又以其所立通句边股之属,各以类分之,语义稍繁者略加芟损,名曰《测圆海镜分类释术》,非敢僭改前贤著述,惟以便下学云尔。"引自《畴人传》,卷三十,4b;《测圆算术》叙中,顾又称:"《测圆海镜》……极为明备。但每条细草,止以天元一互算,而漫无下手之处。"见:顾应祥.《测圆算术叙》,《测圆算术》.可见他是由于读不懂天元术的术文删去《测圆海镜》中的算草的。

量远近，则为差分、为均输；因其末而欲知其本，为盈朒；彼此互见则为方程。若夫以形求积则方田、商功之类是也；以积求形则少广、句股之类是也。以形求积者，先得其形而后求其积，故其为术也易。以积求形者，则先得其积而后求其长短广狭。斜正之形有非乘除所能尽者，故必以商除之。然而商除亦不能尽也，而又立正负廉隅之法以增损附益之。故其为术也难。余自幼好习数学，晚得荆川唐太史所录《测圆海镜》一书，乃元翰林学士栾城李公冶所著，虽专主于求容圆求方一术，然其中间如平方、立方、三乘方、带纵、减纵、益廉、减廉、正隅、负隅诸法，凡所谓以积求形者，皆尽之矣。①

这段论述则表现了顾应祥对数学的理解。他认为，九九之数，也即《九章算术》中所含的内容都只是数学的"用"，也就是功用。从数学内容上来看，其蕴含的只有乘、除运算及乘方、开方和求方程数值解等问题。正是基于这样的观点，他对《测圆海镜》给出的注释也仅是对原书中算题蕴含的数学方法的阐释。②在他的另一部著作《勾股算术》之首，他给出了勾、股、弦及由其和差关系导出的13种名词的定义③，此后，他又列出若干一般性的公式。④全书体例与其他古算书有明显的不同，且带有明确的理论化倾向。顾应祥下面的叙述说明了他对数学研究的态度：

今夫世之论数者，俱视为末艺，故高明者不屑为之，而执泥者遂以为占验之法，虽栾城公自序亦以为九九贱伎。殊不知君子之学，自性命道德之外皆艺也，与其徒费精神于佔毕之间，又不若留情于此，不惟可以取乐，亦足以为养心之助焉。⑤

在《测圆算术》序中，他又称：

或曰：知者无不知也，当务之为急。数一艺耳，无乃非所当务者乎？曰：非也。人有是心，未尝无思，今夫世之人，日夕皇皇以经营于念虑之间者，果皆当务者乎？是未可知也。传曰：安而后能

---

① 顾应祥．测圆海镜分类释术序．转引自：阮元．畴人传．卷三十．3b—4b．

② 顾应祥．测圆海镜分类释术．

③ 这13种名称已见于宋杨辉《详解九章算法》，据郭书春分析，其内容属11世纪贾宪《黄帝九章算经细草》。见：杨辉．详解九章算法．45a；郭书春．贾宪《皇帝九章算经细草》初探．

④ 顾应祥．勾股论说．勾股算术．

⑤ 顾应祥．测圆海镜分类释术序．转引自：阮元．畴人传．卷三十．5a．

虑。孙思邈曰：胆欲大而心欲小。学而至于心细，则何事不可为者。数虽末艺，然非粗心浮气者所能入。况亦假此以适吾之适，亦何伤哉？①

作为一位心学派学者，顾应祥将"性命道德"视作惟一的"道学"，这是可以理解的。对于他来说，除此之外皆是"艺"。顾应祥认为，数学是可以养心怡情的，且是需要学者细心考求的科目。②他将数学视为具有学术意味的知识。在《弧矢算术序》中，顾应祥进一步说：

弧矢一术，古今算法所载者绝少。钱唐吴信民《九章算法》只载一条，《四元玉鉴》所载数条，皆不言其所以然之故。③

他明确指出吴敬的《九章算法比类大全》和《四元玉鉴》中没有讲清弧矢算术的"所以然之故"，半个世纪之后，徐光启以同样的理由批评了古代数学著作。④人们通常将明末之后中国数学家在数学研究上表现出来的理论化倾向完全归因于欧几里得几何学传入的影响，但事实上，这一倾向在明代学者们的数学研究已有所体现，明代学者对数学的自觉的理论化追求很可能受到了理学发展的影响。除顾应祥及其同时的唐应川以外，明代学者中似乎很少有人从事数学研究。

相对于学者的数学研究，明代民间的数学研究似乎更为活跃，有多部数学著作传世。现有流传的主要有：严恭《通原算法》1 卷（1372）、夏泽明《指明算法》一卷（1439）、吴敬的《九章算法比类大全》10 卷（1540）、王文素《古今算学宝鉴》40 卷（1524）、徐心鲁《盘珠算法》（1573）、柯尚迁《数学通轨》（1578）、程大位《算法统宗》17 卷（1592）、《算法纂要》4 卷（1598），黄龙吟《算

---

① 顾应祥．测圆算术序．测圆算术．

② 顾应祥对数学的态度与欧洲 15～17 世纪很多数学家对数学的态度非常相似。克拉维斯指出："在[数学的]所有益处之中，其中最大者可能是其教育的结果及应用其艺术给人带来的愉悦与充溢灵魂的快感。"见：Clavius，*Opera mathematica*．1．6。至 19 世纪及 20 世纪，将数学作为有益心智的提高的说法在数学家中仍很普遍。1830 年，雅可比致勒让德的信中称："傅里叶先生认为，数学的主要目的是服务人类、解释自然现象，但像他这样的哲学家应当知道，科学的惟一目的是为了人类心智的荣耀，因此一个关于数的问题与一个关于宇宙体系的问题具有同样的意义。"20 世纪著名数学家和数学史家丢东涅撰有《为了人类心智的荣耀》一书，并在该书扉页之后引用了这段文字。（此段介绍是根据郭世荣教授提供的资料改写的）

③ 顾应详．弧矢算术序．弧矢算术．

④ 詹嘉玲曾指出，程大位的《算法统宗》也有一定的理论化倾向。见：詹嘉玲．清初及清中叶的数学教育．

法指南》2卷(1604)等等。[①]其中影响较大的为吴敬的《九章算法比类大全》和程大位的《算法统宗》[②]。数学史家普遍认为,明代江南地区商业贸易的发达促进了当地数学的发展。《九章算法比类大全》的作者吴敬,浙江仁和(今杭州市)人,曾担任过浙江布政使司的幕僚,掌管全省田赋和税收的会计工作。《九章算法比类大全》按《九章算术》体例,引用了杨辉《详解九章算法》及刘徽《海岛算经》、王孝通《缉古算经》中的部分算题,并加入了很多结合当时生活的应用问题,有些题目反映了明中叶以后江南地区与商业贸易有关的情况。[③]书中含大量筹算和珠算的计算口诀,表明当时还是两种运算工具的过渡阶段。程大位(1533—1606)曾长年在长江下游一带经商,同时搜集算书。中年以后从事数学研究,著成《算法统宗》。书中前两卷为对计算方法及口诀的一般性介绍,卷3至12按《九章算术》体例安排,卷13至16仍按《九章》章目,以诗词体记述难题。卷17为杂法。该书为珠算术的集大成之作,在明清两代多次再版,并传到朝鲜、日本及东南亚各国,对珠算术的普及起到了很大作用。从数学内容上来看,书中将筹算求二次和三次方程数值解的方法转化为珠算口诀,为一创新。[④]这些民间数学家的著作中,亦不包括宋元时期的天元术、四元术、增乘开方法等出色数学成果。

综上所述,仅就数学研究水平来看,明代的数学确实是处于退步的局面。17世纪初,徐光启称:"唐虞之世,自羲和治历,暨司空、后稷、工虞、典、乐五官者,非度数不为功。周官六艺,数与居一焉。而五艺者不以度数从事,亦不得工也。襄旷之于音,般墨之于械,岂有他谬巧哉,精于用法而已。故尝谓三朝而上为此业者盛,有原原本本师传曹习之学,而皆丧于祖龙之焰。汉以来多任意揣摩,如盲人射的,虚发无效;或依拟形似,如持萤烛象,得首失尾。至于今而此道尽废。"[⑤]徐光启的叙述表现出他并不了解中国传统数学尤其是宋元数学的发展状况及成果。在《同文算指》序中,徐氏又曰:"算数之学特废于近世数百年间尔。废之缘有二:其一为名理之儒土苴天下

---

① 关于这些算书的具体收藏情况及内容,见:梅荣照. 明清数学概论. 明清数学史论文集. 1—20.

② 王文素的《算学宝鉴》是一部卷帙浩大的数学著作。该书未曾刊刻,故流传较少。

③ 钱宝琮. 中国数学史. 134—136;郭书春.《九章算法比类大全》提要. 关于《九章算法比类大全》的具体内容及其对后世算书的影响,参见:张久春.《九章算法比类大全》与"九章"的渊源.

④ 关于《算法统宗》及程大位,参见:严敦杰,梅荣照. 程大位及其数学著作. 明清数学史论文集. 26—52;李兆华.《算法统宗》试探. 古算今论. 158—173;郭世荣. 算法统宗导读. 7—90.

⑤ 徐光启. 几何原本序. 1a—2a.

之实事,其一为妖妄之术谬言数有神理,能知来藏往靡所不效。卒于神者无一效,而实者无一存。"①徐光启将明代数学的衰退归因于理学家对实际问题的鄙弃及数术家们的象数神秘思想的影响。确实,宋代道学家的"格物致知"说与一般人所了解的实事求是的科学方法并不完全一致,道学的思想本质对包括数学在内的自然科学研究不能起到直接的促进作用。当然,正如钱宝琮先生所分析的,道学与数学之间并无必然的联系,只有在统治者将道学定为一尊,学术思想陷于僵化的时候,数学的发展才会受到其阻碍。②同时,如前文所论,很可能与理学对学术的追求有关,明代数学出现了理论化和纯粹化的趋势,这很可能对明末学者接受理论性的欧洲数学科学起到了一定的促进作用。

相比来说,同时的欧洲数学确实在很多方面均较中国明代数学更为优越。这样,欧洲数学能够在中国得到广泛流传似乎应该是顺理成章的。然而,欧洲数学之所以开始在中国传播,却并不仅是由于其数学知识本身的优势,而是缘于它是修订历法的理论基础。

三、明代的天文历法

数学是制订和改革历法的重要工具,部分欧洲数学知识正是藉历法的修订传入中国的。因此,我们先来考察一下明朝天文历法的状况。

明代初年,朱元璋诏令禁止百姓私习天文历法。③读者也许会觉得奇怪,堂堂一朝开国君主,何以会琐碎到要亲下诏令来禁止历法研究呢? 实际上,朱元璋的这一举措是颇具深意的。

在儒家的政治体系中,有一个很重要的天人合一理论,其核心为,天是人格化的,它有感情、有思想,天上的日、月、星辰都会随地上人事、物事的发

---

① 徐光启. 同文算指序. 1b—2a.

② 钱宝琮. 宋元时期数学与道学的关系. 关于明代数学的特点,参阅:Guo Shirong. The Influence of Yang Hui's Works on the Mathematical Mainstream in the Ming Dynasty. 358—367;郭世荣. 明代数学与天文知识的失传问题. 320—335.

③ 沈德符在《万历野获篇》中称:"国初学天文有历禁。习历者遣戍,造历者殊死。"沈德符. 万历野获篇. 524—525. 明代以前,统治者也禁止民间私习天文,但从未禁止私习历法。此禁令对明代天文学的发展产生了严重的负面影响。同时,由于历法制定和数学有密切的联系,中国古代数学中的一些高深的内容通常与历法运算有关。对私习历法的禁令必然会阻碍明代数学的发展。关于明代的天文历法,参见:中国天文学史整理研究小组编. 中国天文学史. 38—40.

展而变化。通过观测天象可以预知地上事物的发展情况①。中国自古就有记述灾异的传统。儒家经典之一《春秋》中系统记载了当时的灾异,但它"书灾而不记其故"。《公羊传》对《春秋》中记载的灾异给出了更进一步的阐释。到汉代,人们"用了阴阳五行的学说来整理灾异的现象,使它们在幻想中成为一种极有系统的学问"②。此后,虽然日食、月食、彗星、流星、陨星、客星、五星守犯、星昼见等天文现象对农业生产并没有直接影响,但却被认为是不正常的天象,与水、旱、雹、大风、冬无雪、地震、山崩、蝗虫等直接影响农业生产,造成物质损失的自然现象一样被列入灾异的行列,并被赋予了相同的意义。③帝王,也称"天子",作为天、地之间的惟一调节者,通过制订历法维持人间生活与天地循环之间的协调。

现代的读者也许会嗤笑古代学者的迷信与荒唐,但该理论实际上很可能是儒家士大夫试图抑制皇权的一个策略。皮锡瑞曾对"天人合一"理论给出如下解说:

> 当时儒者以为,人主至尊,无所畏惮,借天象以示儆,庶使其君有失德者犹知恐惧修省。此《春秋》以元统天以天统君之义,亦《易》神道设教之旨。汉儒藉此以匡正其主,其时人主方崇经术,重儒臣,故遇日食地震必下诏罪己,或责免三公。虽未必能如周宣之遇灾而惧,侧身修行,尚有君臣交儆遗意。此亦汉时实行孔教之一证。后世不明此义,谓汉儒不应言灾异引谶纬,于是天变不足畏之说出矣。④

虽然古代皇帝和士大夫们未必尽信天人感应的说法,但他们至少都要摆出一副笃信的模样来。汉代时每逢天上有日食、月食等所谓凶兆出现,皇帝都会下罪己诏,并让群臣上奏指出其为政的疏露及失德之处。这样,通过天人合一,便可以实现君臣间的良性互动与互相监督。有史料表明,明太祖对于天人感应也很重视⑤,并连带地也非常关注历法的修订。洪武十五年(1382),他召集翰林李翀、吴伯宗而谕之曰:

---

① 参见:江晓源.天学真源.

② 顾颉刚.秦汉的方士与儒生.27.

③ 徐凤先.中国古代异常天象观.

④ 皮锡瑞.经学历史.22a—b.

⑤ 明太祖曾称:"朕尝临危几凶者数矣,前之警报皆验,是以动止必详人事。审服用。仰观天道,俯察地理,皆无变异而后运用,所以获安。"见:皇明祖训.洪武御制全书.394.

> 天道幽微，垂象以示人。人君体天行道，乃成治功。古之帝王，仰观天文，俯察地理，以修人事、育万物。由是，文籍以兴，彝伦攸叙。迩来西域阴阳家推测天象至为精密，有验其纬度之法，又中国书之所未备，此其有关于天人甚大，宜译其书，以时披阅，庶几观象可以省躬，修德思患预防，顺天心立民命焉。[①]

明太祖对天文历法的重视与他要实行皇家独裁的愿望相一致。有了一套能够准确观象授时的历法，便可进一步确定明室皇权的合法性，成就其上天与人世间惟一调节者的无上地位。但同时，太多的人懂得天文、历法，尤其是占星之术，并据此对他的行为指手划脚自然不是他所愿意看到的，且借助天象符验揭竿而起的事例在中国历史上亦不少见。[②]他称：

> 天象人不能为，余皆人可致之物。恐奸者乘此伪为，以无为有，以有为无，窒碍出入，宜加详审。[③]

这样，他对民间私习历法的厉禁也便在情理之中了。明代早年严禁私习历法，应该是造成明代与天文计算相关的算法在民间和学者中间失传的一个重要原因。

了解了天文历法在中国古代政治中的象征性意义，就可以对明、清学者抵制欧洲传教士主持历法改革的原因有一更清楚的认识。同时，也可以明白，为什么在社会危机四伏，各地起义风起云涌，关外清军虎视眈眈的明代末年，崇祯帝还要下令改革历法。实际上，越是在皇朝的末叶，象征皇室合法性的事务才会更加引起帝王和社会的重视。

明《大统历》的主体因袭了元《授时历》，它并不像朱元璋期望的那样准确。明太祖元年，太史院使刘基率其属高翼进戊申《大统历》。从此，《大统历》成为明代的官方历法。洪武十五年，朱元璋命李翀等与伊斯兰天文学家一起翻译阿拉伯天文书[④]，并于钦天监中设回回历科。然而，《大统历》和伊

---

① 阮元．畴人传，1842．29．2a—b．

② 朱元璋曾很相信天人感应说，他在严祭祀中称："凡祀天地、祭社稷、享宗庙，精诚则感格，怠慢则祸生。故祭祀之时，皆当极有精诚，不可少有怠慢。其风、云、雷、雨师、山川等神，亦必敬慎自祭，勿遣官代祀。"见：朱元璋．严祭祀．皇明祖训．393。但明代开朝之后，"天下横兵"、"大疫流行"、"水旱时时"，这使他对天人感应之说产生怀疑，认为这些灾祸不该是由他"非仁"导致的。见：朱元璋．问天时．洪武御制全书．148—149。关于古人利用星议政、谋反等的事例及对相关问题的分析，参见：江晓原．215—273．

③ 朱元璋．谨出入．祖训录．368．

④ 阮元．畴人传．29．2a—b．

斯兰历法之间并没有进行有机的会通。《大统历》科和回回历科的人员往往各自为政，回回历科官员以伊斯兰天文学方法推算日月交食、五星凌犯等天象，以白本进呈。①洪武十七年，漏刻博士元统曾上言，明代的历法"以大统为名，而积分犹踵授时之数。非所以重始敬正也。况授时以至元辛巳为元，至洪武甲子积一百四年。用法推之，渐差天度"。但元统只是将历元改为洪武甲子，并去岁实消长之说。其法则一仍《授时》。到洪武二十六年，钦天监监副李德秀又上奏，称元统去岁实消长为谬。"16世纪中，唐顺之、周述学、陈壤、袁黄等都想把《回回历法》与《授时历法》融会贯通，提出改订新历法的意见。但是他们的数学根基太差，对于阿拉伯天文学的研究不够深入，因而没有什么收获"②。

明代260余年间并未对《大统历》做质的修订，天象预测失误的记载常见于史册。钦天监人员只知利用《大统历》的计算系统和数据进行推算，对制定及修正历法的理论基础则全然无知。1610年，由于钦天监迭次对日、月食预报失准，礼部上奏请求"博求通知历学者，令与该监（钦天监）集议"③。1629年，钦天监预报日食再次失准，崇祯帝震怒，传旨申饬。④ 作为钦天监的主管机构，礼部于当年四月二十九日上表曰：

> 据该监五官夏官正等官戈丰年等回称，备陈日食时刻少差，切照本监所用《大统历》，乃国初监正元统所定，其实即元太史郭守敬等所造《授时历》也。二百六十年来，历官按法推步，一毫未尝增损，非惟不敢，亦不能。若妄有窜易，则失之益远矣。切详历始于唐尧，至今四千年，其法从粗入细，从疏入密，汉唐以来，有差至二日、一日者，后有差一、二时者。至于守敬《授时》之法，古今称为极密。然中间刻数依其本法，尚不能无差，故向来遵用推算，繁有一

---

① 吴明炫．言历事．引自：史松，林铁军．清史编年．第一卷（顺治朝）．中国人民大学出版社，1985．476．

② 钱宝琮．授时历法略论．钱宝琮科学史论文集．李俨、钱宝琮科学史全集．第9卷．487．

③ 李国祥，杨昶主编．明实录类纂·文教科技卷．550．

④ 在天人合一理论中，太阳是与地上的君王相对应的。故日食对于朝政有非同一般的象征意义。对其预测失准，尤其是不能预见日食的出现，或实际日食的程度或时间超出预测，便意味着将有危及帝位的不寻常的灾难或皇帝的严重失德，同时，这也是上天不再认同该皇朝的象征。故中国历朝历法首重对日、月食的预测，衡量一部历法是否准确也通常是以日、月食预测的准确程度为标准的。明末清初，正是通过对日、月食预测的检验，才确立了欧洲传教士在历法改革及钦天监中的地位。

二刻不合，若在早晚又不止一二刻矣。此其立法固然，非职自能更改，亦非敢鲁莽失误也。岂惟职等，即守敬以至元十八年成历，越十八年为大德三年八月，已推当食而不食。大德六年六月，又食而失推，载在《律历志》，可查也。是时守敬方以昭文殿大学士知太史院事，亦付之无可奈何。盖一时心思技术已尽于此，不能复有进步矣。夫彼立法者尚然，况职等斤斤守法者哉？切闻创始难工，增修易善。自古以来，每觉差讹，即令专门宿学之臣为之修改，故汉历改五次，魏至隋改十三次，唐至五代改十六次，宋改十八次，金元改三次。独我朝二百六十年未经修改。中间又有年远数盈及岁差增损诸事，致差之因非一端也。今欲循守旧法，向后不能无差，欲行修改，更非浅陋所及，遵奉圣谕，严切措躬无地，为此备陈情悰。①

上文中，钦天监官员承认，预测失误缘于《大统历》历法有误，而他们并没有修改历法的能力，且亦不能保证今后能够给出准确的预报。面对这样的局面，崇祯帝当然不会满意。当时的礼部侍郎徐光启准确地捕捉到这一契机，建议请耶稣会士协助改革历法。耶稣会士藉此在中国得到了一个稳定的地位，并进而在清代掌管了钦天监。

在进一步讨论欧洲传教士参与历法改革并在中国传播数学科学的具体过程及内容之前，让我们先来看一看当时欧洲科学在中国的主要传播者耶稣会士的情况。

第二节　16、17世纪欧洲数学在中国的主要传播者——耶稣会士

自16世纪末至18世纪中叶，在中国传播数学科学知识的欧洲人几乎都是耶稣会的成员。当时在中国传教的并非只有耶稣会一个修会，冉森教派、多明我会及方济各会等都有修士在中国活动，那么，为什么只有耶稣会士积极地在中国传播数学科学知识呢？是不是耶稣会特别重视数学呢？要解答这样的问题，必须先对这个修会及其在中国的传教策略有一个大致的了解。

① 礼部．崇祯二年四月二十九日礼部题为日食事．西洋新法算书．四库全书本．5a—6a.

一、耶稣会的历史与特点

在明代末年，耶稣会还是一个新兴的宗教团体。1534年，西班牙人伊格纳西奥·德·罗耀拉（Ignacio de Loyola，1491—1556）在巴黎创立了耶稣会。1540年，该会得到教皇保罗三世的正式认可。罗耀拉试图将他的修会缔造成一支天主教新军，其宗旨是为了增进耶稣基督的荣耀。为此，耶稣会士可以说是不惜代价且不计手段地去征服和消灭全世界的异教徒及当时在欧洲得到迅猛发展的新教组织。耶稣会士们学识丰富、野心勃勃、不畏艰难且富有计谋和献身精神，这使得他们很快成为天主教会对付新教运动的最有力的一股力量。此外，耶稣会士还远涉重洋，他们在美洲新大陆及新开辟的亚洲传教区的传教事业中占据了重要地位。

耶稣会能够迅速崛起的一个重要因素是他们开办了为数众多水平很高的学校。虽然办教育并不是罗耀拉创建耶稣会的初衷，但他很快意识到，从事教育是塑造人的灵魂和精神，把他们引向上帝的最有效的途径之一。最初的耶稣会士又个个都是受过大学教育的饱学之士，这在客观上为罗耀拉从事教育事业提供了基础。① 所以，一旦机会来临，他便毫不拖延地在教育上投下了大量的人力和财力。1547年，罗耀拉在西西里为非耶稣会青年创建了一所学校。在此后的二百余年中，该修会已拥有了八百余所大学。罗耀拉规定，这些学校免费面向所有人开放。这些学校中有着系统的人文教育，培养出大批天文学家、剧作家、神学家、语言学家、画家、建筑师、数学家及其他方方面面的学者。然而，我们必须注意，耶稣会学校教育的目的“不是培养知识英才，而是培养具有英才的基督教徒”②。在科学方面，“他们不是为了科学而教授科学，而仅仅是为了‘愈显主荣’。这是圣·依纳爵（罗耀拉）在‘耶稣会会规’中奠定的原则”③。

耶稣会的迅速崛起引起了其他修会的不满。同时，由于耶稣会士卷入了18世纪欧洲的宫廷政治，使得他们受到了来自宗教界和世俗界双方当权人士的批评。此外，随着启蒙运动的发展，启蒙运动派学者与天主教修会间

① 罗耀拉和他最早的6位追随者沙勿略（S. Francisco Xavier，1506—1552）、勒费弗尔、拉伊奈兹、萨尔迈隆、包瓦迪亚以及罗德里格斯都曾在巴黎大学学习。

② 埃德蒙·帕里斯．耶稣会密史．69．

③ 夏摩尔．耶稣会士的教育法．引自：埃德蒙·帕里斯．耶稣会密史．74．

的矛盾日益加深，耶稣会成为双方的敌人。1773年，教皇克莱蒙十四世(Clement XIV)颁布了对耶稣会的禁令。在其谴责耶稣会的诏书中，他列举对该会的种种指控，其中包括策划叛乱、企图陷害主教、破坏正常的宗教体制等等。虽然很多对耶稣会的指控被证明是没有根据的，但他们的某些活动及他们的传教策略确实在欧洲引起了广泛的怀疑与责难。虽然，作为一个宗教组织，耶稣会被取缔，然而，在一些国家中，耶稣会学校还继续他们的教育事业。1814年，耶稣会又恢复了活动①。

二、耶稣会与数学科学

下面，让我们来看一下与本书主旨关系更为密切的问题——耶稣会与科学，尤其是数学的关系。耶稣会大学中基本上都有数学教育，实际上，当时的天主教会学校中大多开设数学课程。

天主教会一经创立便开始开办学校。这些学校的目的主要是为教授教会经文和圣书，其后不久，为了训练教会圣职人员，教会又逐步办起较高级的学校。11世纪下半叶，从教会学校中产生出欧洲的大学。中世纪的欧洲教会大学中主要传授的知识有四大科和三种人文学科，四大科分别是算术、音乐、几何、天文，三种人文学科为修辞、辩证法及文法。在当时，四大科都被认为是属于数学科学的。因为音乐可被视作数的一种应用，而天文学更是无疑要用到数的运算。教会提倡数学科学的目的主要是为了利用数学修订日历和预报节日，同时，数学也被视为训练神学说理的最好学科，教士们可以利用数学推理来捍卫神学并在论争中占据上风。

11世纪以前，欧洲大陆上已很难见到古希腊著作，教会学校师生及其他学习数学的人们只能靠着早期翻译家编辑的一些作品学习零星的数学知识，如欧几里得《原本》中的部分几何题目、四则运算法和分数计算等最初等的算术和几何知识等。12～14世纪期间，十字军发现了流传到阿拉伯的古希腊著作，这些著作引起了欧洲人强烈的兴趣。大批古希腊著作，包括欧几里得(Euclid)、托勒密(Ptolemy)、泰奥多希乌斯(Theodosius)、亚里士多德

① 虽然耶稣会重新恢复活动，但他们的地位已大不如前。在教育方面，“随着科学、教育和教学方法的进步，以及它们在人类思想更广泛、更深刻的基础上的发展，耶稣会士在教学方面的成就越来越少。”“十六世纪，耶稣会士是向前发展的，而到了十八世纪，他们则落在时代的后面”。博埃莫．耶稣会士．引自：埃德蒙·帕里斯．耶稣会密史．74.

(Aristotle)、海伦(Heron)及阿基米德(Archimedes)等的作品被带回欧洲。一批学者开始翻译、注释和研究这些著作。从13世纪初到15世纪中叶，亚里士多德的知识体系和机械主义自然观成为经院派学者们信奉的惟一的正统知识体系，并在教会学校教育中占据了主导地位。15世纪以后，以毕达哥拉斯和柏拉图为代表的数学唯理主义自然观开始在学术界流行。这派学者们相信，自然界是按照数学方式设计的。一些天主教士科学家将这一观点与其神学信仰相结合，得出了如下的观念：上帝是按数学方式设计大自然的，上帝本人是一位至高无上的数学家。于是，探索大自然的数学规律，便成为证明上帝智慧的最佳途径。然而，并不是所有的神学家都能够接受这样的观念。至少在16世纪，大部分神学家坚持认为，数学是一个外围学科，它远不如哲学或神学重要。为了对抗文艺复兴以来出现的人们对数学的兴趣的复苏，一些哲学家批评数学，他们甚至否定数学是一门学问。当时，数学在天主教会学校中的地位是无法与哲学和神学相比的。

对数学的轻视也存在于早期耶稣会学校中。在罗耀拉为耶稣会学校设立的教学目标中，数学的位置并不十分确定。“逻辑学、物理学、形而上学和道德哲学都应被包括(在学校教学之中)。数学也应该在适合于达到追求目标的程度[被讲授]”。可以看出，数学被放在了一个从属的地位。

通过罗马学院(Collegio Romano)数学教授克拉维斯(Christopher Clavius, 1538—1612)写的一份文件①，可以清晰地看到数学在当时耶稣会教育中所占的地位。在他的《促进(耶稣会)修会内的学校中的数学学习的方法》的报告中，克拉维斯呼吁：数学教授应该像其他教授一样可以被邀请参加公开辩论及学位授予等庄严的庆典，并应参加那些辩论。数学教师应该热爱这一学科并且不应被指派去承担数学教学之外的义务和职责。如果学习数学的学生偶尔也可以因为他们的数学才能而在其他学生面前得到称赞，同时为几何学或天文学题目设立奖励，也将会(对促进数学的学习)有益。最后，他评论说，一件很不幸的事情是，哲学教师经常轻视数学，认为它不是一门真

---

① 关于克拉维斯的出生年份，有两种说法.一说主他生于1538年，另一说则主他生于1537年(克莱茵在其《古今数学思想史》中即主此说。见：M. 克莱因.古今数学思想. IV. 75).E. Knobloch对这一问题做了详细的分析，并给出克拉维斯的出生年份为1538年的令人信服的说明。参见：Knobloch, Christoph Clavius—ein Astronom zwishen Antike und Kopernikus. 117.

正的科学，它缺乏证明，且与生命和道德相脱节①。

由此可见，在早期耶稣会学校中，数学教授和他们的学生都不能得到与其他学科教授和学生们同等的对待。为了提高数学的地位，克拉维斯还参加了一场关于数学科学的地位的论战。

前述克拉维斯的叙述也许会令读者感到疑惑，数学一向被认为是最严谨的学科，为什么会有人说它缺乏证明呢？这与当时的正统哲学亚里士多德哲学的理论有关。亚里士多德认为三段论是最理想、最有效的推理模式。由此，16世纪的欧洲经院哲学家们认为，利用这一推理模式的学科要比那些不使用这一推理模式的学科重要、可靠，相应地也就有更高的地位。批评数学的人认为数学证明不能与自然哲学中的三段论证明方法相比，因为，按照亚里士多德的看法，在一个真正的证明中，前提应该是结论的直接原因。数学的批评者指出：几何中的证明并不具备这样的特点。

为了回击哲学家们对数学的批评，克拉维斯试图以三段论去证明数学命题。他费力地为欧几里得《原本》第一题（利用给定线段做出等边三角形）给出了一个三段论法的证明，他声称这样的做法是一般性的："所有其他的命题，无论是欧几里得的还是其他数学家的，都可以以这种方法解决。"但是，"数学家们在他们的证明中不使用这种（三段论的）方法，因为不用它，证明可以更简单、更快捷。这从前面的例子就可以看出来。"②克拉维斯的三段论可以被用于数学推理之中的一般性的声明可以成为捍卫数学地位的有效武器。这正是克拉维斯想要做的。然而，克拉维斯及其他任何人都没能完成这整项计划（例如，将欧几里得的全部命题改写成三段论的推理模式），以支持这个一般性的论断。所以他们的反击没有很大的效力。实际上，数学家们并不是靠证明数学、天文学或其他数学科学（光学、力学等）能够符合自然哲学家的要求来赢得这场争论的，是17世纪初期伽利略、开普勒等在数学科学方面取得的巨大成功击退了哲学家们对数学的攻击。③

17世纪初，在罗马神学院，数学科学终于得到了类似于克拉维斯所希望的地位，成为正规的课程。数学教授们可以参加辩论，他们的学生也可以

① James M. Lattis , Between Copernicus and Galileo——Christoph Clavius and the Collapse of Ptolemaic Cosmology, 33.

② Clavius, Opera mathematica. 1:28.

③ 关于数学科学地位的论战，参阅：W. A. Wallace. Galileo's logic of discovery and proof. 111—114.

在正式集会上证明他们的技巧。更重要的是,耶稣会学校培养出越来越多的出色数学家,他们的著作具有很高的水平。在克拉维斯的领导下,数学和天文学为耶稣会带来了很大的荣誉。

来华耶稣会士大多是耶稣会学校培养出来的学生。他们在华传播的数学科学知识便是从耶稣会学校中获得的。当利玛窦向中国学者介绍欧洲数学时,他选择的第一部著作便是他在罗马神学院就读时的老师克拉维斯所著的欧几里得《原本》评注本。此外,耶稣会士参与翻译和编写的其他数学著作也多是以克拉维斯的著作为底本的,他们在中国从事的有关数学科学传播和制订历法及制造科学仪器的活动,亦可谓是克拉维斯在欧洲活动的翻版。所以,我们有必要再简单介绍一下克拉维斯的情况。

在 17 世纪,克拉维斯被耶稣会士们称为“我们的克拉维斯”,而一般民众则将他视为当时的欧几里得①。1555 年 4 月,克拉维斯由罗耀拉本人亲自引领加入耶稣会,并被派到葡萄牙的科英布拉(Coimbra)学院学习。1567 年,他成为罗马神学院的数学教授。

克拉维斯一生中最重要的科学活动之一是他于 16 世纪 70 年代参加的改革《儒略历》的工作。由教皇格里高里十三世(Gregory XIII ,在位期间 1572—1585)指定,年轻的克拉维斯成为修订《格里高里历》的两位技术指导之一。在《格里高里历》于 1582 年颁布之后,他又成为这一历法改革的解说者。1588—1612 年间,他完成了 7 部著作阐释这一新历法的理论基础、应用方法,并反驳对该历法的攻击②。

克拉维斯一生的大部分时间都在从事数学教育。1566 年,罗马神学院教学指导文件中为数学教师规定的职责是:“关于数学,数学应该以下列顺序被传授:欧几里得的书的前六卷(即 Elements 前六卷),算术,球体[即 Sacrobosco 的 Sphaera],宇宙学,天文学,行星理论,Alphonsine 表,光学,测时。只有二年级的哲学系学生应该参加数学教师的演讲。但是,有时在经过允许的情况下,学习辨证法的学生也可以听这门课③。这个课程表与克拉维

---

① James M Lattis. *Between Copernicus and Galileo——Christoph Clavius and the Collapse of Ptolemaic Cosmology*. 3.

② James M Lattis. *Between Copernicus and Galileo——Christoph Clavius and the Collapse of Ptolemaic Cosmology*. 21.

③ 转引自:James M Lattis. Between Copernicus and Galileo——Christoph Clavius and the Collapse of Ptolemaic Cosmology. 33.

斯一生发表的著作完全可以对应起来。

克拉维斯的著作主要是以古希腊著作的评注的形式出版的。1570年，他出版了Sacrobosco的*Sphaera*的评注。1574年，他又出版了15卷的《原本》评注*Euclidis Elementorum Libri XV*。克拉维斯的《原本》评注并不是简单的古典教科书的翻译和注释，他的目的不仅是要呈现欧几里得的理论，还要使它易于为人们所接受。为此目的，他为评注本设计了与原著不同的体例，并引入了与原著中不同的证明。在后来的版本中，他还加入了一些当时的新的研究成果及他自己的一些创造性工作，如对欧几里得第五公设的证明等。克拉维斯的这些著作作为教科书对16、17世纪欧洲数学的发展产生了深远的影响。①17世纪大数学家笛卡尔（Rene Descartes，1596—1690）、Pierre Gassendi等都曾在耶稣会学校中学习过克拉维斯编写的数学和天文学课本。另据William Wallace考证，1590年，伽利略在比萨讲课的教材就是克拉维斯1589年版的欧几里得的《原本》评注②。

除此之外，在科学仪器的制造方面，克拉维斯也是一位专家。几乎与伽利略同时，罗马神学院的天文学家也制造出了望远镜。所以，当伽利略发表了他利用望远镜观测到的结果时，罗马神学院的天文学家们立即对其给出了公正的评价。③克拉维斯关于日晷的著作也是当时极为流行的教材。

克拉维斯的另一项著名的事业是他始终支持托勒密（Claudius Ptolemy，去世于公元168年）和亚里士多德的宇宙体系，反对哥白尼的日心说。④ 但他同时又赞赏哥白尼和伽利略的工作，并将哥白尼的一些新成果引入托勒密体系。限于篇幅，此处我们无需详述克拉维斯关于天文学理论方面的观

---

① 关于克拉维斯的著作，参见：E. Knobloch. *L' oeuvre de Clavius et ses sources scientifiques*.

② Wallace, *Galileo and the Doctores Parisienses*. 227.

③ 克拉维斯和伽利略之间维持着长时间的友谊与联系。1610年3月，伽利略在其*Sidereal Messenger*中发表了他利用望远镜得到的新发现。1610年11月28日至1611年4月6日期间，克拉维斯及其在罗马学院的同事们利用望远镜观测木星的四个卫星，他们证实了伽利略观测的正确性。1610年12月17日，作为当时的天文学和数学权威，克拉维斯致信伽利略，通报他们的观测结果，并鼓励伽利略继续其研究。12月30日，伽利略复信表达他对克拉维斯所给予的支持的感谢。克拉维斯的对伽利略成果的证实，确实对伽利略成果的传播及被接受起到了很大的推动作用。C. Clavius, Cristoph Clavius a Galileo Galilei. *Cristoph Clavius: Corrispondenza*, V. VI. 157—158. Galileo Galilei, Galileo Galilei a Cristoph Clavius a Romal, *Cristoph Clavius: Corrispondenza*, V. VI. 159—162. 参阅：P. D'Elia, *Galileo in China*. 7—14.

④ 此处的托勒密体系并非指狭意的专指托勒密提出的理论，其中也包括了从托勒密到克拉维斯之间的天文学家，包括克拉维斯本人的贡献。

点。但此处有必要强调一点，1610年以前，没有任何观测数据表明哥白尼的理论是优于托勒密理论的。此外，亚里士多德的理论已深植于克拉维斯与他同时的学者们的头脑之中，而托勒密理论与亚里士多德的宇宙理论是一致的，这使得地球运动的理论对于他们是难以想像的。所以，在1610年伽利略发表其 *Sidereus nunicus* 之前，只有很少几个人接受了哥白尼的理论。①

一直到17世纪中叶，克拉维斯反对日心说的观点仍被多数耶稣会士所继承，与伽利略的论争成为克拉维斯去世后三十余年里耶稣会士科学家的重要工作。17世纪下半叶之后，耶稣会士科学家们的工作呈现出更强的多样性，并开始脱离了亚里士多德的理论体系。

克拉维斯的数学教科书、他的天文和测量仪器的制造知识，乃至他的反日心说理论都被他的学生们带到了中国。

三、耶稣会在华传教策略

从上文可以看出，在耶稣会士初到中国的16世纪末，数学还未得到耶稣会大学所普遍重视。那么，回到我们在本书序言中提到的问题，为什么耶稣会士要在中国传播数学科学呢？这与耶稣会士在华的传教策略有着密切的关系。

在中国的传教活动是耶稣会国际性传教事业的一个组成部分。早在该修会得到罗马教廷的书面认可之前，他们的亚洲传教事业便已现曙光。1540年3月16日，在葡萄牙国王约翰三世(John III)的敦请下，耶稣会最早的成员之一沙勿略(St. Francis Xavier，1506—1552)离开罗马，来到里斯本。1541年4月，他以“教皇特使”的身份奔赴亚洲，全权处理东方天主教事务。1542年5月，他抵达果阿，1549年8月，沙勿略到达日本，并在日本传教两年。1552年8月，他到达距广州30海里的上川岛，此后，他想尽办法欲进入中国内陆，终未如愿。同年12月，他病逝于上川岛。②虽然沙勿略从未踏足中国内陆，但他根据在日本的传教经验确立的“适应”的传教策略成为后来

---

① 托勒密的体系有着它自身的一致性和合理性。哥白尼学说不能被一些天文学家接受的一个原因是他的宇宙模型对制订历法没有什么贡献。哥白尼不像第谷那样既精于观测又擅长仪器制造。关于克拉维斯的天体理论的具体观点，参阅：James M. Lattis，*Between Copernicus and Galileo——Christoph Clavius and the Collapse of Ptolemaic Cosmology*.

② St. Francis Xavier，*Catholic Encyclopedia*. 1914.

耶稣会士在中国立稳脚跟的法宝。

鉴于天皇在日本享有至高无上的权威，沙勿略认为，只要能使天皇皈依天主教，便可归化日本全国民众。他还认为，学识丰富、道德高超及精通科学是能赢得东方人认可和尊重的重要素质，所以，他请求罗耀拉派遣具备这样素质的耶稣会士到东方。此外，他发现，只有用东方人本国的语言传教，他们的传教事业才能在东方取得进展，且为了得到上层人物的好感，沙勿略还将赠送礼品定为其东方传教策略的一个组成部分。①

几十年后，利玛窦身着儒服，操着流利的中文，带着自鸣钟、西洋琴等大大小小的礼物步入明朝宫廷。同时，他丰富的知识、严谨自律的生活态度及其对儒学的了解使得很多中国学者大为折服。正是这些，使得利玛窦及其同伴能够在中国长久居留。由此可见沙勿略的远见。

1577年，东印度耶稣会士巡察使范礼安(Alessandro Valignano，1538—1606)来到澳门。在其致耶稣会总会长的信中，他指出："进入中国惟一可行的方法"，"就是调整我们的策略，采取一种与迄今为止我们在其他国家完全不同的方法"②，也即是适应的传教方法。根据范礼安的指示，罗明坚(Michele Ruggieri，1543—1607)开始学习中国的语言文字，在借商贸之机赴广东时，他学习和遵守了中国的礼仪。其做法收到了良好的效果。当然，并非所有耶稣会士都赞同实行适应的传教政策。当时澳门的耶稣会会长便坚决反对这一政策。1582年，范礼安调走了该会长。同年，罗明坚和巴范济(Francesco Pasio，1551—1612)曾获准到广东肇庆居住，但不久即被遣返到澳门③。半年之后，罗明坚再次得到两广总督的批准，至广东肇庆定居。1582年9月10日，罗明坚带着利玛窦到达肇庆。

利玛窦，字西泰，1552年10月6日生于意大利玛切拉塔城(Macerata)。1561年，他进入故乡的耶稣会学校学习。1571年，他加入耶稣会，1572年9月，他进入耶稣会罗马神学院学习修辞学和哲学。当时，克拉维斯为该学院的数学教授。1577年5月8日，他离开罗马来到葡萄牙，在科英布拉大学继续他的学业。④1583年，身着佛教僧侣服饰的罗明坚和利玛窦在肇庆安顿下

① 张铠．庞迪我与中国．81—109．

② 引自：邓恩．从利玛窦到汤若望．3．

③ 罗明坚为此赠送给广东总督一座自鸣钟和一个三棱镜。见：沙百里．中国基督徒史．87．

④ 关于利玛窦所接受的教育，参见：Peter M．Engelfriet．*Euclid in China*．17—23．

来。

利玛窦始到肇庆，不急于传教，不贸然劝人崇奉天主，惟将从欧西所带来之各种奇巧物品，如自鸣钟、天文仪器、地理图、三棱镜、洋装书籍等等，陈列满室，任人参观而已。肇庆人士为好奇心所驱使，群相来观①。



徐光启与利玛窦

1589 年，他移居韶州。13 年后，学习了经学并对中国文化和社会有了进一步了解的利玛窦脱下僧服，换上儒装，并赁屋讲学。他甚至不公开做弥撒，完全隐藏了他来华目的②。由于认识到儒家学说及学者在社会上起到的重要作用，利玛窦开始认真钻研儒学。他认为：

把儒士派的大多数吸引到我们观点方面来具有很大好处，他们拥护孔夫子，

① 徐宗泽. 中国天主教传教史概论. 178.

② 利玛窦在写回欧洲的信中称："我想我们将不再开放教堂了，而只开放一所讲道的屋子，我们私下在一个礼拜堂举行弥撒，尽管我们接待来访者的客厅在目前可做弥撒；因为通过谈话要比举行公众崇拜仪式上的讲道，传布得更多而且成果更大。"见：汾屠立. 利玛窦神父的历史著作. 转引自：谢和耐. 中国文化与基督教的冲撞. 余硕，红涛，东方译. 辽宁人民出版社，1989. 4—5.

所以(我们)可以对孔夫子著作中所遗留下来的这种或那种不肯定的东西做出有利于我们的解释。这样一来,我们就可以博得儒士们的极大好感。①

为了吸引儒家学者,他按照中国士大夫的形象设计出他在欧洲的身份:“从幼慕道,年齿逾交,初未婚娶,都无系累……先于本国,忝与科名,已叨禄位。”②此外,他巧妙地重新解释了儒家经典中的一些含意不甚明确的章节,找到其中与天主教教义的结合点,在翻译和解释天主教教义时,他也试图借用儒家经典的概念以引发学者和士大夫对天主教教义的认同。他提出将天主教的GOD翻译为“天”或“上帝”便是他这一做法的一个具体例证。此外,在传播科学问题时,他也同样采取了折衷的方式。早在肇庆时,利玛窦的展品中的世界地图引起人们的很大兴趣。应肇庆知府王泮的要求,利玛窦于1584年自己绘制了一部中文版世界地图:《坤舆万国全图》③。图中,他不仅将长度单位改成了里,还将原图中“第一条子午线投影转移,在地图左右两边各留下一条边,使中国出现在他绘制的地图的中央”,以迎合中国人的中国为世界中心的观念④。

利玛窦以他过人的才智赢得了方方面面的尊敬。对于士人来说,他是学识丰富,道德高卓的谦谦儒者;对于想参加科举考试的举子来说,利玛窦讲解的记忆方面的技巧可以帮助他们取得科场成功;对于求财者来说,利玛窦被看作是点石成金的炼金术士;对于对外部世界有着好奇心的人来说,利玛窦为他们展示了来自欧洲的奇珍异品和异域知识。然而,当时很少有人能够了解耶稣会士来华的真正意图。对此,李贽(1527—1602)曾困惑地说:

利西泰(利玛窦)……住南海肇庆几二十载,凡我国书籍无不读,请先辈与订音释,请明于四书义理者解其大义,又请明于六经疏义者通其解说。今尽能言我此间之言,作此间之文字,行此间之礼仪,是一极标致人也。中极玲珑,外极朴实,数十人群聚喧杂,仇对各得,傍不得以其间斗使乱。我所见人未有其比……

但不知到此何为,我已经三度相会,毕竟不知到此何干也。意

---

① 利玛窦,金尼阁. 利玛窦中国札记·附录. 663.

② 利玛窦. 进呈奏表. 见:徐宗泽. 中国天主教传教史概论. 177.

③ 梁家勉. 徐光启年谱. 49.

④ 樊洪业. 耶稣会士与中国科学. 14.

其欲以所学易我周、孔之学,则又太愚,恐非是尔。①

可以看出,虽然利玛窦等小心翼翼地掩藏起其来华的真实目的,但李贽已有所猜测。然而,由于对中华正统文化有着太强的信心,他无法相信耶稣会士会真的试图以他们的学说来取代儒学②。

虽然利玛窦表现出对儒学的极大热诚,但对佛教和道教理论就没有这么客气了。由于当时的学者和士大夫普遍对佛学教理抱有轻视或反感的态度,1587年,万历帝还应礼部之请,禁止士子在科举考试中引用佛经。耶稣会士敏锐地抓住这一契机,向佛学开战。如此,则一方面可以博得儒家学者们的好评,另一方面,如能击垮当时在中国影响最大的宗教——佛教,便可为天主教在中国的传播建立起基础。作为极端排他的宗教的传布者,耶稣会士于此自然会不遗余力。利玛窦的《天主实义》(1584)中的理论虽不违反天主教教义,但由于书中引用了大量中国故有词汇及经籍中的典故和儒家理论,所以在儒家学者看来,该书与其说是一部阐释天主教教义的著作,毋宁说是一部反对佛学的论战书。③这使得该书在反对佛学的中国学者中颇受欢迎。利玛窦还写出了《交友论》(1595)、《二十五言》(1604)、《畸人十篇》(1608)等书。他在这些书中所阐述的道德规范与理学家的道德准则若合符节。这样,利玛窦俨然成就了一副儒家学者的气派。

但是,耶稣会士并不能完全靠他们的儒学知识征服中国士大夫。虽然他们的中文著作文笔优雅且引经据典,但这肯定得益于与他们相识的中国学者们的协助。实际上,他们所传授的欧洲科学、技术和艺术等知识对士大夫们有更大的吸引力④,而使他们得以在北京立足的,则是他们进贡给皇帝的自鸣钟和西洋琴。

---

① 李贽. 续焚书. 中华书局,1975. 35.

② 在华耶稣会士的这种传教方式并不违背耶稣会的章程。罗耀拉的《苦修箴言》中写到:"由于人们完全沉浸在一时的利益之中,因此,不要毫无准备地和他们谈他们的心灵,那样做,无异于无饵之钩,空杆垂钓。"转引自:耶稣会密史. 28.

③ 利玛窦. 天主实义. 天学初函本.

④ 当代耶稣会士史学家邓恩并不否认这样的事实,他称:"许多有价值的友谊、道德是因为利玛窦的声誉和其他传教士教授新的科学真理而赢得的。许多对于有着宗教教师声望的利玛窦可能会持冷漠态度的中国学者,但是面对一位著名的科学大师,利玛窦的力量却是不可抵御的。这样的事情是经常发生的,即如果在科学方面有了共同兴趣的蓓蕾,很容易开出共同信仰的花朵。即使圆满的结果没有成为现实,至少能为信仰赢得富于同情心的帮助与保护。"见:邓恩. 从利玛窦到汤若望. 30.

1598年9月7日,利玛窦随南京的礼部尚书王忠铭初次踏足北京。王忠铭本欲通过举荐利玛窦参与历法改革而得到朝廷的重视①,但他没有成功。利玛窦无法在北京久住,回到南方。三年后,利玛窦再次北上。1601年1月24日,利玛窦与庞迪我(Diego de Pantoja,1571—1618)历尽艰辛,来到北京。第二天,他们将一批从东方各传教区筹集来的礼品作为贡物呈献给万历帝。据其奏疏,他上的贡品有:

> 天帝图像一幅、天帝母图像二幅、天帝经一本、珍珠镶嵌十字架一座、报时钟二架、万国舆图一册、西琴一张等。②

在上述物品中,引起万历帝兴趣的是两座西洋钟(当时称为自鸣钟)及一张西洋琴。两座自鸣钟都是出自欧洲宫廷杰出匠人之手,其中较小的一座还用了纯金。万历帝将它们视为天下奇物。然而,自鸣钟需要经常维护调整,8天后,它停转了。这样,万历帝便不得不召利玛窦和庞迪我入宫,对自鸣钟进行调理。同时,他派太监去向利玛窦和庞迪我学习调理自鸣钟和演奏西洋琴的方法。由于万历帝对自鸣钟的喜爱,爱屋及乌地也对利玛窦等产生了好感。他派太监们问二位神甫,他们是想做官还是愿意封爵。二位神甫当即回答:"他们不愿为官,也不愿承袭爵位,而只想在皇帝的恩准下,在北京住下来,修炼上帝的法律。"③同时,太监们也惟恐在二位神甫走后,一旦自鸣钟真的出了他们不能解决的故障,他们将无法向皇帝交待,于是竭力促成此事。很可能正是基于这个原因,虽然礼部屡次上折希望万历帝将神甫们请出北京,但他们还是幸运地得到了在北京居住的权利,且得以经常出入紫禁城。这大大地提高了二位神甫的地位,也使得他们能够更为顺利地实施其皈化上层人士的传教策略。④

到1605年,北京皈依天主教的中国人有一百余人,加上南京、南昌和韶州三个会院的皈化者,中国信奉天主教的人数已达1 000人⑤。据徐宗泽估计,到利玛窦去世的1610年,中国已约有2500名⑥。利玛窦去世后,耶稣会

---

① 裴化行. 天主教传行中国考. 民国丛书本. 126.
② 利玛窦. 利玛窦全集. 第四册. 549—552.
③ 张铠. 庞迪我与中国. 北京图书馆出版社,1997. 80.
④ 关于这一段历史,详见:张铠. 庞迪我与中国.
⑤ 利玛窦. 利玛窦全集. 4. 265.
⑥ 徐宗泽的统计未必可以尽信。他在所列的信奉天主教的著名人士的名单中的冯应京未曾入教。见:徐宗泽. 中国天主教史概论. 186.

中国传教区的工作由龙华民(Niccolò Longobardo,1559—1654)负责。

第三节　西方数学知识在明代末年的传播

明末最早在中国传播欧洲数学知识的是利玛窦,他最早发现中国学者对数学科学的兴趣,并决定以此作为吸引儒家士大夫们的诱饵。在他的呼吁下,一批精通天文学和数学的耶稣会士,如邓玉函、汤若望等被派到中国,参与了中国的历法改革及西洋火炮的制造工作,并藉此在中国立稳脚跟。

一、利玛窦与欧洲数学知识在中国的传播

16~17世纪,欧洲的数学科学所涉及的研究内容与我们现在的数学并不完全相同。天文学理论、地图绘制、仪器制作等都属于数学科学的研究范围。这与中国在20世纪初之前对数学的认识是大体相当的。本书中所讨论的数学是现代意义上狭义的数学,这里说的欧洲数学知识,也主要指符合现代意义下的数学概念的知识。

在来华前,在克拉维斯的指导下,利玛窦较为系统地学习了欧洲数学知识。当时罗马神学院的数学科学课程表为:

第一年,算术(全年);

第二年,《几何原本》前4卷(四个月),实用算术(一个半月),地球仪(两个半月),地理学(两个月)《几何原本》第5、6卷(其余时间);

第三年,古观测仪(两个月),行星论(四个月),透视画法(三个月),钟表及与宗教活动有关的计算问题(其余时间)。①

通过这些课程的学习,利玛窦在数学科学方面打下了较为坚实的基础,并在进入中国内陆不久,便亮出其在地图学、天文学、仪器制造及数学等方面的全副本领,以吸引周围的中国人。正可谓生逢其时,在1583年利玛窦随罗明坚来到肇庆之前,钦天监已屡次对日、月食推测失准,钦天监官员也因此迭遭万历帝的处罚。万历十五年(1588),礼部奏:

> ……历自洪武迄今二百二十年未尝更造,年远数盈,渐差天

---

① 小野中重.マォう·リゥテと支那科学.引自:樊洪业.耶稣会士与中国科学.5.该课表的内容与前文教学指导文件大致一致。但它似应为哲学系学生有关数学科学的课程表,而不是当时罗马神学院的完整课程表。

> 度。迩者，月食在酉而日戌，月食将既而日未，九分差舛，甚矣！即一交食而气朔、馀闰、躔食、朓朒之类，尽属差舛可知。诏求天下深明历理，究心天道，博采群书，随时考验。且该监官有回回历科，其推算日食交食及五星凌犯，最为精细。曩者月食分秒并不差舛，只以原非《大统历》法，遂置不用。臣以为，《授时历》可采，《回回历》亦可采。取其能合天度。如果吻合，即将采入《大统历》中，以成一朝之制。①

该奏疏明确要求于全国访求深知历法之人，这样，虽然私习历法之禁未废，但实质上已不再具有约束力。同时，奏文指出，当时的《大统历》本为元代《授时历》，动摇了“祖宗成法”的牢不可破的地位，从而将《授时历》与《回回历》置于同样的地位，更进一步，礼部奏撰中指出，可以借鉴《回回历》进行历法改革。《回回历》本是来自阿拉伯地区的历法，既然《回回历》可用，则没有理由说西洋历法必不可用。我们不知道利玛窦当时是否或何时获悉了上述奏稿的内容，并确立了利用传播天文、数学知识作为在华传教的敲门砖的方针。但随着历法改革的迫切性日趋明显，通过与其相识的学者和各类官员，利玛窦完全可能了解到这一情况。借助葡萄牙文的日历和期刊，利玛窦多次预测了日、月食，其结果较钦天监的预测结果更为准确。这使得利玛窦声名大震②。此外，礼部奏稿显露出来的皇家对历法制订政策的转变，无疑可能引起中国士子对天文及与之密切相关的数学知识的重视，同时，也会使他们对利玛窦引入的新知识产生兴趣。

在前文中，我们已提到利玛窦绘制的中文版世界地图引起的成功。在此之后，他制造出天球仪和地球仪，同时，传授笔算、几何等数学知识。1589年，他搬到韶州时，寓居南雄的瞿汝夔风闻利玛窦精通炼金术，便前来求教。正是在他的建议下，利玛窦才决定将其一身僧侣打扮更换为儒家学者的装束。从此，瞿改弦从利玛窦学习数学科学，成为第一个对利玛窦传授的欧洲科学知识产生浓厚兴趣并认真学习这些知识的中国学者。在1592年前后，瞿汝夔曾试图将欧几里得《原本》翻译成中文，但只译成一卷便即告辍。③

---

① 神宗实录. 卷184. 533.

② 利玛窦. 利玛窦至若昂·阿尔瓦斯雷(João Alvares). 邓恩. 从利玛窦到汤若望. 193.

③ 见：利玛窦，金尼阁. 利玛窦中国札记. 246—247.

1598年,王忠铭主动提出带利玛窦到北京参与历法修订。虽然当时利玛窦无法在京立足,但这无疑传递给他这样一个信息:天文、数学知识是可以帮助他进入北京的。利玛窦于1599年初折回南京,在南京结识了一批重要人物,其中包括叶向高(1559—1627)、李贽等。虽然他必须花费大量时间与士人交往,讲解其天主教道德伦理,但他还是拿出很多时间自制了浑天仪、天球仪、四分仪和六分仪等天文仪器,并讲授数学科学知识。当时金坛人王肯堂(1549—1613)对利玛窦传授的科学知识非常感兴趣,并派其学生张养默向利玛窦学习。张自学了《原本》第一卷,并不断向利玛窦请教几何学问题[①]。1600年,徐光启进京赶考,途经南京时,他结识了利玛窦。[②]

1601年,利玛窦二次进京,在向皇帝进呈方物的奏文中, 他称:

> 天地图及度数,深测其秘;制器观象,考验日晷,并与中国古法吻合。倘蒙皇上不弃疏微,令臣得尽其愚,披露于至尊之前,斯又区区之大愿。[③]

表现出其参与历法制订的愿望。虽然当时万历帝并未表现出对西方历法知识的兴趣。但日后,耶稣会士还是借这条途径进入了中国宫廷并得以在中国立足。

1601年,利玛窦和庞迪我在北京安顿下来。当时,李之藻正在北京。他与朋友一起访问了利玛窦,对他绘制的《坤舆万国全图》及其讲授的天文学和其他科学知识产生了浓厚的兴趣。此后,他便随利玛窦学习欧洲数学。1605年,他与利玛窦合译了《浑盖通宪图说》。1604年,徐光启中进士并进入翰林院,徐光启对利玛窦"间游从请益"[④],"每布衣徒步,晤于邸舍,讲究精密,承问冲虚"[⑤]。

1606年秋天,徐光启与利玛窦谈及数学,利玛窦因述欧几里得的*Elements*之精,并称"此书未译,则他书俱不可得",且陈"翻译之难及向来中辍状",徐光启慨然决定自任其艰[⑥]。1607年, 全书译成刊刻。这便是欧洲

---

① 见:利玛窦, 金尼阁. 利玛窦中国札记. 351.

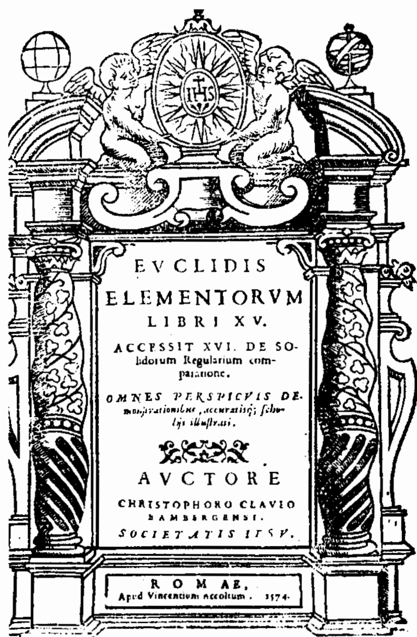
② 此前,徐光启已见过赵可怀与吴中明先后刊刻的利玛窦世界地图。

③ 利玛窦. 进呈方物表. 见:徐宗泽. 中国天主教传教史概论. 177.

④ 徐光启. 跋二十五言. 二十五言. 天学初函本. 1b.

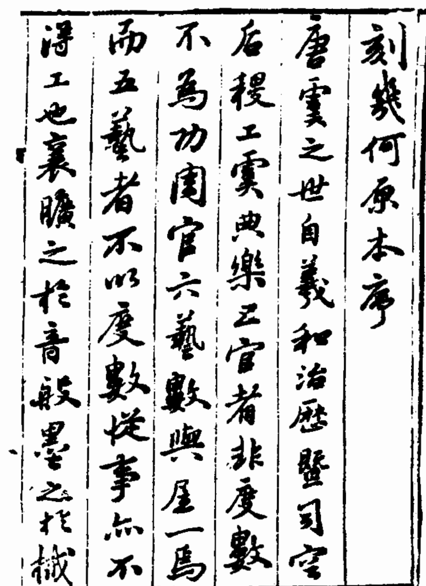
⑤ 茅元仪. 与徐玄扈赞善书一. 转引自:梁家勉. 徐光启年谱. 72.

⑥ 梁家勉. 徐光启年谱. 81.



EVCLIDIS
ELEMENTORVM
LIBRI XV.
ACCESSIT XVI. DE SOlidorum Regularium comparatione.
OMNES PERSPICVIS DEmonstrationibus, accuratisq; scholijs illustrati.
AVCTORE
CHRISTOPHORO CLAVIO
BAMBERGENSI.
SOCIETATIS IESV.
ROMAE,
Apud Vincentium Accoltum. 1574.

克拉维斯所著的拉丁文评注本封面



刻幾何原本序
唐虞之世自羲和治歷暨司空
后稷工虞典樂五官者非度數
不爲功周官六藝數與居一焉
而五藝者不以度數從事亦不
得工也襄曠之於音般墨之於械

《几何原本》书影

数学在中国传播史上的名著:《几何原本》前六卷的由来。① 利玛窦与徐光启所译的《几何原本》是以克拉维斯的 15 卷拉丁文评注本(*Euclidis Elementorum Libri XV*, 1574)为底本的。其翻译的方式,用徐光启的话来说是:由利氏“口传,自以笔授焉,反复辗转,求和本书之意。以中夏之文重复

---

① 实际上,早在元代,《几何原本》可能已传入中国。元《秘书监志》卷七“回回书籍(阿拉伯文书籍)”载,至元十年(1273)司天台“见合用经”中有一部《兀忽列的四擗算法段数十五部》。13 世纪,蒙古人的征战使中国与阿拉伯之间有了更广泛的接触,忽必烈(1215—1294)之弟旭列兀(1219—1265)在中亚建立伊儿汗国,其首席科学顾问纳速剌丁·徒思(Nasir - Eddin, 1201—1274)于 1248 年完成了 15 卷的阿拉伯文《原本》修订本。《兀忽列的四擗算法段数十五部》很有可能即是该本的抄本(见:严敦杰. 欧几里得《几何原本》元朝传入中国说。东方杂志. 1943, 39(13))。《几何原本》中的“几何”并不是 geometry,即几何学的译名。在中国古汉语中,“几何”意为多少,传统数学著作中的算题通常以“几何”一词设问。利玛窦和徐光启的“几何”意为数学。在《译几何原本引》中,利玛窦称“几何”可分为“数”与“度”,其中“数”为数值运算问题,而度为现代意义下的几何(利玛窦. 译几何原本引. 1b)。这种数学分类的方法对中国明清数学影响很大,清初数学家方中通曾撰《数度衍》,梅文鼎亦是在这一分类的基础上研究数学及探讨中、西数学的关系的。18 世纪,法国传教士在向康熙讲授数学时将法国数学家巴蒂的一部讲授欧几里得几何学的著作翻译成中文,在该书中,“几何”的意义与现代意义是一致的。

订正,凡三易稿"①。也就是说,由利玛窦口头翻译,徐光启记录,然后,两人共同研究译文,再由徐光启将译文中的内容与传统中国文献对照②,做重新修改后成文。③

《几何原本》前六卷,卷一包括几何概念的定义、公设、公理和命题;卷二利用几何的形式叙述代数问题;卷三讨论圆、弦、切线、圆周角、内接四边形及与圆有关的图形;卷四讨论圆内接与外切三角形、正方形、正多边形;卷五介绍数值比例算法;卷六为几何量的比例算法,处理相似直线形中的各种成比例的线段等。此六卷主要论述平面几何学。前六卷译成之后,徐光启"意方锐,欲竟之",有意译成全帙,但利玛窦认为应"先传此,使同志者习之,果以为用也,而后徐计其馀"④。对于此中原因,中国学者曾有多种猜测。据梅荣照、王渝生、刘钝分析,利玛窦只译《几何原本》前六卷的原因主要有二:首先,作为耶稣会士,利氏来中国的主旨乃为传教,传播科学知识的工作只能放在从属地位。其次,从《几何原本》的内容来看,前六卷基本上自成体系。在西方除十三卷和十五卷两种足本外,亦有多种六卷本流传。最早的德译本（1562)和瑞典译本（1744）亦为六卷本。⑤这一推断是合乎情理的。但利玛窦坚持只译前六卷可能还有另一个原因,即,他在罗马神学院中只学习了《原本》的前六卷。前文已经引述,罗马神学院数学教师的职责中,明确规定有讲授《原本》前六卷一项,利玛窦在学时该校课程中也明确标注《原本》前六卷。所以,他很有可能认为没有必要翻译超出罗马神学院教学内容

---

① 徐宗泽. 明清间耶稣会士译著题要. 262.

② 徐光启的原文中对这一点说得并不清楚,只称"与中夏之文相订正"。但《几何原本》中选用的词汇中,有不少是中国传统数学中已有的词汇,可见,这个"中夏文"不仅仅是指在语言文字上的订正,还应有数学文献方面的参照。利玛窦并未认真研究过中国传统数学(详下文),这部分工作应该是由徐光启完成的。

③ 这种译述方式一直延续到 19 世纪末,比如伟烈亚力和李善兰及傅兰雅和华衡芳也是以这样的西方人口授,中国人笔授的方式翻译科学和技术方面的著作的。但这一方法并非利玛窦和徐光启的首创。实际上,明代初期对伊斯兰天文学著作的翻译也是采取这样的方式。关于当时的翻译方式,有材料给出了详细的指示和说明:"遂召钦天监灵台郎臣海达儿臣阿荅兀丁因因大师、臣马沙亦墨、臣马哈麻等咸至于廷,出所藏书,择其言天文阴阳历象者次第译之。且命之曰尔西域人素习本音,兼通华语,其口以授儒,尔儒译其义缉成文焉。惟直述,毋藻绘、毋忽。"引自:阮元:畴人传. 卷 29. 2b.

④ 利玛窦. 译几何原本引.

⑤ 梅荣照, 王渝生, 刘钝. 欧几里得《原本》的传入和对我国明清数学的影响. 明清数学史论文集. 江苏教育出版社,1990. 53—83.

的部分，又或者，他自己对后九卷《几何原本》的翻译力有不逮。1607 年，《原本》前六卷的中译本以《几何原本》为名在北京刊印。

《几何原本》是古希腊演绎体系的典范性著作，在数学史上占有不容置疑的崇高地位。但其中内容与当时中国所急需的历法制订及治水、农业耕种等实用知识则并没有直接的关系。利玛窦何以如此看重《几何原本》，以至于称“此书未译，则他书俱不可得”呢？在《几何原本》的序言中，利玛窦从三个方面叙述了翻译《几何原本》的意义。其一：

> 夫儒者之学，亟致其知，致其知，当由明达物理耳。物理渺隐，人才顽昏，不因既明累推其未明，吾知奚至哉。吾西陬国虽褊小，而其庠校所业格物穷理之法，视诸列邦为独备焉。故审究物理之书极繁富也。彼士立论，宗旨惟尚理之所据，弗取人之所意。盖曰，理之审，乃令我知，若夫人之意，又令我意耳。知之谓谓，无疑焉，而意犹兼疑也。然虚理隐理之论，虽据有真指，而释疑不尽者，尚可以他理驳焉，能引人以是之而不能使人信其无或非也，独实理者。明理者剖散心疑，能强人不得不是之，不复有理以疵之，其所致之知，且深且固，则无有若几何一家者矣。

即，几何学所依据的是令人无法辩驳的实理，其中的知识完全符合儒家学说的知识规范。借此，利玛窦明确宣称：西方知识均属理性的学术范畴。其二，利用几何学可以解决世用所需的一切问题，即，“此道所关世用致广至急也”。如，量天地之大，其中包括各重天之厚薄、日月星体去地远近、地球围径道理之数、山岳与楼台之高、井谷之深、两地相距之远近，土田城郭宫室之广袤、廪庾大器之容藏等等；测景以明四时之候，昼夜之长短，日出入之辰，以定天地方位，岁首三朝，分至启闭之期，闰月之年，闰日之用也；造器以仪天地、以审七政次舍、以演八音、以自鸣知时，以便民用、以祭上帝也；经理水土木石诸工，筑城郭，作为楼台宫殿上栋下宇；疏河注泉，造作桥梁如是诸等营建；制机巧，用小力转大重，升高致远以运刍粮以便泄注，干水地水乾地，以上下舫舶如是诸等机器等等。其三，《几何原本》是一部“确而当”的著作，专“明几何之所以然”。该书“题论之首，先标界说，次设公论题论所据，次乃具题，题有本解、有作法、有推论，先之所徵必后之所恃，十三卷中，五百余题一脉贯通，卷与卷、题与题相结倚，一先不可后，一后不可先，累累交承，至终不绝也。初言实理，至易至明，渐次积累，终竟乃发奥微之义”。“千百年来，非无好胜强辩之士，终身力索，不能议其只字。若夫从事几何之学者，虽神

明天纵,不得不藉此为阶梯焉。此书未达,而欲坐进其道,非但学者无所措其意,即教者亦无所措其口也"①。

利玛窦所强调的三方面中,第一方面与第三方面实为表里。其中,第三方面首先得到了一些明末士大夫的理解。《几何原本》是第一部传入中国的系统阐述西方数学的书籍,其严密的逻辑推理体系和严谨的结构虽然一时未能被多数中国学者所理解和认同,但还是引起了明代学者广泛的重视。此书对明末清初的数学研究产生了很大影响,也为利玛窦等西方传教士带来了很高的声誉。徐光启完全理解了《几何原本》的演绎结构及其中的数学理论。他称:"《几何原本》者,度数之宗,所以穷方圆平直之情,尽规矩准绳之用也。"②对"此书有四不必,不必疑,不必揣,不必试,不必改。有四不可得,欲脱之不可得,欲驳之不可得,欲减之不可得,欲前后更置之不可得"③。利玛窦去世后,明神宗赐葬,有内官问一力促成此事的东阁大学士叶向高曰:"诸远方来宾者,从古皆无赐葬,何独厚于利子?"叶答曰:"子见从古来宾,其道德学问,有一如利子者乎? 姑无论其它,即其所译《几何原本》一书,即宜钦赐葬地矣。"④可见当时《几何原本》所取得的成功。至清乾嘉时期,西方数学内容已得到较好的吸收与理解,《四库全书·〈几何原本〉题要》称,"其书每卷有界说,有公论,有设题","又每题有法有解,有论有系。法言题用,解述题意,论则发明其所以然之理,系则又有旁通者焉。卷一论三角形,卷二论线,卷三论圆,卷四论圆内外形,卷五、卷六俱论比例,其余三角方圆,边线面积比例变化相生之义,无不曲折尽显,纤微毕露。光启称其穷方圆平直之情,尽规矩准绳之用,非虚语也"⑤。关于几何学对实用技术的指导作用,在《几何原本》译成之后,利玛窦和徐光启又译成了《测量法义》专门讲解几何方法在测量中的应用。在此之后,徐光启又与熊三拔合译了《泰西水法》,该书利用几何学讲解水利知识,亦属利玛窦所列举的几何学的用途之一。

关于利玛窦翻译的《几何原本》还有两点值得关注,第一,在克拉维斯的评注本中,克氏加入了大量的注释。这些注释中包括当时欧洲数学家及克

① 利玛窦. 译几何原本引. 几何原本. 天学初函本. 2a—6a.
② 徐光启. 几何原本序. 几何原本. 天学初函本. 2a.
③ 徐光启. 几何原本杂议. 几何原本. 天学初函本. 1b.
④ 方豪. 中西交通史. 732.
⑤ 纪昀,陆锡熊,孙士毅,陆费墀. 四库提要·几何原本提要. 几何原本. 四库全书本.

拉维斯本人的一些最新研究成果、欧洲数学界关于一些问题的争论等。此外，克拉维斯加入了大量的具体算例，在这些算例中，他对欧几里得原书很多命题中的量赋予了具体的数值。这些算例与中国传统数学著作中的算题非常相近。利玛窦和徐光启虽然翻译了部分解释性的注文，但删去了含具体数字的算例。如果《几何原本》中含有这些评注，便会使学习过中国数学的学者产生认同感，并有利于他们的学习。克拉维斯加入这些算例的目的之一便是使欧几里得的原著更适于教学用途。①利玛窦删去这些内容的目的很值得我们思考。至少我们可以推断，在中国传播欧洲数学方法和知识并不是利玛窦翻译《几何原本》的真正动机。《几何原本》以其严密的逻辑推理和严谨的证明体系而著称，读者可以自己证明其中知识的真实性，利玛窦很可能想通过可以由学习者自己检验其真伪性的欧几里得几何学来体现一个无法被直接验证的领域——天主教的可信性。正如谢和耐所分析的，"科学充当了诱饵的作用。但科学也同时带去了更多的有关圣教真诠的证据。基督教在理智方面是有根有据的"②。在这个方面，利玛窦并不需要关心该书中的内容与中国传统数学知识及其表述形式的相通性。很可能由于理学的影响，明代学者对于理论及学术意义上的知识探讨有着浓厚的兴趣，正是这一点使得与中国传统数学体系完全不同的《几何原本》轻易地得到了学者们的认可和赞赏。此外，在《几何原本》序言中，利玛窦给出的几何学在欧洲的流传过程及其地位的描述是理想化的，参照上文中对克拉维斯关于提高数学在耶稣会教育中的地位的论述，我们发现，利玛窦的叙述并不真实。然而，为了达到其借助数学真理阐释宗教理论的目的，他必须让中国学者们认为，数学自古在欧洲有着很高的学术地位，其证明的确定性从未有受到过质疑。

1607年，徐光启又与利玛窦共译《测量法义》(1608年定稿)。此后，徐光启通过对他所了解的传统测量和几何方法与《测量法义》中的方法的比较，撰成《测量异同》和《句股义》(1609)。③

1608年，利玛窦与李之藻合作完成了《圜容较义》④。该书主要介绍比

---

① 参见：Peter M. Engelfriet. *Euclid in China*. 105—114.

② 谢和耐. 中国与基督教. 耿升译. 王元化主编. 海外汉学丛书. 87—88.

③ 在中国古代数学著作中，"句"通"勾"。因此，本书在引文中仍须用"句股"，而在本书作者自己的叙述中则用"勾股"。

④ 该书题称："利玛窦授，李之藻演。"

较图形关系的几何学。书中论述了多边形之间、多边形与圆之间、锥体与棱柱体之间、正多面体之间、浑圆与正多面体之间的关系，并得出结论：周长相同，则边长相等的正多边形面积恒大于边长不等的多边形面积；边数较多的正多边形面积恒大于边数较少的正多边形面积，由此，圆的面积为最大。同样可以得到，表面积相同的立体中球的体积最大。这些结论是由公元前 2 世纪希腊数学家季诺多鲁斯发现并为公元 3 世纪派帕司保留下来的。到 16 世纪初的欧洲，这门知识又得到进一步的发展[①]。《圜容较义》的结构及证明方式与《几何原本》完全相同，在全书的证明中大量引用了《几何原本》中的定理。《圜容较义》卷首给出的一般性定理：周长相同，则边长相等的正多边形面积恒大于边长不等的多边形面积。对于该定理，书中仅以三角形和四边形为例解释了该定理的正确性，并以含具体数字的算例对该定理做了说明。[②]

利玛窦去世后，李之藻整理他随利玛窦学习的笔算知识，综合明程大位的数学著作《算法统宗》编成《同文算指》(1613)[③]。据考证，书中的笔算知识主要来自克拉维斯于 1585 年编成的《实用算术概论》(*Epitome Arithmeticae Practicae*)[④]。该书编成的时间虽在利玛窦来华之后，但克拉维斯在罗马神学院的教学中很可能已传授了相关内容。《同文算指》介绍

刻同文算指序
數之原其與生人俱來乎始於一終於十
十指象之屈而計諸不可勝用也五方萬
國風習千變至于算數無弗同者十指之
賅存無弗同耳我中夏自黃帝命隸首作
算以佐容成至周大備周公用之列於學
官以取士賓興賢能而官使之孔門弟子

《同文算旨》书影

① 参见：钱宝琮：《中国数学史》，科学出版社，238.

② 利玛窦授，李之藻演．圜容较义．

③ 《同文算指》分“前编”、“通编”和“别编”三个部分。从序言中看，1613 年，“前编”、“通编”均已编成，而“别编”未提成稿年月。

④ 见：钱宝琮：《中国数学史》，科学出版社，236.

的计算方式与现代笔算方法非常接近。此后，笔算数学逐渐在学者中得到普及，该书实开其先。书中“前编“主要论整数及分数的四则运算，其中，加法、减法、乘法与分数除法和现今的运算方法基本上相同。整数除法是15世纪末意大利数学家应用的“削减法”，十分繁复。该编中还含有关于分数记法的叙述。李之藻把分母置于分数线之上，分子置于分数线之下。这种记法与中国古代筹算记法及欧洲笔算记法相反。一直到19世纪末之后，人们才开始使用现代的分数记法。“通编”的内容有比例(包括正比例、反比例和复比)，比例分配、盈不足问题、级数(包括等差级数和等比级数)、多元一次方程组、开方(包括开平方、立方与多乘方)与带从开平方等。其中多元一次方程组、开带从平方与开多乘方是克拉维斯原书中所没有的。所有这些，都没有超出中国古代数学的范围。但考虑到当时一些传统数学方法已经不再被中国数学家和学者们所理解，多数传统数学著作已很难得见。在此基础上，李之藻和徐光启得出西方计算方法比传统计算法更有优势的结论。此外，“通编还辑入《算法统宗》中一些难题，以及徐光启的《句股义》与利玛窦和徐光启合译的《测量法义》等书的内容。“别编”只有“截圜弦算”一节①。

以上便是利玛窦向中国学者介绍的数学知识。这些内容基本上是他在罗马神学院学习的内容。利玛窦对中国的数学科学知识并不像对中国的儒学知识那样有耐心。在评论中国的历法时，他称：

> 皇上为每年的编历，雇用了估计有二百多人来做这项工作，开支很大。这项工作由两个机构的人来完成，一个机构使用的是中国的标准，编好后的结果肯定是错误，但是比较受重视。另一个机构，知名度略低，用的是回历系统编历，虽然它在测日月食方面更准确一些，但还是不理想。这两班人都住在宫外。还有两组由太监组成的编历人员住在宫内。在南京，还有两班人马做这项工作。其中有不少学者型官员。在一套不科学的系统之下工作，他们不会取得任何成果。②

文中，在对中国历法的计算系统未做具体研究的情况下，利玛窦做出了它“不科学”的论断，并称其预测结果“肯定是错误”的。在谈到中国的珠算术

① 见：钱宝琮，《中国数学史》，327.

② 利玛窦．至若昂·阿尔瓦斯雷．邓恩．从利玛窦到汤若望．192—193.

时，他称：

> 我们的算术……远比他们的简单而有系统。他们的算术不过是以串在绳子上的珠子构成的一个工具进行运算的，既不用笔也不用纸；这个方法虽然可靠，但它容易犯错，可以说它是微不足道的。[①]

显然，利玛窦对当时中国的主要计算工具算盘也是毫无所知的。詹嘉玲认为，"没有证据表明利玛窦曾研究中国的数学或其他科学著作，以使其成为新知识的潜在来源。事实上，如果利玛窦及其追随者能够以欧洲人在文艺复兴之后对重新发现的希腊文献的方式认真地看待中国文献，他们便会从中发现在当时的欧洲尚未被发现的成果与方法。他们的这种忽视正是由他们在中国为自己所界定的角色所决定的：他们是教师，不是学生。与此相应，他们留下来的文献所叙述的也只是他们的学生在如何向他们学习，而不是他们自己如何学习在中国生存所必须的知识"[②]。詹嘉玲的论述表现出她对耶稣会士留下的文献在研究中国16世纪末至18世纪历史的代表性的质疑。

从另一个角度来看，利玛窦的做法是很好理解的。他是来中国传教的，不是来学习知识的。诚然，他在研究儒家古代经典方面比很多中国学者倾注了更多的心力。那是因为在意识到理学中的无神论观点与其欲传播的宗教的不相容性之后，他要通过对更古老的文献的研究来找到儒家学理与其教义之间的共通性，以达到使儒家学者士大夫对天主教认同的目的。[③] 但在数学科学方面，这样的要求并不存在。因为在中国传统中，数学一直处于从属的地位，虽然它与民生日用密切相关，但却无关乎儒家的伦理道德，所以，数学经典也就不可能拥有儒学经典那样的地位。但无论如何，在没有理解中国传统数学方法和历法计算体系的情况下，利玛窦便妄自评论其科学性或重要性则表现出他在数学科学方面的自负。在当时的历史条件下，利玛窦的自负是不难理解的。从当时对日、月食预测的结果来看，欧洲的天文计算方法确实是比中国的计算方法更为准确。所以，中国传统的数学方法

---

① 引自：詹嘉玲. 是"在中国的欧洲科学"还是"西学". 425.

② 詹嘉玲. 是"在中国的欧洲科学"还是"西学". 425.

③ 从另一个方面来看，基于宗教的普适性的观念，耶稣会士们很可能真的相信能够在中国古典文献中找到有关上帝存在的蛛丝马迹。这也是引起欧洲学者对中国经典文献的重视的一个原因。

对于利玛窦等来说实在是不必学的。同时,大多数中国传统数学著作在当时已很难见到,而当时的钦天监官员甚至连职司所系的中国传统历法计算体系都搞不懂。我们确实无法苛求传教士们去研究一种与他们自己的知识体系完全不同的数学或历法计算体系。

利玛窦对欧洲数学在中国传播的另一贡献是他多次呼吁罗马耶稣会会长及教廷派遣精通天文学和数学的传教士到中国来,并反复申明此举的重要意义。在1603年他写给耶稣会总会长的信中,利玛窦称:

> 我向尊敬的阁下提出一项请求。这项请求好多年前我就提过,但是没有得到答复。派一名在天文学方面有造诣的神父或修士来北京。这是我们最急需的。我之所以要天文学家,因为至今为止,我在几何学、钟表学和星盘方面的知识还够用,我也有这方面的书籍,但是中国人在这方面的知识的需求没有在天体现象方面的需求多,诸如对日、月食现象的计算。还特别需要能编历书的人……因为我制作了世界地图、钟表、地球仪、星盘和其他一些仪器,我得到了世界上最伟大的数学家的声誉。尽管我没有天文学方面的书籍,我借助葡萄牙文的日历和期刊来预测日、月食现象的发生,在准确性上还是要比他们强得多。我告诉他们,因为我没有天文学方面的书籍,不想承担修历的工作,但是他们不相信。出于这些理由,如果我要的这样的数学家能来的话,我们就能将我们的历书译成中文,我可以做翻译的工作。然后,我们就能接手修历的工作。修历的工作将会提高我们的声誉,还会让我们有更多的机会进入中国,给我们的安全、自由带来保障。①

在1605年5月10日向罗马的报告中,利玛窦又称,现在只好用数学来笼络中国的人心。②1618年4月16日,金尼阁(Nicolas Trigault,1577—1628)带着他招募的22名耶稣会士及其募集来的大批物品从里斯本出发向远东航行。

---

① 利玛窦.至若昂·阿尔瓦斯雷.见:邓恩.从利玛窦到汤若望.192—193.

② 利玛窦通讯集.第二卷.玛塞来塔印本,1911.275—276.转引自:钱宝琮.中国数学史.235.一百多年之后,巴多明(Dominique Parrenin, 1665—1741)更为清楚地说:"为了赢得他们的注意,则必须在他们的思想中赢得信任。通过他们大都不懂并以非常好奇的心情钻研的自然事物的知识而博得他们的尊重,再没有比这种办法更容易使他们倾向理解我们的基督教神圣真诠了。"巴多明.书简.耶稣会士书简集.转引自:谢和耐.中国与基督教.耿升译.王元化主编.海外汉学丛书.87.

这22名耶稣会士中只有8名后来进入了中国内陆。其中包括邓玉函、汤若望和罗雅谷。关于他们的情况,我们在下面介绍。

二、耶稣会士传教方式的转变对欧洲数学在中国传播的影响

利玛窦去世后,龙华民接替他负责耶稣会在中国的传教事业。龙华民并不赞同利玛窦的适应的传教方针。他一直很注意在下层民众间的活动。他这样的传教方式曾取得了较为显著的效果,他在肇庆的短短三四年中就为三百余人施洗[①]。但他的活动很快引起了中国官府的警觉及民众的怀疑。龙华民曾在韶州被控通奸。同时,当地盛传耶稣会士要勾结葡萄牙人、荷兰人和日本人攻击中国,郭居静是入侵军队的领导及中国被征服后的统治者。虽然上述指控和谣言都被证明是不实的,但后来,耶稣会士还是被勒令离开韶州。龙华民似乎并未因韶州事件而转向面向上层的传教方式。此外,龙华民对于传播科学知识亦不甚热心。在到达中国之初,他就曾表示过,传播科学知识对传播教义没有什么太大的用处。1598年,他上书罗马耶稣会总会长,请求摒弃利氏的传教方式,称:"从兹以往,请勿再寄几何用具、钟表与算术书本,只惠寄耶稣像,圣托马斯《超性学要》,圣教历代圣师之作品足矣。"[②]他自己基本上没有参与过与传播欧洲科学有关的活动。[③] 由于利玛窦将大量时间花费在传播欧洲科学、哲学及其他世俗事物上,在华耶稣会士似乎一直受着其他修会及该修会内部一些传教士的批评。[④]事实上,1610年以前,除利玛窦以外,其他传教士虽然也曾介绍过欧洲知识,但并未系统地传授科学知识和翻译科学著作。利玛窦去世后,耶稣会士们对传播欧洲科学知识显得更为冷淡。此后一段时间内,只有熊三拔参与了与欧洲科学技术相关的著作。

1607年,熊三拔(Sabbathinus de Ursis, 1575—1620)来到北京。他曾制作

---

① 樊洪业. 耶稣会士与中国科学. 31.

② 引自:罗光. 徐光启传. 59.

③ 龙华民曾入西法历局参与改革历法的工作,但他似乎并未做具体工作。

④ 1614年,耶稣会日本省区省会长卡尔瓦罗(Valentim Carvalho)颁布布告,禁止使用利玛窦适应的传教方式及在中国教授数学和哲学。神父们只能专门宣讲福音,他们必须拒绝做任何与修订历书有关的事情,即使是皇帝特别颁布了圣旨也不行。虽然卡尔瓦罗很快离任,他的命令并没有影响到十数年后耶稣会士们参与历法改革的活动,但从这一事件也可以看出,围绕是否该以传授科学知识作为传教之助的传教策略,耶稣会士内部确实有过激烈的争论。见:邓恩. 从利玛窦到汤若望. 108.

过一些仪器模型。徐光启与利玛窦译成《几何原本》之后，利玛窦向徐光启谈到欧洲水利技术。徐光启对此非常感兴趣，认为非中国所能及。但恰在此时，徐父病逝，徐光启按例回籍丁忧，没有时间向利玛窦讨教其中原委。利玛窦告之曰："昨所言水法不获竟之，他日以扣之此公可也。"徐守制期满，回京复职，利玛窦已经去世。徐光启不忘前言，向熊三拔请教有关欧洲水利工程方面的问题。但熊"唯唯者久之，察其心神，殆无吝色也，而故有怍色"①。大费一番口舌之后，熊三拔终于同意为徐氏讲授欧洲水利工程方面的知识。1612年春，讲授完毕，徐光启据笔记编成《泰西水法》六卷。熊三拔特别叮嘱徐光启，要将翻译此书的原由写清。关于熊三拔何以会有"怍色"，也即惭愧之色，樊洪业做了详细的分析，指出，由于耶稣会士内部严格的等级制度，熊三拔不能毫无顾忌地违背龙华民的传教方针传播欧洲科学技术知识。② 这个分析是合理的。熊三拔还与徐光启合译了《简平仪说》，并与钦天监监副周子愚合译了《表度说》。1611年，他与徐光启合作完成了《简平仪说》③。但他认为该书内容不足，不欲出版。后在徐光启的劝说下，同意印行该书④。在述及《表度说》的翻译时，周子愚称，他请求龙华民为其讲授天文历法方面的知识，龙华民称："吾友(利玛窦)之本业则事天主，讲学论道也。学道余晷，偶及历数耳。贵国诸君子心欲之，吾辈何有吝色乎?"⑤ 可见，虽然碍于在中国传教的特殊社会背景，龙华民不得不允许耶稣会士参与翻译欧洲天文及技术著作，但即便对于未入教的中国人士，他也坚持强调传教的重要性。

当然，龙华民虽然并不热心传播欧洲科学知识，但多年在中国的传教经历也使得他对利玛窦适应的传教政策有所理解。1613年，龙华民派金尼阁去罗马，为中国传教团争得一个独立的地位，并请求在人力和财力上的支持。金尼阁不仅争得诸如可以任命中国人为神职人员、可以使用中文行礼

---

① 徐光启．泰西水法序．泰西水法．

② 参见：樊洪业．耶稣会士与中国科学．27—30．

③ 《简平仪说》署名为："泰西熊三拔撰说，吴淞徐光启札记。"见：熊三拔，徐光启．简平仪说．1a．

④ 熊三拔当时确实缺乏天文学方面的资料。1610年9月12日，他曾致信罗马，希望得到一些数学和天文学方面的书籍。他强调他们必须同时从事传播天主教教义及数学科学知识，利用新奇、完美的数学知识吸引中国学者对增进上帝的荣誉非常有用。参见：P. D'Elia, *Galileo in China*. 21.

⑤ 周子愚．表度说序．表度说．2b—3a．

拜仪式的权力，并使中国传教团得到了独立于日本会省的地位等，他还招幕了一批耶稣会士来到中国，并带回 7 000 部欧洲书籍[1]。随他来华的包括当时欧洲著名的科学家邓玉函（Johann Terrenz，1576—1630）及后来在欧洲天文学和数学传播中做出重要贡献的汤若望（Jean Adam Schall von Bell，1592—1668）和罗雅谷（Jacques Rho，1590—1638）以及翻译《寰有诠》、《名理探》的傅泛际（Franciscus Furtado，1587—1653）。[2] 由于金尼阁回到澳门时，传教士已被驱逐出中国内陆，他并没有把他带回的书籍全部带入内地。据方豪考证，"带进者尚未有十之一二"。1644 年 6 月，汤若望称当时教堂中有约 3 000 卷欧洲书籍，这 3 000 卷中应有很大一部分是由金尼阁带回的图书。现北堂书目中尚载有数百部图书，其中有哥白尼的《天体运行论》和开普勒的《哥白尼天文学概要》。虽然我们没有关于这 7 000 部图书的具体内容的介绍，但根据王徵等人的描述，可以肯定其中不少是科学技术方面的书籍。利玛窦曾多次请求罗马耶稣会总部派遣精通天文、数学的耶稣会士来华及希望得到更多与科学技术相关的书籍，金尼阁是利玛窦适应的传教政策的坚定的支持者。但金尼阁在罗马的活动主要是按照龙华民的指示进行的，注意到耶稣会内部严格的等级观念，金尼阁积极寻找精通数学和天文学的传教士及募集图书的活动应该至少得到龙华民的同意。恰恰在 1613 年前后礼部开始奏请让耶稣会士参与修历，由此可以看出，当时，在关于参与修历的问题上，龙华民的态度与利玛窦的传教方针很可能并不相悖。

龙华民接替利玛窦负责中国传教事业之后，在华耶稣会士不仅在传授欧洲世俗知识方面变得更为保守，他们的传教方式也有了很大的变化。出于对中国特殊国情的考虑，利玛窦坚持要在得到皇帝的正式批准之后，才能公开在中国传教，为此，他必须争取儒家学者和士大夫及其他上层人士对天主教的认同和保护，所以，他小心谨慎地尽量弱化天主教教义与儒教经典之间相抵触的部分。他只在上层人士中发展了一些教徒，并尽力与不信教的士大夫保持友好的关系，同时，他并不提倡在当时的情况下皈化一般民众。他曾多次向罗马耶稣会总会长解释他的想法。利玛窦的政策取得了很大的成功。尽管后期龙华民等开始大量皈化平民教徒，并由此招致了一些局部

---

[1] 详见：方豪.

[2] 当时，另有三位重要数学家和天文学家自愿随金尼阁到中国传教。但由于种种原因，他们均未成行。参见：P. D'Elia, *Galileo in China*. 21.23—25。

的教案，但利玛窦总是可以利用他在上层人士中的影响平息事端，使耶稣会士能继续留在中国。接替利玛窦的地位之后，龙华民继续实行其面向平民的传教方式，而南京的王丰肃则比他走得更远。

在 1610 年左右，南京成为传教活动最为活跃的地区。1611 年 5 月，王丰肃（Alponse Vagnoni）在南京建立了中国第一座教堂，他以完全公开的方式宣讲福音书并定期举行礼拜仪式。这引起南京礼部官员及一些学者士大夫的强烈不满。给事中晏文辉评述当时的情况称："私置花园于孝陵前，广集徒众于洪武岗；大瞻礼，小瞻礼，以房虚星卯日为会约；洒圣水，擦圣油，以剪字帖门户为记号。迫人尽去家堂之神，令人惟悬天主之像。假周济为招徕，入其教者，即与以银；记年庚为恐吓，背其盟者，云置之死。对士大夫谈则言心性，对徒辈论则言神术。道路为之喧哗，士绅为之疑虑。"[①]万历四十四年（1616）五一十二月间，南京侍郎沈㴶连上三折，历数传教士之罪及任其传教会带来的危害。他在奏疏中不仅指出天主教徒对政治和社会秩序的危害，还批驳了传教士介绍的欧洲宇宙论，并批评礼部于万历三十九年所上的希望耶稣会士参加历法修订的奏折。在下一章中，我们将看到，康熙朝杨光先将重演对欧洲天文学和宇宙论的批驳。[②] 为了反驳南京礼部对传教士的攻击，徐光启上奏争辩，并提出验证天主教及其传播的知识的方法，"尽召书中有名陪臣[③]，使至京师，乃择内外臣僚数人，同译西来经传。凡事天爱人之说，格物穷理之论，治国平天下之术，下及历算、医药、农田、水利等兴利除害之举，一一成书，钦命廷臣共定其是非。果系叛常拂经，邪术左道，即行斥逐，臣甘受扶同欺罔之罪"。但他的建议未被采纳。1617 年 2 月 14 日，万历

---

① 晏文辉．晏文辉疏．破邪集．转引自：明史欧洲四国传注释．160.

② 《破邪集》中收入了沈的三篇奏稿。《明史欧洲四国志注释》中也收入了专文。有兴趣的读者可参阅相关史料。张维化按称："沈㴶、晏文辉等疏文，其思想目光，均是代表当时之情形，未可以今日人之所共识者论之。万历间南京教案，为西方天主教传入中国以来一大教案。通过对此教案之研究可以了解当时中西方人士互相了解、互相认识之情形。其中不免有出于误会或出于偏见者，自当审慎论之。"（《明史欧洲四国传注释》，第 161 页）对于南京教案的起因，我们确实需要认真分析，而不能仅站在事后者的立场上去简单地评论当事者的功过。从欧洲科学在中国的传播这一具体视角，我们确实可以说，类似的教案对中国科学的近代化起到了阻碍作用。但对于历史事件的评述不能以单一的价值尺度去衡量，只有把它放在当时的环境和背景中，我们才有可能较为全面或客观地认清这一事件。限于篇幅和主题，本书不在此处做更细的分析。

③ 这是明末对传教士们的称谓。

帝下谕礼部,“远夷王丰肃等,立教惑众,蓄谋叵测……速差衙役,递送广东抚按,督令西归,以静地方。其庞迪我等,去岁尔等言晓知历法,请与各官推演七政。且皆系向化来京,亦令归还本国”①。早在万历帝下谕四个月前,沈漼便已逮捕了王丰肃及一些天主教徒。在北京,一直到万历四十六年,庞迪我等还安然无恙。万历四十六年四月,庞迪我等上奏为自己及耶稣会士辩解。②但没有得到结果。不久,他和熊三拔一起被驱逐到澳门。当时在北京的龙华民和毕方济躲到徐光启家中避难,另两位助手则躲到了利玛窦的墓地。③此后,虽然仍有 14 名耶稣会士(包括 8 名欧洲神父和 4 名中国辅理修士)留在中国内陆,但他们都处于隐蔽之中。

从某种角度来说,传教士们能够在中国恢复活动,得益于努尔哈赤起兵反明。

早在 16 世纪初期,欧洲火器已传入中国,并引起一些官员的重视,嘉靖帝甚至允许仿制佛郎机火器。努尔哈赤起兵之时,清兵只有一些冷兵器,对明守军的火器非常忌惮。1620 年初,努尔哈赤取得了对明军的首场战役,邵萨尔浒战役的胜利。1621 年,清兵攻陷广宁,缴获明军的火器,并转以火炮攻明。

1620 年 9 月,徐光启受命训练新兵,防御京城。他提出造“大号鸟铳”,主张从澳门购买性能更优的西洋“加农大炮”。应他的要求,李之藻和杨廷筠捐资派李之藻的两名入教学生赴澳门购炮。出于对与中国关系的考虑,葡萄牙人于此事非常合作。1621 年,李之藻重新被起用为光禄寺少卿。他于 6 月上疏,提出将已购买的四门大炮运至京。并请从澳门召募炮师。兵部尚书崔景推荐传教士阳玛诺、毕方济等协助讲解西方炮术。④此后不久,徐光启上奏请求由李之藻负责仿制西洋炮,同时提出寻访耶稣会士参与制炮及训练炮手等工作。藉此机缘,耶稣会士得以重新在北京公开活动。1623 年 1 月 25 日,龙华民与汤若望到达北京,此后,与早就避居北京的阳玛诺一起被带到兵部。二人承诺可以协助购买欧洲大炮及劝诫葡萄牙炮师忠于职守。于是,他们在北京住了下来。

---

① 万历帝. 谕礼部. 破邪集. 卷一. 转引自:明史欧洲四国志注释. 161.

② 张维华. 明史欧洲四国志注释. 163—164.

③ 邓恩. 从利玛窦到徐光启. 116—123.

④ 崔景荣等. 为胜制(应为制胜)务须西铳敬述购募始末书. 徐文定公集. 增订本. 卷三. 44—46.

新式火炮确实曾令明军一时在战场上占据上风。1626年,袁崇焕(1584—1630)在宁远守御战中使用了购自澳门的西洋火炮。此战以少胜多,鉴证了欧洲大炮的威力。此后,耶稣会士汤若望、罗雅谷等也曾帮助明政府训练炮手及制造欧式大炮,这使得他们在中国进一步站稳脚跟。

耶稣会士被招回北京的消息在全国带来了一定影响,一些传教士开始分头潜回内地传教,而原先潜伏于内地的耶稣会士则开始公开活动。与南京教案前不同,原来反对利玛窦以传播科学辅助传教的传教方式的传教士也意识到在中国传教的复杂性和科学知识的特殊价值,像龙华民这样的传教士也转而参与传播欧洲科学技术知识的活动。①从这个角度来看,南京教案对于欧洲科学知识在中国的传播起到的并不全是阻碍作用。1623年,艾儒略(*Gialio Aleni*, 1582—1649)写成《西学凡》,介绍欧洲天主教会学校教育的基本学科。书中称,欧洲将学术分为六科:文科、理科、医科、法科、教科、道科。书中对数学科学的描述完全复述了利玛窦《译几何原本引》中的内容。1620年以后,各类译著纷纷出版,其中包括艾儒略所撰讲解世界地理知识的《职方外记》(1623)、几何著作《几何要法》(1631),汤若望译撰介绍望远镜的《远镜说》及邓玉函与王徵译介绍西方力学和机械学的专著《远西奇器图说录最》等。②

三、《崇祯历书》的编撰及其中所含的欧洲数学知识

上文已经提到,明代末年的历法改革为欧洲知识能够在中国顺利传播提供了契机。利玛窦去世7个月后,万历三十八年十一月,礼部上折称钦天监对一次日食初亏的预测与实测结果差两刻。兵部员外郎范守己又给出另一套与钦天监预测相差更远的实测数据。由于不满礼部迭次以按《大统历》成法推测致误的解释,范守己上奏要求:"当博求通知历学者,令与该监(钦天监)集议。"③万历三十九年五月,礼部再奏:"原任按察使邢云路有《古今律历考》一书,综采详密……可令与守己并钦天官互相参订,有词林儒臣旁通律历之学者,亦可时与折衷。又钦天监官正周子愚言,大西洋归化庞迪我、熊三拔等携有彼国历法,参互考证,固有典籍所以载者,亦有典籍所未备

---

① 龙华民于1624年撰《地震解》一卷.

② 以上几段多处参用了樊洪业的《耶稣会士与中国科学》,39—41.

③ 神宗实录. 卷477. 明实录类纂·文教科技卷. 550.

者，当悉译以资采用。”[①]万历三十九年十二月，礼部奏：“采访历学精通之人如原任按察司邢云路、兵部郎中范守己一时共推……又访得翰林院检讨徐光启及原任南京工部员外郎李之藻皆精历理。若大西洋归化之臣庞迪我、熊三拔等携有彼国历法诸书，测验推步，讲求原委，足备采用。”[②]诏令从之。但这些举措似乎并未真的施行。1613 年，职为南京太仆寺少卿的李之藻又上一奏，“略言，台监推算日月交食时刻亏分之谬，而力荐[庞]迪我、[熊三拔]及[龙]华民、阳马诺等。言其所论天文、历数，有中国昔贤所未及者。不徒论其度数，又能明所以然之理。其所制窥天窥日之器，种种精绝。今迪我等年龄向衰，乞敕礼部开局，取其历法，译出成书”[③]。但此后，亦未有设局译书之举。译书未行很可能与明政府尚不想邀请西方人参与历法制订有关。1613 年 10 月，耶稣会士在朝廷中最重要的保护者徐光启因病告假至天津屯荒，这亦不利于耶稣会士得到修订历法的机会。耶稣会士重新在中国内陆公开活动之后，他们参与的对传播欧洲数学知识影响最大的活动是《崇祯历书》的编撰。

崇祯二年五月（1629 年 6 月 21 日）出现日食。钦天监的预测与实际观测结果再次相左，而徐光启预先推算的结果却与实测相合。钦天监推算官戈丰称其完全按照《大统历》中的算法推算，同时承认，由于《大统历》年久失修，其算法已不能保证推算的准确性，而自己无力承担历法改革任务。两个月后，礼部奏上修改历法事宜[④]：选人员、博访求、用钱粮、定考成。七月十四日，上谕四款俱依议。当时初任礼部左侍郎的徐光启受命督修历法。[⑤]

奏折中选人员一项称：

> 今日用人务求其能合者而已，即法未遽成，务精择其言其书，可以必合者而已。臣部四十等年，原疏推举五人，为史臣徐光启、臬臣邢云路、部臣范守已、崔孺秀、李之藻，今三臣俱故，独臣光启见在。本部似可督领其事。恭候圣明任使施行。至臣之藻以南京太仆寺少卿丁忧，服满在籍，如蒙圣明录用，伏乞敕下吏部，查明履

---

① 神宗实录．卷 483．明实录类纂·文教科技卷．550—551．

② 神宗实录．卷 490．明实录类纂·文教科技卷．551．

③ 梁家淏．徐光启年谱．104．

④ 徐光启于崇祯二年四月十六日任礼部左侍郎，管部事。（见：梁家淏．徐光启年谱．163．）所以，即便该奏折不是徐光启本人所上，也与他有莫大关系。

⑤ 礼部．题为日食事．引自：西洋新法算书．卷 1．11a—12b．

历酌量相应缺起补前来协同任事。

举荐徐光启督修历法,李之藻参与其事。其中"博访求"一项中指出,应该废弃不可私习历法之禁,且应招欧洲人参与历法改革。同时奏折中举出明代开国初年吸纳伊斯兰天文学家参加历法修订的旧事,作为推荐欧洲人参与历法改革的一个理由。①

1629年9月,李之藻奉旨协理修历。9月13日,徐光启上疏举荐邓玉函、龙华民参与修历,同时奏上"度数旁通十事",阐述数学对社会的用处。10月28日,奉旨:"西法不妨于兼收,诸家务取而参合,用人必求其当,制象必核其精。"

1629年11月6日,历局正式成立,邓玉函、龙华民入局参与历法改革。11月7日,徐光启上《奉旨修改历法开列事宜请乞圣裁疏》,疏中指出,关于《大统历》,也即《授时历》中的历法计算方面的书很少,明代初期虽然翻译了伊斯兰天文历法方面的书籍,但译书不多,且书中又没有论证和说明,所以,当时的翰林院官员无法综合其历理以与原《大统历》综合以制订出一部新的历法。对于此次的引入欧洲历法,徐光启提出:"臣等愚心以为,欲求超胜必须会通,会通之前,先须翻译。"西方关于天文学方面的书籍"至为详备",且多为"近今数十年间所定,其青于兰寒于水者,十倍前人。又皆随地异测,随时异用,故可为目前必验之法。又可为二三百年不易之法,又可为二万万年后测审差数,因而更改之法。又可令后之人循习晓畅,因而求进,当复更胜于今也。翻译既有端绪,然后令甄明大统,深各法意者参详考定,镕彼方之材质,入大统之型模"②。

历局刚成立后不久,清军攻破大安口,直逼北京。迫于危局,徐光启自1629年12月30日起受命从事与军事相关的活动。担当修历重任的邓玉函于1630年5月13日去世,而龙华民又一心关注传教事业,刚刚起步的西法历局遂陷入困境。虽然身处紧张的战事之中,徐光启还是上奏请求将汤若望和罗雅谷(1592—1638)调到北京协助修历。1630年6月26日,李之藻奉调来到历局。有李之藻的帮助,翻译西方天文书籍的工作总算可以不因徐光启的离局而受到影响。但不幸的是,李之藻在8月份去世,徐光启顿失臂助。历局之中,"算数测候,誊写员役,虽不乏人,而释义演文,讲究润色,较

① 礼部. 题为日食事. 引自:西洋新法算书. 卷一. 10a—12b.

② 徐光启. 治历缘起. 新法算书. 四库全书本.

勘试验”,则只有徐光启一人承担[①]。1633 年 10 月 31 日,身患重病的徐光启推荐当时官任山东布政使右参政的李天经总理历局事务,8 天后徐病逝。

李天经为 1613 年进士,曾与邢云路讲求历法,为天主教的皈依者。但在负责西法历局的工作以前,似乎并未翻译过西书或传播过欧洲知识。对于徐光启举荐他负责历书工作,他自称,“臣心窃丑迂阔无当之学”,“无根抵之容,不知辅臣何以一旦推毂及臣”[②],似乎他自己对承担修订历书的工作并无准备。他在 1634 年 7 月 6 日接掌西法历局。

1629—1634 年间,徐光启和李天经分五次进呈译书 46 种,137 卷。虽然徐光启称治历的过程为翻译—会通—超胜,但从《崇祯历书》来看,其主要内容为翻译的西方著作,只在第一批进书时,徐光启所呈上的《通率解》二卷属会通类,另外,《大测》中曾提到,原书介绍的为西方方法,度以下以六十进制,中国传统以百进制。书中举例解释六十进制与百进制之间的换算方法。[③]

在《崇祯历书》的编译过程中,历局与钦天监进行了多次实测,检验新法(即西法)和旧法的优劣。徐光启在世时,由于他自己身为礼部尚书,隶属礼部的钦天监官员及礼部人员均不能阻挠新法的推行。徐光启去世后,情况则有所转变。早在 1631 年,已有保定府满城平民魏文魁自刻《历元》、《历测》二书,并令其子魏象乾捧《历元》一部,咨送礼部。魏文魁在当时亦颇有些名气,据说邢云路所撰《律历考》多出自其手。身居礼部尚书的徐光启为此特著《学历小辨》,以辨该书之误。在李天经接掌西法历局不久,新任礼部尚书李康先等即奏称,当年二月的“日食初亏复圆时刻方向皆与《大统历》合,其食甚时刻及分数魏文魁所推为合”,要求李天经“会同悉心讲究,仍临期详加测验,务求画一,以裨历法”[④]。然而,据李天经称:魏文魁“不欲见局中一人,亦不欲向局中一步”[⑤]。此后,循旧例,每逢日、月食及其他特殊天象出现之时,《大统历》、《回回历》、西法历局及魏文魁均各依自己的方法事先给出预测,然后,由礼部届时共同测验以定是非。从往复奏折中可以看出,在徐光启在世之时,他以礼部尚书的身份奏上测验结果,其结果多与新

① 徐光启. 恳祈圣鉴,以完大典事. 新法算书. 卷 2. 2b.
② 李天经. 谨陈题荐始末以祈圣鉴事. 缘起. 新法算书. 卷 3. 4b.
③ 邓玉函. 大测. 新法算书. 卷 2.
④ 李康先. 题为朝请关防以便俯循职掌事. 缘起. 新法历书. 卷 3. 6b.
⑤ 李天经. 谨题为钦奉圣谕据实奏明事. 缘起. 新法历书. 卷 3. 10b.

法相合。徐光启去世后，职衔低微的李天经经常需要一番争论才能够得出有利于西法历局的结果。且他有时还需要自备钱粮以承负制造天文仪器及维持历局日常开销。[①]经过7次实地对比检测，崇祯帝终于承认欧洲历法比原《大统历》更为准确。1642年，他下旨："西法果密，即改为大统历法通行天下。"但未几国变，西历终未施行。[②]《畴人传》中论李天经曰："天经之学亚于光启。其在西局，谨守成法，毕前人未毕之绪，十年如一日。光启荐以自代，可谓知人矣"[③]。

徐光启和李天经所进书籍总汇成《崇祯历书》。入清之后，汤若望将该丛书重新编辑成100卷，并加入了其自著的《新法表异》及《历法西传》二卷，以《西洋新法历书》之名奏送清廷。

从总体上来说，《崇祯历书》是一部天文学巨著。徐光启为需译图书拟出"节次六目，基本五目"。基本五目为：法原、法数、法算、法器、会通。《崇祯历书》中以数学内容为主的著作主要有属于法原部分的《大测》(邓玉函撰，1631)、《测量全义》(罗雅谷撰，1631)[④]和法器部分的《筹算》(罗雅谷撰，1628)及《比例规解》(罗雅谷撰，1630)。此外，《崇祯历书》中还包括《割圆八线表》(1631)和《方数表》两种算表。

《大测》是第一部系统介绍欧洲三角学内容的中文著作，《测量全义》中亦含有一些三角学公式。这是《崇祯历书》中引入的最重要的数学知识。二书主要取材于 Bartholomaei Pitiscus 的《三角学》(*Trigonometriae*, 1595)、西蒙·斯蒂文(Simon Stevin)的《数学札记》(*Hypomnemata mathematica*, 1608)、克拉维斯的《实用几何学》(*Geometria practica*, 1604)及阿基米德的《论圆》(*Measurement of the Circle*)和《圆球与圆柱书》(*The Sphere and the Cylinder*)等书。关于二书中所引入的三角学知识，将在本书第六章作更为详细的介绍。

邓玉函编写的《测天约说》和罗雅谷的《测量全义》中介绍了圆锥曲线知识。加上其他著作中所包含的相关知识，《崇祯历书》中与圆锥曲线相关的内容主要有求圆面积、椭圆面积、球体积与椭圆旋转体体积，德阿多西阿(Theodosius)在《圆球原本》中的球面几何，派帕司(Pappus)的求方曲线和海

---

① 关于李天经与魏文魁等的争论，详见：缘起．新法算书．卷3至卷7.

② 阮元．李天经．畴人传．卷33．11b—12a.

③ 阮元．李天经．畴人传，卷33．12a.

④ 关于《崇祯历书》中介绍的欧洲天文学知识，参见：中国天文学史整理研究小组编．中国天文学史．222—224.

伦(Heron)的已知任意三角形三边长求三角形面积的海伦公式等中国传统数学中没有的知识。但由于《崇祯历书》中介绍的数学知识主要是为了制订历法提供计算基础①,所以,其内容“十分零碎,讨论也很不充分”②。《割圆八线表》和《方数表》分别为三角函数表和开方表。

《筹算》和《比例规解》介绍了两种欧洲计算工具:纳皮尔算筹和伽利略的比例规。此《筹算》并非介绍中国传统筹算方法的著作,书中引入了欧洲的纳皮尔算筹(Napier's Bones)及利用其进行计算的方法。③比例规为一种类似于现代圆规的计算工具,由伽利略发明,综合比例规两臂间的距离及其上所刻的数字,可以完成多种计算。该法后来被称为尺算。

参与编撰《崇祯历书》三位耶稣会士邓玉函、汤若望、罗雅谷都是随金尼阁来华的。

邓玉函,字涵璞,瑞士人。他精通希伯来语、拉丁语、希腊语、德语、英语、法语、葡萄牙语等多种文字,在医学、数学和自然哲学方面都有研究并颇有成就。1611年5月3日,他成为著名的林采学社(Academia dei Lincei)的成员,在此前8天,伽利略也被接受入该学社。当时,伽利略向邓玉函介绍了他观测到的新星。同年11月,邓玉函加入耶稣会。1614年,金尼阁在欧洲召募新耶稣会士到中国传教,邓玉函自愿来华。此后不久,他开始在欧洲为中国传教事业收集书籍及科学仪器。由于他非常推崇伽利略的工作,所以,他希望能得到伽利略的最新成果,并将之用于中国的历法改革。为此,他请求教皇御前的植物学家法倍尔(Faber)协助他劝说伽利略,但没有得到伽利略的任何回答。1618年4月16日,他离开里斯本。1622年,邓玉函从嘉定写信给法倍尔,再次希望他协助得到伽利略的天文历法成果,他称“我们在中国修历,对日食的推算最感需要,因靠修历的名义,便不致被驱逐出境”。为此,法倍尔曾三次致信切西亲王,希望伽利略能够协助邓玉函,并曾亲自和伽利略晤谈,讨论如何帮助邓玉函预测日、月食。但伽利略回称他对

---

① 圆锥曲线知识的引入与传教士对日、月食的解释有关。参见:C. Jami. Mathematical Knowledge in the Chongzhen Lishu.

② 钱宝琮. 中国数学史. 245.

③ 除进行四则运算外,利用纳皮尔筹还可以计算数字的立方根。清代数学家方中通、梅文鼎、戴震等都曾研究过筹算。梅文鼎还改革了纳皮尔筹,将原来的直筹改为横筹,并以半圆代替原筹的三角。见梅文鼎. 筹算. 关于纳皮尔筹在中国的传播,参见:郭世荣. 纳贝尔筹在中国的传播与发展.

此一无所知。[①]1623年,邓玉函再次写信寻求伽利略和开普勒的新著作,他还将《尧典》中有关星辰的记载写信告诉开普勒,为此,开普勒寄来了他的天文表格并表示要协助邓玉函,但二人都在不久之后去世。邓玉函在中国的活动与其他耶稣会士明显不同。在来华途中,他曾为同行的耶稣会士讲解数学知识,做了天文、气象、海流和地磁等方面的观测,并将结果寄回欧洲。到中国以后,他与一位中国人合撰了《泰西人体说概》,介绍西方解剖学知识。1626年,他与王徵合译了《远西奇器图说录最》[②]。同时,与其他传教士只以传播西方科学技术知识作为传教之助的方法不同,他还认真研究了中国的传统医学及天象记录。遗憾的是,他来华不久后便去世而未能得到进一步的成果。

《崇祯历书》的早期编撰工作主要是由邓玉函承担的。他为《崇祯历书》设计了总体的框架,在不足一年的时间内,他撰成《测天约说》两卷、《大测》两卷、各种算表十卷,他还指导历局人员制成七政象限仪两座、测星纪限仪一座。邓玉函去世后,徐光启评价他曰:"此臣历学专门精深博洽,臣等深所倚仗。"[③]

罗雅谷(Jacqaes Rho, 1593—1638),生于意大利米兰,1614年入耶稣会,1622年随金尼阁到达澳门。罗"雅谷幼年资钝,习文法,成绩不佳,研究哲学神学,亦同常人,惟于数学颖慧异常"。自修院毕业后,"在故乡教授数学,迥异余子"。1624年随高一志[④] 至山西传教。陆续翻译了《筹算》、《比例规解》等书。邓玉函去世后,徐光启举荐他和汤若望入历局工作。他很快到达北京并投入工作。1638年4月26日,罗雅谷去世,葬于利玛窦墓之侧。[⑤]

鉴于汤若望对清代初年西方天文和数学在中国的传播产生了很大影响,我们将在下一章介绍他的情况。

---

① P. D'Elia, Galileo in China – Relations through the Roman College between Galileo and the Jesuit Scient – Missionaries (1610—1640). 12—13, 30—33. 关于邓玉函,参见:I. Iannaccone. Johann Schreck Terrentius.

② 关于《远西奇器图说录最》,参见:张柏春. 王徵与邓玉函《远西奇器图说录最》新探.

③ 徐光启. 为修改历法事. 缘起. 新法算书. 卷一. 39a.

④ 高一志,原名王丰肃,南京教案时被押送出内陆,后更名高一志,潜回内地传教。

⑤ 费赖之著. 罗雅谷. 在华耶稣会士列传及书目. 192—197.

第四节　明代学者对欧洲数学的吸收与反应

从现存史料来看，利玛窦在肇庆、韶州、南京、南昌及北京都曾传播过数学知识，然而，史籍对于他传播的内容及其学生的具体情况似乎没有详细的记载。除少数和他合作过的学者，如瞿汝夔、李之藻、徐光启之外，我们并不了解其他跟随利玛窦学习数学的学生，当然，也就无法分析他们学习这门欧洲知识的目的和水平。瞿汝夔是见于记载的最早随利玛窦学习数学知识的学者，但他学习时间不长，没有自己的数学著述，关于他学习数学的史料亦不多。杨廷筠谈到，他自己虽然能够和利玛窦谈"名理"，但于"几何、圜弦诸论便不能解。公(利玛窦)叹曰，自吾抵上国，所见聪明了达惟李振之，徐子先二先生耳"。[①]李振之即李之藻，徐子先即徐光启。利玛窦认为只有李之藻和徐光启能够领会他所传授的数学知识。他们二人都留下了数学著述。本节主要以此二人为例，分析接受欧洲数学的中国学者的情况。

一、李之藻与西方数学知识在中国的传播

李之藻(1565—1630)，字振之，浙江仁和(今杭州)人。他自幼对舆地学感兴趣，曾撰写过地理书籍，并绘制过中国15省地图。1598年他考中进士。1601年，利玛窦到北京，李之藻便开始与利玛窦交往，并被利氏房间陈列的世界地图和天文仪器所吸引。据李之藻称，利玛窦曾为他讲解平仪及其中涉及的托勒密天体理论，李之藻就所闻记成笔记。[②]不久，他受命为福建学政、副考官。在北京至福建的往返途中，他对利玛窦讲解的知识进行了实地测验，结果"测验无爽"[③]。他回京后即将这些内容整理成《浑盖通宪图说》出版。该书与《几何原本》不同，并不纯粹是一部译作。李之藻自称：

> (利玛窦)示我平仪……耳受手书，颇亦镜其大凡。旋奉使闽之命，往返万里，测验无爽。不揣为之图说，间亦出其鄙谫，会通一二，以尊中历。而他如分次度，以西法本自超简，不妨异同，则亦于

---

① 杨廷筠．同文算指通编序．同文算指通编．天学初函本．1b—2a．

② 参见：李之藻．《职方外记》序．职方外记．天学初函本．1a—2a．

③ 李之藻．浑盖通宪图说序．

旧贯无改焉。[1]

也就是说，该书是在利玛窦原来讲述的基础上，李之藻根据自己的理解加入了图说及中、西方法会通的内容。从《浑盖通宪图说》的成书过程可以看出，对于来自欧洲的知识，李之藻并未轻信，通过亲身检验，他才相信了利玛窦所讲的理论。此后，他又将这些理论与中国古代的浑天说和盖天说，以及《周髀算经》中的内容进行比较和会通，进而完成了这部介绍西方天文仪器的著作。李之藻与利玛窦合作的第二部著作是《圜容较义》，关于其内容我们已在前面作过介绍。李之藻在数学方面最为重要的工作是《同文算指》的编撰。

利玛窦先生，精言天道，旁及算指。其术不假操觚，第资毛颖，喜其便于日用，退食译之，久而成帙，加减乘除，总亦不殊中土，至于奇零分合，特自玄畅，多昔贤未发之旨。盈缩、句股、开方、测圜，旧法最难，新译弥捷，夫西方远人，安所窥龙马、龟畴之秘，隶首、商高之业，而十九符其用？书数共其宗，精之入委微，高之出意表，良亦心同理同天地自然之数同欤？[2]

《同文算指》中，李之藻并不只是叙述利玛窦传授的欧洲数学知识，他还将欧洲数学方法和传统方法作了详尽的比较。书中第一篇“定位”即称，“古法用筹……量多少者不失圭撮，权轻重者不失黍絫……算之原也。后世乃为珠算，而其法较便，然率以定位为难”[3]。在论及盈不足术时，李之藻在给出利玛窦传授的欧洲方法之后，指出：

以上原二十二条，补七条，与旧法盈朒略似，然本无盈朒而借立一数以求盈朒，乃以盈朒推之者，与前借衰互徵之法俱极超妙，虽至隐至奥之数，用此推求，未有不涣然冰释者。学人熟此二法，于算义思过半矣。其旧法盈朒章，人所恒习，亦附数条于后。用相比拟。旧法未知借推之妙，只立盈与不足或两盈两不足为母，两母相减为法，以母子互乘之数求其物实，以两子或并或减之数求其人实，大抵一盈一不足者，减余为实，俱如前法耳。又有叠数盈朒列作上中下三位，所求人实亦取下层盈不足，并减同前而取两上相

---

① 李之藻. 浑盖通宪图说序. 浑盖通宪图说. 天学初函本. 3b—4b.

② 李之藻. 同文算指序. 同文算指. 天学初函本. 2a—2b.

③ 李之藻. 同文算指前编. 同文算指. 天学初函本. 卷上. 1a.

乘，以为通法，更乘人实，然后乃以上中互乘减余为法除之，又以上中乘出之数互乘下层，仍前并减以为物实，以法除之，与人实同。①

“盈不足”术是中国传统数学中的计算方法。其典型设题为：今有人共买物，每人出 m 两，不足 x，每人出 n 两，不足 y(盈)(适足)，问物价、人数各几何。主体成书于约公元前1世纪的《九章算术》有《盈不足》一章，到明代，吴敬的《九章算法比类大全》及程大位的《算法统宗》中都有盈不足内容，但二书中的盈不足部分只包括类似于上题的典型盈不足问题，《九章算术·盈不足》中第二部分利用盈不足术解决的一些较为复杂问题的算题及其算法已不为当时人所知。李之藻在《同文算指通编》中介绍的欧洲算法与《九章算术》中第二部分的算题和方法是一致的。钱宝琮、林力娜、刘钝都曾专文分析盈不足术的流传过程。②此处我们要强调的是，李之藻虽然在不了解中国传统数学成果的情况下比较了中国和欧洲的数学方法，并得出欧洲数学方法优于中国古代方法的结论，但他的评论毕竟是建筑在认真的分析和比较的基础上的。

关于李之藻皈依天主教的过程，也值得我们在此附上一笔。早在1601年，李之藻已与利玛窦相识，并为其天文、数学及舆图知识所吸引，但他直到1610年才入教。对于他入教的过程，艾儒略叙述曰：

李公我存，久习利子，服其器识……忽患病，京邸无家眷，利子朝夕于床第间，躬为调护。及病苦笃，已立遗言，请利子主之。利子力劝其立志奉教，得幡然于生死之际而受洗，且奉百金为圣堂用，而李公之疾亦全矣。③

从上述叙述中，我们可以看到，李之藻是在病危之时，由利玛窦力劝入教的。李之藻与利玛窦相识近十年，其间不可能不谈到天主教的教义，但李之藻似乎一直没有入教的念头。促使他“病革”之时的幡然变计，“对利玛窦的尊重和感激也许并不是一个不重要的因素”④。

孙尚扬曾从多方面探讨李之藻没有在更早的时候入教的原因，他的分析多是有见地的。⑤此处我们再补充一点。虽然李之藻对利玛窦传授的科

---

① 李之藻. 同文算指通编. 同文算指. 天学初函本，卷四. 27a—b.

② 关于《九章》中盈不足术的问题的类型及其两种解法，以及盈不足术可能的西传过程，详见：钱宝琮.《九章算术》盈不足术流传欧洲考；林力娜(K. Chemla)，盈不足术的世界传播管见.

③ 艾儒略. 大西利先生行迹. 转引自：孙尚杨. 基督教与明末儒学. 186.

④ 孙尚杨. 基督教与明末儒学. 186.

⑤ 孙尚扬. 天主教与明末儒学. 186—200.

学知识很感兴趣，且乐于与利氏交往，但对天主教却很淡漠，这样的情况在与利氏相交的士大夫中非常普遍。从现存史料来看，与利玛窦及其他耶稣会士交往的学者、士大夫不在少数，他们多数与早期的李之藻一样非常尊重利玛窦的为人和学问，但其中皈依天主教的则仅寥寥数人而已。究其原因，在与利玛窦交往时，他们所看重的是利玛窦个人，或者其掌握的某种知识。这便可以解释，为什么一些与利玛窦相交的官员，如叶向高，不仅没有皈依天主教，反而捐款修建佛教寺庙。[①]虽然当利玛窦在世时，他可以利用他的关系扩展传教区域及保护其他耶稣会士，但在他去世之后，当南京教案发生时，除徐光启以外，几乎没有士大夫为耶稣会士们做辩白。对于其他与利玛窦交往的士大夫来说，帮助利玛窦，很可能只是尽朋友之情，在利玛窦去世之后，他们便不觉得自己有义务保护其他传教士。早期的李之藻也是如此。由于李之藻自身对舆地和数学知识的兴趣，他被利玛窦传授的欧洲知识所吸引，在对利玛窦讲授的部分知识进行检验之后，他开始学习欧洲知识。在谈到早期与利玛窦的交往中，他几乎从未提到过天主教义对他的影响。可以说，李之藻的信教方式是：了解欧洲科学—与利玛窦相交—入教—宣扬天主教教义及保护耶稣会士。

除天文、数学著作以外，李之藻还与傅泛际合译成《名理探》和《寰有诠》。二书分别介绍亚里士多德逻辑学和宇宙学。[②]1628年，他编成了《天学初函》，这是一部丛书，收入的都是耶稣会士翻译的作品及少数信教士大夫介绍欧洲知识的著作。李之藻将这部丛书中的著作分为“理”编和“器”编。“理”编著作大都与宗教相关，而“器”编则涵盖了所有与科学技术相关的科目。从书中可以看出，李之藻接受了西方知识为一个整体的说法，将之总称为天学。从全书体例来看，“理”编中首先为《西学凡》，该书可被视作对西方学术的总的介绍，此后为传教士们翻译的介绍道德伦理的《交友篇》、《七克》及利玛窦等关于天主教教义的早期著作《天主实义》等，作为“理”编之殿的是介绍世界地理学知识和风土人情的《职方外纪》。“器”编以《泰西水法》开篇，该书为耶稣会士在当时译成的与日用急需关系最为密切的著作，其后则为天文、数学著作。值得注意的是，《天学初函》中并未收入耶稣会士撰著和出版的有关天主教礼仪、教义中的先验内容及欧洲哲学的著作。例如，李之藻自己刻印的《圣水纪

① 叶向高于1617年在家乡兴修佛庙。关于叶向高的生平，参见：冷东．叶向高与明末政坛．

② 关于《名理探》、《寰有诠》，参见：Robert Wardy. *Aristotle in China*. Cambridge University Press, 2000.

言》、龙华民于1602年于韶州出版的《圣教日课》、《圣人祷文》,以及李之藻参与翻译的介绍亚里士多德哲学体系的《寰有诠》和《名理探》等均未被录入。由此,我们有理由推测,李之藻对于西方哲学及天主教义中的神学部分很可能是持有保留态度的。下文中,我们将看到,在不久以后,中国学者只肯接受欧洲传来的"器"的部分,而完全拒斥其中"理"的部分内容。

二、徐光启对西方数学的认识与态度

徐光启,1562年生,江南松江人。其父本习商,后改业农,又学了阴阳医术、占卜看相。嘉靖年间,东海上的海盗经常骚扰江南一带,徐光启自称,其幼时曾"遭兵燹,出入危城中,所识诸名将奇士,所习诸战守方略甚备"①。受这样的经历及其父杂学的影响,他对与军事战守及与实际相关的事务很感兴趣②。1577年,徐光启拜黄体仁为师,黄体仁私淑王守仁,徐光启由此开始致力于心性之学③。徐光启20岁中秀才,此后,他四次乡试不第,靠教馆为生。1597年,徐光启参加顺天府乡试,中解元。7年后,中进士。应与其同榜成进士的黄体仁的举荐,入翰林院。1607年,翰林院散馆,成翰林院检讨,后累官至礼部尚书兼东阁大学士。关于徐光启的生平,已有多部传记做过专门研究。④

在学术方面,徐光启早期受到其业师黄体仁的深刻影响,在治学方面专主心学。在其应举的文章中,他称"圣帝之心,唯虚而能通也。夫深山之居,舜之心无心也,无心斯无所不通也"⑤。他的文章得到了同属心学派,并主张儒、佛合一的学者焦竑(1540—1620)的赞赏,被拔至第一。我们可以说,徐光启是为了博取功名而写下上述带有明显心学派学术特点的应试文章的,徐光启曾自嘲地称,他"爬了半辈子烂路",表示出其对自己早期学术生涯的否定。但心学并不是明王朝钦定的正统学术,明科举是以朱子校注的《四书》、《五经》和1414年明成祖诏修的《性理大全》等为范本及立论根据的,徐光启文章中所带有的明显的心学倾向很可能正是他屡试不第的一个

---

① 徐光启. 先妣事略.

② 罗光. 徐光启传. 5.

③ 梁家勉. 徐光启年谱. 42.

④ 关于徐光启,参见:罗光. 徐光启传, 孙尚扬在其《基督教与明末儒学》中对徐光启和李之藻入教的过程及对西学的态度等作了详细的分析,且多新论。

⑤ 徐光启. 徐光启集. 522.

重要原因。由此可见,徐光启早期的心学研究并不是单纯地以应试为目的的。然而,心学偏重个人的道德修养而轻视与实践相关的活动,这又与徐光启的个人兴趣不符。他自幼经历过战乱和灾难,所以对与军事、水利等相关的实用知识非常感兴趣。成年后,他游历大江南北,对当时国家的局势及百姓疾苦有了较为全面的了解,这使得他更关心有关农业、水利的事务。徐光启的这些经历和特点使其自然地反对心学中出世的一面。按当时的普遍观点,学者们将理学、心学中出世的一面归咎于佛学或道家伦理学对儒学的影响。正是基于这个原因,进入仕途之后的徐光启多次撰文批驳佛、老之学,称“二氏(佛、老)之精者能使贤智之士弱丧忘归”。“二氏果无用于世”。并称:“近世学士横生途辙,谬欲祧而椟之,曰吾独契圣宗,以上接洙泗为嫡传也。而实则阴用二氏之精者,以文文致傅会其说,使后进之士波荡而从之,即紫阳一脉几欲敝帚相视。”①

入仕之后,徐光启的学术方向有了较大的转变。接触天主教及欧洲学术很可能是促使他有此转变的一个重要因素。1600 年,徐光启再次进京参加礼部考试,路过南京时,结识了利玛窦。1603 年,徐光启从罗如望处得到《天主实义》和《天主十诫》。该年 2 月 11 日,他领洗入教。在他的影响下,他全家都先后皈依天主教。值得注意的是,徐光启并不像李之藻或瞿汝夔那样首先对欧洲的数学、舆地学、天文学或炼丹术感兴趣,他是被利玛窦介绍的天主教教义本身所吸引的。与佛、老及理学和心学末期的出世思想相反,耶稣会士所介绍的天主教是一种入世的宗教,徐光启很可能正是被其这一特性所吸引的②,同时,利玛窦在《天主实义》中对佛学和道家的批判亦可引起徐光启的共鸣,而利玛窦在其所著的著作中又竭力附会儒家学说,“历引吾六经之语以证其实,而深诋谭空之误”。“语性则人大异于禽兽,语学则归于为仁,而始于去欲。时亦或有吾国之素所未闻,而所尝闻而未用力者,十居九矣”③,这也会使得徐光启产生强烈的认同感。然而,皈依天主教并不意味着要放弃儒家学者的身份。徐光启对天主教的定位为“其教必可补儒易佛”④。不仅如此,入教后的徐光启依然倾向于心学。据孙尚扬分析,

---

① 引自:孙尚扬. 天主教与明末儒学. 165.

② 徐光启曾称:“西方诸君子而犹世局中人也.是者种种有用之学,乃其秘密家珍.”见:徐光启. 泰西水法序. 泰西水法. 天学初函本. 5a.

③ 天主实义序. 天主实义. 天学初函本. 1b—2b.

④ 徐光启. 泰西水法序. 泰西水法. 天学初函本. 1b.

徐光启在翰林院院课仍带有明显的心学影响。①实际上，徐光启的接受天主教并非单纯出于他对心学空虚一面的反动，自幼所习的心学实已深植于其心，王学对徐光启的另一个重要影响在于使他具有开放的思想及批判精神。这使得他可以怀疑神圣不可侵犯的前朝儒家的语录及言论，同时承认非儒家传统的西方学术及宗教可以包含的真理。很可能正是基于这一点，他在阅读了与其思想颇为相近的《天主实义》等著作之后皈依天主教。

徐光启是一位虔诚的天主教徒。他曾主动为利玛窦提供促进天主教在中国传播的方法，并在沈潅等发动反教案时挺身护教。同时，他也接受了利玛窦等批评理学，要求返回古代儒家经典的思想。认为，"周礼三物，儒行为先，下致礼乐射御书数，亦皆有用之学"。而"是非邪正，深言之既更仆未罄，然而窃衷之以两言曰，有用与无用而已矣"②。所以，他自己开始专志于有用的"实学"，自称："尝学声律，工楷隶。及是，悉弃去，[专志]习天文、兵法、[农事]、屯、盐、水利诸策，旁及工艺、数学、务可施用于世者。"③

徐光启在数学方面的工作与他的天主教信仰及其对经世实学的追求直接相关。在中国数学史上，徐光启最著名的工作是与利玛窦一起翻译了《几何原本》。利玛窦曾如此描述徐光启翻译《几何原本》初衷和过程：

> 葆禄博士(徐光启的教名为葆禄)一心设法叫我们本人和我们的学识受人敬重，以推动传教。他同利玛窦神父商议，翻译几册科学书，使中国士大夫看我们怎样尽心研究学术，怎样寻示确实的理由去证明。因此他们可以看到，决不是轻信盲从。在各种的科学书里，他们决定选一种最好的，那便是欧几里得的《几何原本》。在中国讲学问的，大都是空说无凭。我们想教给他们一些科学的智识，就非从这册书下手不可。而且这册书所有理论证明都非常明了。
>
> 这时在北京，葆禄博士有一个同年入科的举人。他是浙江的一个穷学士。与葆禄博士相好。葆禄博士认为他很可以相帮玛窦神父译书，便与另外一个同僚议妥，给(该学士)一年的薪俸，叫他笔译玛窦神父口述的书本，玛窦神父聘他教庞迪我神父的中文，让他住在堂里的几间空房里，大家都很满意。

---

① 孙尚扬．基督教与明末儒学．162—163．

② 引自：孙尚扬．基督教与明末儒学．165．

③ 引自：梁家勉．徐光启年谱．81．

> 可是葆禄博士后来觉得，译书非他自己下手不可。大约别人也同他说了，译书非他的才笔不能成功。他便决意自己下工夫，每天到我们堂里，坐三四点钟功夫，无形中叫我们的身价也增了。大家都知道一位名闻京师的翰林到我们这里来求学。他自己越听越体味到，这册书又高深，又的确。他跟朋友们接谈，便常谈这册书。他费了一年多的功夫，用一种明畅佳雅的文笔，译出几何学的前六卷。他本想把全书译完，可是玛窦神父因有许多传教的工作，便告诉他先看中国士大夫对这六卷译本有怎样的态度，然后再继续翻译。于是便把前六卷的译文刻板付印。①

据利玛窦的叙述，徐光启译《几何原本》的初衷并不是介绍欧洲数学知识，而是欲通过该书的出版使得中国士大夫了解西方知识是有理论且经得起检验的，通过对几何理论的理解，达到相信传教士们引入的其他知识，甚至天主教教义。在《几何原本》的序言中，徐光启也表达了类似的想法。他称，利玛窦之学"略有三种。大者修身事天，小者格物穷理，物理之一端，别为象数。一一皆精实典要洞无可疑，其分解擘析亦能使人无疑。而余乃亟传其小者，趋欲先其易信，使人绎其文，想见其意理，而知先生之学可信不疑大概如是，则是书之为用更大矣"②。即，在徐光启看来，利玛窦在宗教方面的学识是最为重要的，格物穷理之学为其学术中之小者，而象数之学，也即数学科学则只是格物穷理中之一种。徐光启翻译《几何原本》的目的是欲由该书的确实可信的理论体系使读者相信利玛窦的学问都是如此可信不疑的。这才是该书最大的用途。根据上述史料，我们可以推断，徐光启完全了解并支持利玛窦利用欧几里得式的几何证明来确立天主教教义的可信性的做法。可以说，徐光启翻译《几何原本》很大程度上是为了推动天主教在中国的传播服务的。

译成《几何原本》之后，徐光启又与利玛窦共同翻译了《测量法义》，该书的翻译始于1607年。1608年，徐光启回籍守制期间削为定稿。徐光启称：

> 西泰子之译测量诸法也，十年矣。法而系之义也，自岁丁未始也。曷待乎于时，《几何原本》之六卷已卒业矣，至是而后而能传其义也。是法也，与《周髀》、《九章》之句股测望异乎不异也。不异何贵焉？亦贵其义也。刘徽、沈存中之流，皆尝言测望矣。能说一表

---

① Fonti Riccine.(D'Elia), Vol. II. 转引自：罗光. 徐光启传. 38—40.

② 徐光启. 几何原本序. 几何原本. 2a.

不能说重表。言大小句股能相求者，以小股大句、小句大股两容积等，不言何以必等能相求也。犹之乎丁未以前之西泰子也。曷故乎？无以为之藉也。无以为之藉，岂唯诸君子不能言之，即隶首商高亦不得而言之也。①

即，虽然利玛窦很早便在中国传授及翻译欧洲测量方法，但其法所“系之义”却只有在1607年《几何原本》译成之后才得到阐明。从其所举之例我们可以看出，所谓的义，可以被视为一个算法成立的理论基础，亦可被理解为算法的证明。这相当于含蓄地指出，由于中国没有《几何原本》这样的著作，所以中国数学家无法阐明其测量方法的根本原理，即使是隶首、商高那样的古代圣人“亦不得而言之也”。《测量法义》的主要内容是利用测影计算物之高远的方法，就具体内容来看，并不超过传统数学中刘徽重差术的水平。但徐光启并不了解传统的与测量高远相关的最出色的测量及计算方法，所以，他认为多于立一表的测量方法为欧洲方法。该书的叙述方式完全采用《几何原本》中命题式的严谨的描述方法，经常引用《几何原本》中的命题，且以《几何原本》中的证明方式给出各题证明。这便是徐光启在其序言中所强调的，只有在《几何原本》译成后，测量方法中所系的“义”才能被解释清楚的意义。②

《测量法义》译成之后，徐光启自著了《测量异同》和《句股义》二书。

《测量异同》通过对6个算题具体比较传统测量方法和欧洲方法的异同。徐光启虽未注明这6题的出处，但他们都包括在程大位的《算法统宗》和吴敬的《九章算法比类大全》之中。③徐光启称，“《九章》算法勾股篇中，故有用表、用矩尺测量数条，与今译《测量法义》相较，其法略同，其义全阙”④。徐光启指出，在6题之中，有3题与新法，即《测量全义》中的方法相同，徐光启还给出了与这3个问题相当的《测量法义》中的题目的题号。⑤他指出：处理其他3题的方法虽与这3个问题有所不同，但与新法“同法同论”，即其证

---

① 徐光启．测量法义序．测量法义．天学初函本．1a．

② 利玛窦，徐光启译．测量法义．天学初函本．

③ 安国风在其 *Euclid in China – the Genesis of the First Translation of Euclid' s Elements in* 1607 *& its Reception up to* 1723 中对《测量异同》中各题的来源做了具体的分析。见：Peter M. Engelfriet. *Euclid in China*. 198—301.

④ 徐光启．测量异同．天学初函本．1a．

⑤ 安国风分析，实际上，徐光启称与新法相同的三题的具体计算方法与《测量法义》中的算法并不完全一致。徐光启称两法同是由于两种方法的证明是一致的。见：Peter M. Engelfriet. *Euclid in China*. 298—301.

明和运算方法的本质是一样的。徐光启给出了这3个题目的证明。其证明方法与《几何原本》中的方法非常相似。

在《句股义》中，徐光启试图以《几何原本》中的严谨的证明方式阐述中国传统勾股术。徐光启称：

> 句股即三边直角形也。底线为句，底上之垂线为股，对直角边为弦，句股上两直角方形并与弦上直角方形等。故句三、股四则弦必五（一卷四十七注）。从此可以句、股求弦，句、弦求股，股、弦求句（一卷四十七注）。可以求句股中容方、容圆，可以各较求句、求股、求弦，可以各和求句、求股、求弦，可以大小两句股互相求，可以立表求高深广远，以通句股之穷，可以二表、四表求极高深极广远，以通立表之穷。其大小相求及立表诸法，《测量法义》所论著略备矣。句股自相求，以至容方、容圆、各和、各较相求者，旧《九章》中亦有之。第能言其法，不能言其义也。所立诸法芜陋不堪读。门人孙初阳氏删为正法十五条，稍简明矣。余因各为论撰其义，使夫精于数学者，揽图诵说，庶可为之解颐。①

从这段文字中，我们大致可以了解徐光启撰写《句股义》的目的、过程及该书中命题和证明的表述方式。在《测量异同》中称中国传统的测量方法与《测量法义》中的方法基本一致，只是缺乏解释及证明以后，徐光启此处进一步称，传统数学著作是“不能言其义”，相对于《测量法义》的“不言何以必等，能相求也”及《测量异同》的“其义全阙”，《句股义》中的论述显得更为强硬。徐光启明确地称《九章算术》中的方法“芜陋不堪读”，表示出他对传统勾股术及测量方法的态度。徐光启称，他的学生孙元化将《九章算术》中的数十个问题归结为15个问题。徐光启为这15个问题“撰其义”，从内容上来看，即给出了这15个问题的计算方法的证明。在《句股义》的序言中，徐光启还称，“勾股遗言，独见于《九章》中，凡数十法，不出余所撰正法十五条。元李冶广之，作《测圆海镜》，近顾司寇为之分类释术，余欲为说其意，未遑也”。即，传统勾股问题仅见于《九章算术》中，而《九章》中的方法不出其书中所给出的15条，这样，通过以欧洲几何学和测量方法对《九章算术》中相关内容的重新阐释与证明，徐光启便可将传统测量方法建筑在欧洲方法的基础之上，从而使欧洲数学涵盖传统方法。从现代人的观点来看，我们确实可以以

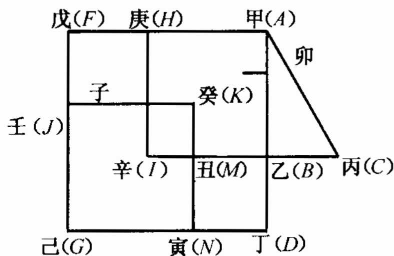
---

① 徐光启．句股义．天学初函本．1a—b．

西方几何方法证明和解释传统几何和测量方法，徐光启的目的是可以达到的。但徐光启却并没有完全实现他的目标。安国风的研究显示，《句股义》中并未收入《九章算术》勾股章中的 24 个问题，且书中尚有 3 题不属于《九章算术》，这 3 题均含于《算法统宗》①。所以，徐光启并未全部解决《九章算术》中的勾股类算题的证明问题。同时，徐光启自称，他亦读到元代数学家李冶的《测圆海镜》，他也曾试图以类似的方式用欧洲几何方法证明其中的数学内容，但当时他没有时间完成这一工作。所以，他尚未将全部传统数学中的相关问题纳入欧洲几何学体系之中。实际上，徐光启仅仅以传统数学著作中讨论过的算题为基础探讨中、西数学的关系的做法是不具一般性的。因为即便他给出了所有他所见到的传统数学问题的欧几里得式的证明，他仍不能令人信服地得出西方几何学涵盖传统几何方法的结论。清代初年，梅文鼎以类似的方式试图得出勾股术涵盖西方几何学的论断。

前述引文中，徐光启以翻译著作中新创的关于直角三角形的名词术语解释勾股术的相关概念，从中亦可以看出他欲以西方数学重新阐释勾股术的意图。下面，让我们来看看徐光启是如何以欧几里得式的证明方法阐述勾股问题的。《句股义》的前 3 个问题为已知勾、股求弦，已知勾、弦求股及已知股、弦求勾的问题，徐光启仅引述《几何原本》卷一第 47 题对这 3 题给出了说明。除此 3 题之外，徐光启在他的证明中亦多处引用《几何原本》中的定理及尽量使用《几何原本》中介绍的关于相似三角形和全等三角形的理论。然而，通过对该书内容的分析，我们可以发现，他的方法并不完全是欧几里得几何式方法。此处，我们引述书中的第 11 题：

句股和，求股、求句。



法曰，甲丙弦四十五，甲乙、乙丙句股和六十三，求句、求股。以弦自之，得二千〇二十五，句股和自之得三千九百六十九，相减得一千九百四十四。复与弦幂相减得八十一，开方得句股较甲卯九，加和得七十二，半之得甲乙股三十六，减较得乙丙句二十七。

论曰：以句股和作甲丁一直线，自之为甲己直角方形，此形内

① Peter M. Engelfriet. *Euclid in China*. 301—309.

函甲辛、癸已两股幂，乙寅、庚壬两句幂，而甲辛癸巳之间重一癸辛直角方形。夫甲丙弦之幂即与句股两幂并等（一卷四十七），以减甲己形内之甲辛、乙寅两形，即所存戊辛寅磬折形少于弦幂者为癸辛形矣。乙辛股也，乙丑句也，则丑辛较也。①

该题为已知弦及勾股和求解直角三角形的问题。我们简要重述该证明过程：徐光启首先作以勾股和为边的正方形 *ADGF*，其中含两个以股为边构成的正方形 *AI* 与 *KG*。正方形 *BN* 和 *HJ* 为以勾为边的正方形。正方形 *AI* 与 *GK* 有一相交的区域，小正方形 *KI*。由于 *AC* 的平方等于 *AB* 的平方加 *BC* 的平方，在正方形 *AG* 中减去 *AB* 的平方，可得 *FIN* 矩折形。该矩折形与弦的平方的差为小正方形 *KI*。*BI* 为股，*BM* 为勾，则丑辛（*MI*）为勾股较。如以 a、b、c 分别表示直角三角形的勾、股、弦，则上述证明相当于证明了：$(b-a)^2=2c^2-(a+b)^2$，利用该勾股恒等式，我们便可以在已知弦和勾股和的情况下求出勾股差。利用勾股差和勾股和，便可求出勾和股。上述证明是一个严格的证明。但熟悉欧几里得几何的人都知道，《几何原本》中并没有介绍这样的证明方法。实际上，利用面积的分合移补确立几何公式的正确性是中国传统数学的基本证明方法。徐光启所述的证明方法本质上是传统方法。

徐光启在《句股义》中使用中国传统证明方法是很自然的。在《几何原本》中，直角三角形只是一类特殊的三角形，欧几里得并没有对其大费笔墨，此外，他并不关心几何图形的数量关系和计算问题。所以，我们很难从《几何原本》中找到勾股恒等式的证明方法。《测量法义》所关注的是测量高远的问题，与中国传统数学中的立表测量的方法可以建立起直接联系，但传统勾股术所包含的内容并不仅是勾股测量问题，这样，徐光启无法从这两部书中找到能够证明他所列的《九章算术》和《算法统宗》中的所有勾股类问题的算法正确性的方法。如前所述，利用几何图形及立体的分合移补证明几何命题和计算程序的方法是中国传统数学中的常用方法。元代数学家李冶的《益古演段》中即利用这种方法证明书中勾股公式。我们没有证据证明徐光启曾读过《益古演段》，但当时流传甚广且徐光启很可能读过的《算法统宗》中含以演段法说明开方程序证明，其方法与徐光启给出的证明方法在本质上是一致的，徐光启很可能是借鉴了这些传统的证明方法证明《句股义》中

① 徐光启．句股义．天学初函本．18a—19a．

的勾股公式的。19世纪初，数学家李锐以同样的证明方法系统完备地给出勾股运算公式的证明。我们将在第三章中分析李锐的工作。

《几何原本》、《测量法义》、《测量异同》、《句股义》是四部有着密切联系的著作，《几何原本》介绍了欧几里得演绎推理的几何学体系，《测量法义》则介绍了欧洲几何测量方法。从某种角度来说，该书可以被视作是《几何原本》中的几何学理论在实践中的应用。同时，借助《测量法义》，徐光启将欧洲的测量方法与中国传统方法联系了起来，由此，他撰成《测量异同》，对两种测量方法进行比较。在《句股义》中，他则要进一步将传统勾股术建筑在欧几里得几何学的基础之上。经过这些工作，他要向世人证明，耶稣会士引入的几何学是一个严格可信的理论体系，它可以完全包容中国传统的几何方法。由此，则“虽失十经，如弃敝屣矣”[①]，即，虽然很多古代的数学著作和数学方法失传了，但有了从欧洲传入的方法，我们便可以像丢弃旧鞋一样不用再在意那些传统的方法和著作了。徐光启在不了解古代数学成果的情况下做出这样的结论显然是不可取的。然而，在了解了徐光启翻译《几何原本》的意图之后，我们就可以更为清楚地理解徐光启的动机和立场。徐光启正是要利用《几何原本》来证明欧洲传教士介绍的知识都是有理有据值得信赖的，以扩大天主教在中国的影响。这样，通过对耶稣会士介绍的几何学对中国传统几何学的优势的明白剖析，便可进一步提高耶稣会士的地位，这对于耶稣会士和皈依天主教的徐光启来说都是十分重要的。

皈依天主教的徐光启需要凭借欧洲数学知识的严谨性和学术性以扩大天主教在中国士大夫阶层中的影响，作为一名忠诚尽职的朝廷官员及儒家士大夫，徐光启被誉为：具“忠亮匪躬之节，开物成务之姿”。“博究天人而皆主实务”[②]。纯粹数学研究虽不涉及民生日用及国家社会的稳定直接相关的事务，但它与徐光启所关注的水利、农业、军事等有着密切的联系。用徐光启本人的话来说，“算历虽无切于用，未必更无用于今之诗文也。况弟辈所为算历之学，渐次推广，更有百千有用之学出焉。如今岁偶尔讲求数种用水之法，试一为之，颇觉于民事为便”[③]。在《句股义》序中，徐光启亦称，“方今历象之学，或岁月可缓，纷纶众务，或非世道所急。至如西北治河，东南水

① 徐光启．同文算指序．同文算指．天学初函本．4a．

② 陈子龙．农政全书凡例．农政全书．

③ 徐光启．函件．式古堂书画汇考．引自：梁家勉．徐光启年谱．100．

利，皆目前救时至计”[1]。即，他认为天文历法等问题是可以缓图的，而治河、水利则是刻不容缓的“救时至计”。然“水法一事，象数之流也”[2]，这样，他便将耶稣会士传授的数学知识与治河、水利联系了起来。在这方面，徐光启并未止于理论研究，他于 1612 年与熊三拔合译成《泰西水法》，该书介绍了 6 种欧洲提水机械及水利工程知识，并包括亚里士多德的四元素说及水元素的性质等欧洲自然哲学知识。书中以《几何原本》中的几何学术语解释各种器械的构造，并利用毕达哥拉斯定理（即勾股定理，《几何原本》第一卷命题四十七）解释测量方法。如此，则体现出《几何原本》等书中介绍的欧洲数学知识的经世用途。

沈㴶教案之后，徐光启虽然上《辩学章疏》为天主教及传教士们辩护，但并未起到很大效果。传教士们或被遣送出内陆，或隐匿于李之藻、杨廷筠等信教士人提供的庇护之所，不敢公开活动。

1618 年，努尔哈赤兴兵，徐光启将其关注的焦点由农耕、水利及御倭等事务上转至抗清方面。同年，钦天监监副周子愚奏请令邢云路及徐光启、李之藻等参与改革历法。1619 年，他受命训练新兵。此后，他陆续撰成练兵、战术及火器施用等方面的著作若干种。1620 年，他函托李之藻、杨廷筠等派人至澳门购买欧洲火炮。1621 年，徐光启称病辞官休养，至天津屯田。同年，清军攻破辽阳，徐光启重新被起用，他上书力请多造西洋大炮，以资城守，并建议起用李之藻督修火器。其时，适金尼阁所招募之邓玉函、汤若望等抵达澳门。这批传教士分批进入中国内陆。不久，徐光启被御史邱兆麟所劾，再次引病归田。1623 年，徐再次就职礼部，出任右侍郎，1625 年，为魏忠贤党智铤所劾，去官。1628 年，崇祯登基，徐光启被招还，以左侍郎理礼部事。同年，他被任命为经筵讲官。1629 年，加太子宾客。同年 6 月 21 日，钦天监推测日食再次失准，徐光启以西法推算得验。礼部上疏，议用西历。徐光启奉旨督修历法。

1629 年 9 月 23 日，徐光启上《条议历法修正岁差疏》，除条分缕析地给出历法修订的原因与步骤外，还陈上“度数旁通十事”，称，“历象既正”，“则一切晴雨水旱可以约略豫知，修救修备，于民生财计大有利益”。“度数既明，可以测量水地，一切疏濬河渠，筑治堤岸，灌溉田亩，动无失策，有益民

---

① 徐光启．句股义序．句股义．天学初函本．2a．

② 徐光启．泰西水法序．泰西水法．2a．

事”。“度数与乐律相通，明于度数，即能考正音律，制造器具，于修定雅乐可以相资”。“兵家营阵，器械及筑治城台池隍等皆须度数为用。精于其法有裨边计”。“算学久废，官司计会多委任胥吏。钱谷之司关系尤大，度数既明，凡九章诸术皆有简当捷要之法，习业甚易，理财之臣尤所亟须”。“营建屋宇桥梁等，明于度数者力省功倍，且经度坚固，千万年不圮不坏”。“精于度数者能造作机器，力小任重，及风水轮盘诸事，以治水用水与凡一切器具，皆有利便之法，以前民用，以利民生”。“天下舆地，其南北东西、纵横相距、纡直、广袤及山海原隰、高深广远，皆可用法测量，道理尺寸，悉无谬误”。“医药之家，宜审运气，历数即明，可以察知日月五星躔次与病体相视乖和顺逆，因而药石针砭不致差误，大为生民利益”。“造作钟漏，以知时刻分秒，若日月星晷不论公私处所南北东西，欹斜坳突，皆可安置施用。使人人能分更分漏，以率作兴事，屡省考成”。[①]胪举利用天文数学知识可以解决的与民生日用及战守相关的实学问题。

徐光启除参与翻译欧洲天文书籍、制造天文仪器等与历法改革相关的事务之外，还要监督修造欧洲火炮、训练战守等事，在他的疏请下，耶稣会士可以再次公开在北京活动，并参与了所有这些事务。1630 年 8 月 2 日，他升任礼部尚书兼翰林院学士，协理詹事府事，1632 年，徐光启以本官兼任东阁大学士，入参机务。次年卒于官。

受徐光启的影响，他的学生孙元化也皈依了天主教，并对西方数学有所研究。他曾著有《几何体论》、《几何用法》、《泰西算要》诸书，孙元化还帮助徐光启完成了《句股义》。

综上所述，最早理解欧几里得几何体系的中国学者徐光启并不完全是因他对数学本身的重视而翻译欧洲数学著作的。他研究欧洲数学的直接动机很可能有两个。其一，利用欧洲数学严谨的证明体系，徐光启希望中国士大夫们能够看到，欧洲传教士们是知识卓越的学者，他们所传播的学术及宗教知识都是建立在理性基础之上，是可信的，从而达到其以天主教补儒易佛的目的。其二，数学对于修订历法及其他与社会稳定、民生日用、国家安危密切相关的事务很有裨益。

徐光启和李之藻二人虽然都皈依了天主教，但他们对欧洲数学知识的态度并不完全相同。李之藻是被西方科学知识所吸引的，他的皈依可被视

---

① 徐光启．条议历法修正岁差疏．治历缘起．新法算书．四库全书本．卷一．25b—27b．

为利玛窦以科学知识吸引中国学者以促进传教的策略的成功典范。徐光启则是被天主教本身所吸引的。但吸引徐光启的天主教是已被利玛窦等改造过的天主教义，其中，作为宗教的天主教中的超验内容被弱化了，利玛窦向中国人展现的上帝只是哲学的天主，灵魂、天堂也只是哲学意义上的灵魂与天堂①。而与儒教道德观有相似之处的托马斯·阿奎那哲学体系中关于人性和伦理的部分则被强化，由此出发，利玛窦不难从中国古代儒学经典及朱熹的著作中找到论据。正缘于此，徐光启在其著名的《辩学章疏》中可以坦然地建议，将西士带来的书籍全部译成汉文，然后由朝廷大臣审查其内容，看是否违背中国先圣的遗训。如“果系叛常拂经，邪术左道，即行斥逐”。他自己亦甘受扶同欺罔之罪。这样，徐光启是基于对天主教教义的一种错位的理解而皈依天主教的。所以，徐光启的皈依可以说是利玛窦附儒的适应的传教策略的成功范例。当然，徐光启和李之藻均不是盲从者。他们各自以自己的方式对利玛窦所传授的知识进行了验证。李之藻通过实测发现利玛窦讲授的欧洲舆地学、宇宙论方面的知识是正确的，同时，耶稣会士们对日、月食的准确推测很可能也使得李之藻更加确信传教士们介绍的知识。徐光启则很可能将利玛窦在《天主实义》中引用的儒学经典作为其验证天主教是否可信的一个依据。此外，他亦可能通过《几何原本》中严谨的证明体系进一步相信了利玛窦等传授的知识及其宗教教义。其他皈依者如王徵、杨廷筠等可能也对天主教有与徐光启类似的看法。②我们知道，王徵在明亡后自杀殉国，他的行为只能够用儒家伦理道德观来解释，因为从本质上来说，该行为完全违反了天主教教义，因为天主教反对自杀，且不承认异教的世俗帝王的地位与权力。

通过有限的测验，徐光启、李之藻等归纳地得出耶稣会士传入的知识及天主教教义均是可信的结论，作为皈依者，他们也相信了传教士所说的，他们传入的知识是一个整体，学习者可以自我检验其真伪的数学、天文学、舆地学等知识为形而下者，通过这些知识可以验证形而上的自然哲学和天主教教义的正确性③。以此为基础，他们相信和接受了传教士们引入的知识。

---

① 孙尚扬．基督教与明末儒学．79．

② 王徵阅读庞迪我所著《七克》后对天主教发生兴趣，后通过于庞迪我的讨论皈依天主教。关于王徵在传播西学方面的贡献及其对天主教的理解，详见：任大援．王徵：西学与新思想的传播者抑或一个天主教徒．339—359．

③ 这一点可以从李之藻所编辑的《天学初函》的结构看得出来。

但他们显然未对耶稣会士们引入的所有知识作过系统的检验。阳玛诺的《天问略》被收入《天学初函》，该书介绍被改造过的水晶球体系，1600 年吉尔伯特就曾对这一体系提出过诘难："到底有谁曾经据理证明，确实有什么坚如铁石的水晶球？这一点是从来无人加以证实的，而且无可怀疑，这一望无际的灿烂恒星正和距地远近不同的行星一样，和地面隔着不同的遥远距离——它们并不是固定在什么球形框架或天穹之上的。"①

三、明代末年其他学者对西学的态度

与徐光启和李之藻同时，一些未皈依天主教的士大夫亦对传教士介绍的科学知识做过研究。熊明遇、周子愚及方以智是其中有代表性的人物。

熊明遇(1579—1649)，1601 年成进士，1602 年任浙江长兴知县，为官颇有政绩。1610 年，他被擢为兵科给事中。1613 年赴京履任。当时东林党人和非东林党人的争斗正趋激化，熊明遇积极支持东林党的主张。正是在此期间，他结识了庞迪我、熊三拔、阳玛诺及毕方济等耶稣会士，并接触到耶稣会士传授的欧洲知识。1614 年，他为庞迪我的《七克》作序，同年，他又为熊三拔和周子愚等合译的《表度说》作序。大约也是在这一年，他撰《历法议》一篇，文中引用西方天文学知识。1615 年，他为阳玛诺所撰的《天问略》校稿。大约于 1616 年，他受非东林党人的排斥，出为福建福宁州佥事。1621 年，被擢为尚宝少卿，转年升为太仆少卿。不久，迁为南京右佥都御史。1625 年，魏忠贤矫诏去其职。同年，魏忠贤将东林党人姓名标识全国，熊明遇名列其中。崇祯元年，熊明遇被起为兵部右侍郎。次年升为左侍郎。1631 年拜兵部尚书。后被弹劾致仕。1642 年，复起为参赞，迁南京兵部尚书，使南京免受兵锋骚扰。同年 7 月被免职。明亡后，他携子辗转避战祸，卒于 1649 年。②

在《七克》引中，熊明遇称："西极之国有畸人来……绝海九万里，观光中国，斯亦勤矣。所携图书巧作及陈说海外谣俗风声，异哉。"③"精天官日历算数之学，而犹喜言名理，以事天帝为宗。傅华语，学华文，篝灯攻苦，无异

---

① 吉尔伯特．论磁．转引自：李约瑟．天文学．中国科学技术史．647．

② 参见：冯锦荣．明末熊明遇〈格致草〉内容探析．

③ 熊明遇．七克引．七克．1a．

儒生。真彼所谓豪杰之士也。”[①]

熊明遇最重要的介绍西学的著作为《格致草》，该书原名《则草》，成书于1615年前后。崇祯年间，熊明遇重新修订和扩充后，更名为《格致草》。该书内容包括欧洲天文学、气象学、西方哲学、世界地理和博物学等方面知识。书中广泛征引了当时出版的西方译著及徐光启、李之藻等编著的著作。据冯锦荣统计，利玛窦的《乾坤体义》、《坤舆万国全图》，李之藻所编的《天学初函》，傅凡际的《寰有诠》，高一志的《空际格致》及《崇祯历书》，以及汤若望的《远镜说》等书中的内容均在该书中被引用。[②]由于书中很少涉及数学知识，故我们此处对其内容不做重点分析。我们对熊明遇在该书中表现出来的对西学的态度更感兴趣。

熊明遇《格致草》中提出“西学中源”的论点，并设计出“中学西传”的过程：

> 上古之时，六符不失其官，重黎氏叙天地而别其分主，其后三苗复九黎之乱德，重黎子孙窜乎西域，故今天官之学，裔土有专门。[③]

熊明遇在《格致草》中每节介绍西方知识之后，都会附载“古圣贤之言”，以为西说提供“徵”、“据”，以示其对西学“不尊不信，无徵不信，尊而徵矣，窃附于好古之述”，以表明他“不妄作”的治学态度。这暗示出，他要重新审视传入的西学知识，只相信其中有徵、有据，即可信的部分。值得我们注意的是，熊明遇对西学的态度是有明显变化的。1614年，在《表度说》序中，熊明遇称：“西域欧罗巴人四泛大海，周遭地轮，上窥玄象，下采风谣，汇合成书，确然理解。仲尼问官于郯子曰：‘天子失官，学在四夷’，其语犹信。”[④]此处，熊明遇认为欧洲的知识是通过欧洲人“上窥玄象，下采风谣”自己成就的“确然理解”，这与其在《格致草》中说的的欧洲“天官之学”是由“重黎子孙窜乎西域”而带去的这种“西学中源”的说法迥不相侔。虽然《表度说》和《格致草》都是以介绍欧洲知识为主的著作，而熊明遇疏通中西隔阂，倡导西学的态度也没有改变，但他对欧洲天文起源的论述却有了本质的改变。我们固然可以猜

---

① 熊明遇．七克引．七克．1a—2b．

② 冯锦荣．明末熊明遇〈格致草〉内容探析．

③ 熊明遇．格致草自序．格致草．

④ 熊明遇．表度说序．表度说．4a．

测熊明遇对经典著作中与欧洲科学知识相关的内容做了进一步的梳理，从而有了新的观点。但不应忽视的是，《表度说》和《格致草》的最后完成之间，相隔了一个南京教案。南京教案之后，士大夫们对西学的态度更为审慎，在此背景下，熊明遇进一步强调其对西学"无徵不信"的态度，其徵故可以来自实测，亦可来自中国经典。但重要的是，天主教义是无法通过这两种途径所证明的，熊明遇含蓄地表明了他不信教的态度。同时，我们也可以据此推测，教案之后，欧洲知识在中国的传播变得更为艰难，这很可能是熊明遇转向"西学中源"说的一个重要理由。与徐光启等不同，熊明遇并未皈依天主教，所以，在南京教案期间，他并没有为传教士们辩护。他对传教士传来的知识也有所选择，除与天文、舆地等相关的属于科学范围的知识外，他只为《七克》作过序。所谓"七克"即克服"骄傲"、"嫉妒"、"悭恪"、"忿怒"、"迷饮食"、"迷色"、"懈惰干善"七种情绪及习惯，这与儒学的道德标准相一致。故熊明遇在其序中称，"不意西方之士，亦我素王之功臣也"①。

周子愚是钦天监监副，他主动向传教士学习西方天文学知识。周子愚曾与利玛窦"谈律吕之学"，见利氏之学精实，可补中国典籍所无，故他希望向利玛窦学习历法。利玛窦去世后，他又向龙华民提及学历之事。龙华民虽然对传播科学兴趣不大，但还是答应让熊三拔传授周氏欧洲天文知识。1610 年 12 月，钦天监预测日食失准，范守己上疏摘其谬，礼官因请博访知历者，令与钦天监一起推测。当时任钦天监五官正的周子愚上书称：大西洋归化庞迪我、熊三拔等携有彼国历法，多中国典籍所未备者，乞视洪武中译西域历法例，取知历儒臣率同监官将诸书尽译，以补典籍之缺。1612 年 1 月，礼部奏请举荐范守己、邢云路共理历事，徐光启、李之藻可与庞迪我、熊三拔同译西洋历法。同时，谴责钦天监官员多不"留心历法"，"至于天文、阴阳人等"，更是"罔习本业"，要求对钦天监大加"振刷"。在此背景下，周子愚于 1614 年与熊三拔一起翻译了欧洲天文学著作《表度说》，并称："立表取影，西国之法为尽善矣……则表度之法信治历明时之指南也……大西洋诸君子所携本国书典，其种甚广，各极其妙。我中国人当一一传而译之。"②《表度说》的内容主要是讲解立表取日影，以测知时刻节气之法。书中采取欧洲几何测量方法并引用亚里士多德的自然哲学理论解释宇宙的结构及物体运动

① 熊明遇．七克序．2b．

② 周子愚．表度说序．表度说．1a—3a．

的方式和原因等。在《表度说》的行文中，熊三拔亦不失时机地加入天主为世之主宰，世上万物的性质都是由天主创世时所规定的之类宣传天主教义的内容，但作为钦天监官员，周子愚所关心的只是与制订历法及测候相关的知识。称："圭表，我中国本监虽有之，但无其书，理未穷，用未著也。"[①]当他发现传教士带来的书籍中有介绍利用圭表的理论和方法时，便请龙华民将这一内容翻译成中文。龙华民于是委托熊三拔与周子愚一起翻译成《表度说》。周子愚对西学的选择有着明显的目的性。

方以智是明清之交一位活跃的学者。方以智(1611—1671)，字密之，安徽桐城人。方以智自幼博通经史，旁及舆地、医学、数学、历法、机械等内容。1619年随其父至福宁任，其父向熊明遇问学，方以智亦"喜其精论"[②]，他很可能从此开始对西学感兴趣。曾读《天学初函》，但"多所不解"。1636年，方以智结识毕方济，便向其请教。但毕方济对与"历算、奇器"相关的问题，"不肯详言"，"问天事，则喜"。1640年，方以智至北京，并成进士。擢翰林院检讨。此后，他曾于工部观政，任定王讲官、永王讲官等职。很可能在此期间，他获交汤若望，并交从甚密。明亡后，亡命岭南，曾为永历朝翰林学士知经筵，知不可为，于是出家为僧，号"无可"。[③]

方以智虽对西方知识感兴趣，但他对西学的态度则极为冷静。1641年，在《物理小识》序中，他称，"盈天地间皆物也"。"天地一物也，推而至于不可知，转以可知者摄之"，"是物物神神之深机也。寂感之蕴，深究其所自来，是曰通几。物有其故，实考究之，大而元会，小而草木虫蠕，类其性情，征其好恶，推其常变，是曰质测。质测即藏通几者也"。"万历年间，泰西学入，详于质测，而拙于言通几；智士推之，彼之质测犹未备也"。[④]根据他的分类法，《天学初函》中的"理"的部分均属"通几"之学，而"器"部则属于"质测"。方以智称西学详于质测，拙于言通几，相当于否定了传教士引入的宗教及自然哲学知识的价值。对于传教士们引入的质测，即器部的内容，他亦未完全肯定，认为这些西方知识犹有未备。方以智所撰《通雅》和《物理小识》的主要内容亦属"质测"范畴，书中引述了一些传教士介绍的知识，但他认为这些

① 周子愚．表度说序．表度说．2a—b．
② 方以智．物理小识．
③ 任道斌．方以智年谱．
④ 方以智．物理小识自序．物理小识．1a—b．

都是中国已有的知识，并非西方所独擅。他认为这可以作为“天子失官，学在四夷”之说的证据。《通雅》中含“算数”一卷，卷初按“九数”分类介绍了一些数学方法及中国古代数学源流。此后，有数字单位换算及中国度量衡制的演变等。方以智的主要兴趣在于训诂、名物，故书中涉及的数学内容并不多。据其子方中通称，方以智晚年对西方知识失去了兴趣，他甚至拒绝谈论天文学知识。很可能是受方以智早年阅读西学著作的影响，方中通自幼学习数学，入清后，曾随穆尼阁学习。在下一章中，我们会介绍方中通的情况。

明末皈依天主教的士大夫为数很少，其中只有一小部分乐于学习西方数学知识，这一小部分人又多不是数学专家。很可能正是基于这个原因，当时民间出版的以西方数学内容为主的著作并不多，其中最重要的为《几何原本》、《同文算指》、《测量法义》等。《几何原本》作为一部表现欧洲学者及传教士的理性程度的著作，得到了一些学者的关心与赞赏，但这些学者大多并不致力于数学研究，他们虽然由此更为看重传教士及他们所传授的知识，却似乎并未究心于《几何原本》中介绍的数学体系，亦未在中国数学的严格化方面做出任何努力。《同文算指》介绍了欧洲的笔算及计算方法。但对于一般计算，笔算并不比珠算更为方便，这样，笔算虽然为少数精通数学的学者所采用，但并没有在民间得到普及。此外，在很多方面，当时欧洲的计算水平并不高于中国，明代很多传统数学著作和数学成果失传，徐光启、李之藻等在此基础上得出欧洲的计算方法优于中国传统算法的结论，但到清代中期，经过对传统数学著作和成果的整理，很多数学家转而论述中国传统数学的优势。《测量法义》中将欧洲数学应用于测量方法。这些方法并不甚异于中国固有的方法，徐光启所强调的是传统方法没有详细叙述其方法中所蕴含的数学原理。但对于实际测量的人来说，他们不会对欧几里得式的证明倾注太多的心力，徐光启的著作虽然显示了欧洲数学注重理论研究的特色，但在当时动荡的社会局势中，这既不足以将空言心性或致力于党争的士大夫吸引到数学研究中来，亦不足以使参与实际测量的人员改弦更张。直至五十余年后，清代数学家们才在相对稳定的环境下认真审视徐光启的著作，并表现出他们或赞同或反对的态度。

传教士在《崇祯历书》中引入的三角学知识对于中国数学家是新的内容，但在当时，明政权已岌岌可危，徐光启身兼数职，不可能有时间去宣传这一新的重要内容，李之藻很快去世，亦未能对该内容的研究和传播做任何贡献。中算家们对三角学的研究工作，也要等到入清之后才真正开始。

除皈依者以外，其他对欧洲知识感兴趣的学者多采取了更审慎且更具选择性的态度。他们或依个人兴趣及社会需要致力于一些特殊的学术分支，如熊明遇；或出于个人工作的需要，学习西方相关领域的研究成果，如周子愚。到明代末年，很可能受社会上对传教士的批评及对天主教教义的进一步认识的影响，学习欧洲知识的学者对欧洲知识进行重新考察，并开始反对传入的部分西方知识，方以智便是这类学者中的代表。

总之，明末五十余年间，欧洲数学被传入中国，并得到一部分学者士大夫的肯定与赞赏，但当时传入的知识还非常零散，亦未引起广泛的注意。下一章中，我们会看到，清代初年的学者是如何进一步消化和理解这些传入的数学知识的。

第二章　清代初期的“会通”与“西化”

如前章所述，明代末年，为了投兴趣不一的士子和学者所好，利玛窦等传教士使出了浑身解数，传播和推广理论性的天文、数学、地理知识，以及实用性的水力、机械、治定历法的数表和具体计算方法，甚至还有记忆术等。几经曲折，传教士们终于参与到修订历法的官方活动之中，从而具有了一定的官方认可的地位。有了这一地位的保护，传教士便可以在中国内地较为公开地传教，如由此再进一步，一旦欧洲的天文历法被确定为王朝的钦定历法，传教士便可藉此进入钦天监，直接接近帝王。利玛窦为之奋斗半生的目标似乎指日可待了。

传教士地位的变化严重影响了他们传播科学知识的方式和内容，并进而影响了西方数学在中国的传播及研究。简单来说，参与制订定历法的传教士只需掌握一定的欧洲天文历法知识就足够了，这使得他们传播知识的内容趋于狭窄。同时，为了能够长期占据钦天监的位置，传教士很可能并不想将他们在制订历法时所用到的欧洲知识尽授于中国学者。所以，他们可能在中西知识的会通及欧洲知识的普及方面并不积极。在耶稣会士看来，借助推行西方历法，西方学术的优越性便可得到很好的体现，但明代皇帝只肯称之为新法，而拒绝西字，这使得参与历法修订的汤若望等非常失望。入清之后，新的朝廷给与汤若望及其他耶稣会士以更大的传播“西法”的自由。然而，这一自由是否真的使传教士引入的知识在中国得到更为广泛的流传并扎下根来呢？

第一节　清初欧洲数学知识的传播及社会文化背景

一、清代初年欧洲数学知识的传播

1644年4月,李自成占领北京,崇祯帝自缢于煤山。同年6月,清兵入京。在混乱的局势中,汤若望将《崇祯历书》的书稿及一些明末制造的天文仪器藏于教堂之中。6月15日,多尔衮下令,城中非满洲人必须在三日内搬到城外。汤若望上表称:他曾受前明皇帝之命修订历法,当时的北京教堂中藏有大量的与修订历法相关的书籍、天文仪器以及宗教经籍与礼器,三日内无法将这些书籍、仪器安全运出北京。这些测量天象的仪器大多数来自西洋,如有损坏则“修整即非容易,购买又非可随时寄来”,所以,他恳请清帝能让他和龙华民等继续留居在教堂之中。他的请求得到了批准,天文书籍和仪器又一次为耶稣会士留在北京做出了贡献。



利玛窦与汤若望

前章已经提到,汤若望是随金尼阁,与邓玉函、罗亚谷等一同来到中国的。汤若望(Johann Adam Shall von Bell,1592—1666),1592年5月1日出生。17岁时,他进入了耶稣会创办的罗马日尔曼学院(Collegium Germanicum)。

1611 年 10 月 21 日,他正式加入耶稣会。1613—1617 年间,汤若望在罗马学院学习神学。当时,克拉维斯已不再讲课,罗马神学院的数学教授为 Christoph Grienbergen。汤若望很可能在罗马神学院中学习了天文、数学等知识。1616 年初,汤若望递交了前往中国传教的申请,同年底,他的申请被批准①。1618 年 4 月 16 日,汤若望离开里斯本,跟随金尼阁踏上了前往中国的航程。1619 年抵澳门。当时,受南京教案影响,传教士们还不能公开在中国居住。汤若望潜入中国,学习中文。1623 年,他来到北京。由于成功预报了当年 10 月和 1624 年 9 月的月食,使他得到了官方的赏识。1629 年,他刊印了《远镜说》,介绍望远镜。1631 年 1 月,他进入历局,主要负责有关恒星、交食的文献的译撰。此外,他还参加了为明代制造欧式火炮的工作。邓玉函和罗亚谷均在明代去世,汤若望为清初阐释《崇祯历书》的惟一权威。

1644 年 7 月 29 日,汤若望向清廷献上浑天星球、日晷、望远镜等三件天文仪器和一部依《崇祯历书》中的历法体系计算的历书范本。7 月 29 日,汤若望奏称,愿为清廷再造新的天文仪器,并进呈关于 9 月 1 日日食的预测,请求多尔衮着人届期测验,以定真伪。②8 月 3 日,清廷决定采用依西洋历算方法修订历法,从顺治二年开始颁布新历书。③9 月 1 日,大学士冯铨率钦天监官员及汤若望等登上观象台,根据当日的日食检验依据大统历法、回回历法及西洋历法得出的预测结果,其结果是:"西洋历法一一吻合,大统、回回两历俱差时刻。"④1644 年 9 月 8 日,清廷命汤若望"督率监、局官生用心精造新法,以传永久"。⑤10 月 30 日,顺治在北京行定鼎登基礼,清廷颁布基于《崇祯历书》制订的《时宪历》。12 月 23 日,汤若望被授为钦天监"掌印官",监中一切进历、占候、选择等事务,均听其令举行。1645 年 1 月,汤若望的身份成了"修正历法管监正事",他实际上成了钦天监的主持人。作为耶稣会士,汤若望是不能在任何世俗政府中为官的,因此,他上表请辞,但被驳

① 参见:A. Sprenger, Johann Adam Schall's Educational Foundation and the Intellectual Climate of His Time.

② 清世祖实录. 卷 5. 23b—24a.

③ 清世祖实录. 卷 6. 2a—b.

④ 清世祖实录. 卷 7. 1b.

⑤ 汤若望等改编. 西洋新法历书(提疏、奏疏,1629—1645 年).

回,这样,他便成为中国历史上第一位实际负责钦天监工作的欧洲人。① 1646 年,汤若望又被加赠太常寺少卿。1651 年,他被诰封为通议大夫。1655,加通政使司通政使衔,赐二品顶带。②1658 年,汤若望诰受光禄大夫,其祖上三代均得一品封典。

汤若望与顺治帝过从甚密,据称,1656—1657 年间,顺治访汤若望于馆舍 24 次,汤若望亦多次谒帝于宫中。其间,顺治曾以治道、政事相咨商,汤若望前后所上之奏疏、禀帖达 300 余件,顺治帝曾于这些奏疏中选出一批带于身边,于出宫行猎时随时阅读。1657 年,卫匡国(Martin Martini, 1614—1661)又招集了一批耶稣会士来华,其中便有对中国天文学和数学有很大影响的南怀仁(Ferdinand Verbiest, 1623—1688)。1660 年,应汤若望之请,南怀仁到钦天监协助汤若望工作。

作为钦天监的负责人,汤若望等耶稣会士垄断了宫廷内部天文事务,钦天监的官员也必须学习新的技术。③ 同时,利用其地位,汤若望自己也可以在钦天监官员及学生中传播天主教教义,钦天监里有很多人皈依了天主教④。但汤若望全权负责历法的修订,也将自身置于困境之中,这一困境部分是由中国历法的职能之一,也就是占星功能所带来的。⑤当时的民历中包含对每日举行各种祭祀及其他人类活动的吉凶的预测,根据教会的立场,这

---

① 汤若望为主持钦天监事务的第一位外国人,但他未被实授为钦天监监正,而是任“管监正事”。此后,清廷曾任命南怀仁为监正,但因他坚决推辞而改授“治理历法”,事实上他也像汤若望一样承担监正的职责。雍正三年,戴进贤被任命为监正,成为任此职的第一位欧洲传教士。戴进贤之后,刘松龄、傅作霖、高慎思、安国宁、索德超、汤士选、福文高、李拱辰、司鸿英、周庆余等依次继承戴进贤的职务。详见:薄树人. 清钦天监人事年表. 科技史文集. 第一辑(天文学史). 86—101.

② 清世祖实录. 卷 93. 5a—b.

③ 自顺治三年起,汤若望不允许进呈以回回历法推算的天象预测结果。

④ 参见:黄一农. 清初钦天监中各民族天文家的权力起伏. 韩琦. 奉教天文学家与“礼仪之争”(1700—1702).

⑤ 另一个为汤若望带来困境的原因是耶稣会士是不允许担任世俗职务的。实际上,他曾因接受清廷的官职受到其他修会修士及耶稣会内部的广泛批评。龙华民等曾一度上书罗马耶稣会总会要求开除汤若望的教籍。在选择传授知识的内容上,汤若望也没有完全的自由。17 世纪,南怀仁所著的《熙朝定案》的卷首上刻有:“尊教规,凡译经典诸书,必三次看样方允付梓。兹并镌订阅姓氏于后。”在这段文字之后,南怀仁列有:耶稣会中同学:高一志(即王丰肃)、毕方济共订,值会阳玛诺准。由此亦可见当时欧洲知识在中国传播的复杂情形。见:南怀仁. 熙朝定案. 卷首. 引自:天主教东传文献. 70.

一行为属于异教迷信活动。天主教徒只能为本宗教的祭祀活动和节日择日。[1]在华耶稣会士安文思曾撰文批评汤若望主持修定的民历中有迷信内容，并批评其担任监正一职有违耶稣会“不宦”的誓约。为了解决这一问题，汤若望特别撰写了《民历辅注解惑》一书，称：

> 小民日用，除嫁啬外，还有冠、婚、葬、祭、栋宇、衣服各等许多事件，朝廷家也曾预先酌定一个礼节，安排一个规矩，与同律度量衡一般，以便遵守了。还又见各处民情、大小事要选择日时，为是前代相传已久，习以为常。从来治国者，修其教不易其俗，齐其政不易其宜，这岂可违拗他。只因衍数繁多，一持一说，纷争不了，未免又误民事。不如划一定规，从中去取，勒成一书。也算作授时一类，付与历官铺注在民历上颁行，令各处都依着铺注上行，方是个一道同风的气象。[2]

沿着利玛窦解释中国礼仪的思路，汤若望指出，民历中有关吉凶时辰的规定只是为了方便国家对这类事务的统一规划，与“同律度量衡”具有同样的意义，这只是一种民俗，并不是天主教反对的迷信活动。也就是说，他所制订的历法中含有与吉凶日期的选定相关的内容是可以被天主教容忍的。书中，汤若望还分十数条论证其所编民历中涉及的选择内容。然而，汤若望虽然努力为他主持修订的历法中含有非天主教的迷信内容自圆其说，但他自己并不精通中国占星术，且似乎无意学习此术。在他初获钦天监领导权之时，他要求曾从耶稣会士学习过西法的秋官正刘有庆、贾良琦等人照旧本依每日干支直抄填写历注。此后，随着其地位的日益稳固，他试图将欧洲占星学引入中国民历，改革传统民历。但其改革与中国传统术数之学中阴阳生

---

① 制订民历，或称黄历，为钦天监的一项重要职能。民历上不仅有日期和节气，还需注有选择宜忌等问题。由于民历的选择术与天主教的教义不合，所以，奉教人士及耶稣会士曾多次批评民历的虚妄。但当时的西方历书中亦有星占内容。教皇希斯笃五世虽曾公开谴责占星术，但并未禁止历书。耶稣会士译撰的著作中也有偶涉占星术者，如傅泛济、李之藻合译之《寰有诠》，罗雅谷所撰的《月离历指》中都介绍了欧洲占星术。欧洲的占星术与天星的位置有关，而中国择日则多由年月日的干支决定，与自然现象并不是完全对应的。所以，天主教人士多将中国民历中的选择视为迷信。详见：黄一农. 中西文化在清初的冲突与妥协——以汤若望所编民历为个案研究. 431—438. 关于汤若望对天文和占星的认识，参见：Tiziana Lippiello, Astronomy and Astrology: Johann Adam Schall Von Bell, 404—428.

② 汤若望. 民历铺注解惑. 468—469.

克的理论基础产生矛盾，所以，不能得到民间的广泛认同。①这最终为杨光先提供口实，促成了第二次大规模教案。这一点我们还要在下文中提到。

清代帝王并非出身中原地区，在当时的士大夫眼中，他们属于蛮夷。这样，他们对传教士，也即士大夫们眼中的西夷，并不甚排斥。在这样的环境中，耶稣会士如鱼得水，"汤若望觉得已可随意使用'西'字"了②。在早期颁布的《时宪历》封面上，汤若望加上了"依西洋新法印造"的字样。这亦是日后杨光先攻击汤若望的一个依据。不仅如此，汤若望还将《崇祯历书》重新编辑成《西洋新法历书》103卷，其中含汤若望自撰的《历法西传》一卷和《新法表异》两卷③。在《历法西传》中，汤若望称：

> 西历古书大指而次则遂及余书④。盖一则著新法非一人之法，非近创之法，良由博古深思参互考订以得一真，无容妄议。一则令后之人便于循习晓畅，数百年后测审差数推往知来，善于变通也。或疑中西异法如格碍，何余谓天行无隐，君命非私。历至今日，中人亦西学矣。且即就中历而论，其根亦本于西。如列宿距星皆同，又列宿有属太阳者四，属太阴者四，亦同。是知根本既同，而清其枝干，通其脉络，有成书在。展卷研求，无不可见，岂足相难哉？学者勉之可也。⑤

在大胆言"西"之余，汤若望称，西法无容妄议，甚至称中国的历法源于西方。为此，他举出西方历法中和二十八宿相关的资料作为证据，他进一步称，掌握中国历法知识的人根本就没有能力质疑他所介绍的欧洲方法，即"岂足相难"。同时，在对中国历算方法没有进行深入研究的情况下，他进一步指出，"详考旧法，其错非在算数，乃在基本，不清其基而求积垒，不治其本而理枝干，其术未有济焉者"，也就是说，中国传统的治历方法从根本就错了，并不

---

① 关于汤若望对民历的改革及其引起的后果，详见：黄一农．中西文化在清初的冲突与妥协——以汤若望所编民历为个案研究．438—456．

② 李约瑟．中国科学技术史．第四册．674．

③ 《四库全书·新法算书提要》中称："《历法西传》、《新法表异》二种，则汤若望入本朝后所作。"纪昀，陆锡熊，孙士毅，陆费墀．四库全书·新法算书提要．2a．

④ 《西洋新法算书》最后成书于1645年。当时，参与《崇祯历书》翻译和修订的传教士邓玉函、罗雅谷及倡修和主持西法历书的徐光启、李之藻、李天经等均已谢世。入清后，汤若望将《崇祯历书》改写成《西洋新法算书》一百卷。他将这部大型著作说成是他自己的著述，故此处的"余书"，即指《西洋新法算书》。

⑤ 汤若望．历法西传．新法算书．四库全书本．卷98．1b—2a．

是计算问题。所以必须摈弃中国传统历法的一切内容，这相当于全面否定了徐光启在翻译西方历书时提出的翻译—会通—超胜的吸收西方历算知识的策略①。在《新法表异》中，汤若望列举四十二款中、西历法中的不同之处，以证明中法的疏陋②。

综上所述，在清初得到钦天监的领导权及专用西历之后，耶稣会士垄断了宫廷天文、数学的研究和教育，并进而公开地表现出他们藐视传统天文数学知识的态度。这些无疑会在中国学者和士大夫中激起反感。③

汤若望一心希望相信西方历法并对他礼遇甚隆的顺治帝皈依天主教，从而使得中国彻底对天主教打开大门。然而，相信西方的历法却并不意味着相信西方的宗教。顺治帝虽然和汤若望保持着密切的关系，但他似乎并无允许天主教公开传教的想法。1657 年 3 月 15 日，顺治帝为庆生日，宴诸王公大臣于汤若望馆舍，命于宣武门内汤若望所建之天主教堂前立碑，碑文称：

> 朕巡幸南苑，偶经斯地，其神之仪貌如其国人，常牖器饰如其国制。问其几上之书，则曰天主教之说也。夫朕所服膺者，尧舜周孔之道；所讲求者，精一执中之理。至于玄极贝文，所称《道德》、《楞严》诸书，虽尝涉略，而旨趣茫然。况西洋之书，天主之教，朕素未览阅，焉能知其说哉！但若望入中国已数十年，而能守教奉神，肇新祠宇，敬慎蠲洁，始终不渝，孜孜之诚，良有可尚。人臣怀此心以事君，未有不敬其事者也。朕甚嘉之，因赐额名曰：“通玄佳境”，而为之记。④

也就是说，顺治帝所嘉许的是汤若望对天主的忠心。了解到顺治帝一直对汉族官员对他的排斥和不忠诚的不满，我们也就可以理解他呼吁“人臣怀此心以事君”一语的深意了。但即便对汤若望的忠诚天主有如此的表彰，顺治帝还是强调他所崇仰的是儒家之道，他从未阅读过天主教的教义。相对来讲，他还肯承认他曾读过佛教的一些经典。由此可见，他对佛教似乎比对天主教更为重视。事实也是如此，顺治帝后来请来了憨璞聪、玉琳琇、木陈忞

① 汤若望．历法西传．新法算书．四库全书本．卷 98．15b．

② 汤若望．新法表异．新法算书．四库全书本．卷 99．

③ 认真研读过中、西历法的王锡阐、梅文鼎、江永等人都曾批评过汤若望轻议中历一事。参见：黄一农．中西方化在清初的冲突与妥协．442—451．

④ 顺治帝．天主教碑文．引自：史松，林铁军．清史编年．第一卷（顺治朝）．472．

等佛教禅师,并曾有过出家的想法。汤若望并没有在精神上控制住这位年轻的皇帝,使他皈依天主教。①

汤若望在得到钦天监领导权之后,自然会对钦天监内的欧洲天文数学知识的传播起到很大的促进作用。但他在当时似乎并未引入新的数学知识。清初,在传播欧洲数学知识方面贡献最大的是在民间传教的波兰耶稣会士是穆尼阁。

穆尼阁(J. Nicolas Smogulecki,1611—1656)出身于波兰贵族家庭。1635年加入耶稣会,此后在罗马学院学习过两年。1644年被派往中国。他是汤若望的好友,但却并未前往北京与汤若望共同工作,而是在南京、福建、广东等地传教,同时传授天文数学知识。当穆尼阁在南京时,薛凤祚(1600—1680)和方中通(1633—1698)随他学习西方知识。据方中通称,穆尼阁曾"有地游之说"②。所以,人们认为他很可能是最早向中国学者介绍日心地动说的传教士。穆尼阁撰有《天步真原》,其中,他引入了一种被后人发展了的哥白尼日心体系的图形③。在他去世后,薛凤祚出版了《天学会通》,其中所含的新的天文、数学内容均来自穆尼阁。在数学方面,穆尼阁引入的最重要的数学知识为对数方法。这方面的内容主要包含在薛凤祚编辑的《天学会通》的《比例对数表》和《比例四线新表》中。《比例对数表》,共42页,是一个从1到2万的常用对数表,表中的对数取小数6位。穆尼阁指出,利用对数方法,可以"变乘除为加减"。《比例四线新表》是正弦、余弦、正切、余切四线的对数表,其中度以下分为100分,每分都有对数,也是取小数6位。

这些对数表是由英格兰数学家纳白尔所发明并经伦敦大学巴理知斯(H. Briggs, 1556—1630)增修的。利用对数方法可以大大简化计算,所以,它一经传入便引起了中算家的兴趣。穆尼阁也试图讲解对数的原理及对数插值法。但他的"解释只说明了变乘除为加减的道理,没有说明比例算与同

---

① 陈垣曾对汤若望和木陈忞对顺治帝的影响做过比较,认为,自顺治八年至十四年秋为汤若望的势力,由顺治十四年冬至十七年,为木陈忞的势力。见:陈垣. 汤若望与木斋忞. 陈垣史学论著选. 456.但这样的分析应只是对个人的影响而言的。虽然在顺治十四年之前顺治帝曾称佛道的驱鬼祈福等为荒诞不经,但这样的言论只是相对于他对儒学的推崇而言的,并不表明他对天主教教义有兴趣。

② 方中通. "地游地动也"注. 物理小识. 卷2. 22b.

③ 参见:胡铁珠.《历学会通》中的宇宙模型. 225.

余算之间的关系，因而变乘方、开方为乘或除的道理就不大清楚”。[①]同时，他也没有给出对数造表法。我们在下文介绍薛凤祚的工作时还会再提到穆尼阁所引入的数学知识。此外，穆尼阁也传入了一些新的三角公式及对数和三角学结合的公式。《畴人传》中介绍了穆尼阁在传播西方天文、数学知识方面的贡献，并称其“喜与人谈算术而不招人入会，在彼教中号为笃实君子”[②]。

经穆尼阁传入的对数和三角学知识是清代初年被介绍到中国的最有价值的欧洲数学知识。除穆尼阁及在钦天监工作的汤若望等之外，其他耶稣会士多集中精力于传教事业，很少有人引入新的数学知识。这样的情况一直持续到康熙朝杨光先教案之后。

从耶稣会士的视角来看，明末清初他们在中国的活动是连续的。从罗明坚、利玛窦等到中国开始，便陆续有耶稣会士及其他修会的修士来华。他们采用适应调和的传教政策，小心翼翼地争取在中国站住脚跟，以期最终能够达到将中国基督化的目的，传播科学知识、参与历法修订和制造欧式火炮都是他们为吸引士大夫阶层及获得中国朝廷信任并最终得到皇帝许可公开传教而抛出的诱饵。此间，中国王朝的转换对他们并没有太大的影响，天主教并不承认不信教的世俗政权的合法性。中国士大夫们出于夷夏观念而反抗清政府的行为不会从耶稣会士那里得到任何同情。相反地，传教士们惊喜地发现，所谓的“蛮夷”政府对于他们的科学知识和教义都没有太多的顾虑，他们还可以放心地使用“西”字，并垄断了皇家天文机构——钦天监。不仅如此，年轻的顺治帝与汤若望关系密切，似乎得到皇帝的批准可以在全国公开传教，甚至皇帝本人入天主教也是指日可待的了。五十多年的辛苦耕耘终于开始收获，他们怎能不为此欢欣鼓舞。

在中国学者和士大夫方面，则呈现出不同于明末的景观。从年份上来看，虽然明末、清初均以1644年为限，但这两个时间段内对西学感兴趣的学者的思想状况则发生了根本的转变。明末的徐光启、李之藻等对于来自异域的文明采取了开放的态度。徐光启认为天主教是可以补儒易佛的。其中的潜台词为，儒是需要补的，但佛教对儒家传统有害。由此，他要引入天主教来补益儒学。与徐光启针锋相对的沈漼虽然反对天主教，但他认为，“天

① 钱宝琮．中国数学史．247—248．

② 阮元．穆尼阁．畴人传．卷45．21a．

堂地狱之说，释道二氏亦皆有之，然以之劝人孝弟，而示惩夫不孝、不弟、造恶业者，故亦有助于儒术尔。今彼直劝人不祭祀祖先，是教之不孝也”①。即从根本上来说，佛、道与儒家学说更为接近，可以补助儒学。这相当于说可以留下佛教和道教补益儒学。

入清之后，遗民学者们深切反思明代灭亡的原因。他们中很多人将明亡归咎于佛教和道教对儒学的影响，为了清除渗入儒学中的异端内容，他们试图重新恢复古代经典，以期恢复儒家社会的秩序。这很可能正是清代初年诸大儒提倡考据之学的原由。对于他们来说，儒学本身是完美的，并不需要外来的学术或宗教的辅助。所以，在拒斥佛、道的同时，他们也不会对天主教抱任何幻想或希望。很可能正是基于这个原因，清初遗民中很少有人入天主教或对天主教义产生兴趣。

不过，明遗民亦不完全拒斥西方科学知识。实际上，当时对西学感兴趣的大部分学者是明遗民。他们多热衷于经世之学，如顾炎武(1613—1682)、黄宗羲(1610—1695)、方以智、颜元(1635—1704)等。他们多在明清相交之际从事反清活动。虽然他们对明代灭亡的原因有着不同的认识，但均很关注对与民生切实相关的问题。从西方传入的与科学技术相关的知识亦多在他们的研究范围之内。他们对传教士引入的知识做了严格的分类，只肯接受其中与实学相关的内容，完全拒斥其中的宗教和哲学内容。按照李之藻的分类，他们只接受西方的“器”而拒绝西方的“理”。

二、杨光先历案

明遗民从夷夏之辨的角度重新审视西方传教士传授的欧洲知识，万历年间开始的反天主教的活动也一直延续下来。虽然耶稣会士在清代钦天监取得了绝对的优势，但他们在学者和士大夫之间的影响较明代末年反而减弱。当时的士大夫阶层很少有人入天主教。一些与耶稣会士接触并曾对欧洲知识感兴趣的人，如方以智，在入清后出家。随着清代初年天主教在中国传播的更为广泛，学者和士大夫的反教情绪有所增强。同时，自明末以后，士大夫阶层已对传教士的策略及来华目的有了更深刻的认识。利玛窦用以调合儒耶的对 GOD 一词的翻译也引起了较为普遍的怀疑。最初，接受罗明坚早期归化的一个中国教徒的建议将 GOD 翻译成“天主”。后来，通过研究

① 沈漼．参远夷书．转引自：张维华．明史欧洲四国传注释．上海古籍出版社．1982．156．

儒家经典,利玛窦发现了"天"、"上帝"等词汇,于是,他改用这两个词汇来表述 GOD。从一定程度上来说,利玛窦的译词虽然看似附会儒学,但他有意地曲解儒家经典及古代文献中模糊的内容以使其能与天主教相容的做法并没有得到所有儒家学者和士大夫的认可。明末晏文辉称:

> 且天帝一也,以其形体谓之天,以其主宰谓之地,吾儒论之甚精。而彼刻《天主教要略》云,天主生于汉哀帝时,其名曰耶稣,其母曰亚利玛(应作玛利亚);又云被恶官将十字架钉死;是以西洋罪死之鬼为天主也。可乎不可乎?将中国一天,而西洋又一天耶?将汉以前无天主,而汉以后始有天主耶?据斯谬谈,直巫觋之邪术也。①

沈淮的奏疏及《避邪集》中的多篇文章中都有类似的叙述。入清之后,传教士的传教方式变得更为直接。他们公开宣扬天主教教义中的超验内容,并对耶稣的生平及事迹做了更为明确和公开的描述。将传教士介绍的生于马棚、死于极刑的耶稣等同于中国儒家传统上的天与上帝必然会引起士大夫们在理解上的歧义及反感。以上便是杨光先历案发生的背景。

1659 年,杨光先写出《摘谬论》上书礼部,此后,他又刊出《避邪论》,批驳天主教义。为此,利类思撰《天学传槩》(1662)自辩。杨光先再撰《不得已》,利类思又以《不得已辩》(1665)相驳。如前所述,当时的士大夫和学者阶层多对天主教教义产生疑惑。杨光先的著作一时得到了广泛的流传。康熙三年(1664)七月,杨光先上折以三款参劾汤若望:一、潜谋造反,二、邪说惑众,三、历法荒谬。

杨光先虽然对天文历算知之不多,但他深知耶稣会士之所以能够在朝廷中立足,概由他们所掌握的历算知识,汤若望在宫廷中的地位正是传教士在中国传教的保护伞。不从天文历算方面击垮耶稣会士,破掉汤若望的护身法宝,就不可能达到杨光先的"令中国无西洋人"的目标。他首先攻击《时宪历》上写有"依西洋新法"五个字为"暗窃正朔之权以尊西洋"。对此,南怀仁虽然做了批驳,认为加上这五个字恰好可见新历与旧历之不同,正可以此"见我清鼎定,能使九万里孤臣亦竭效微劳"②。但南怀仁的辩驳并未奏效,此后,这五字再未出现于《时宪历》之中。杨光先还写出《历法摘谬》十条,指

---

① 晏文辉.奏疏.引自:明史欧洲四国志注释.160—161.

② 南怀仁.辨依西洋新法五字并中国奉西洋正朔.天主教东传文献.351.

出依西方天文方法制订的历法，以及汤若望在民历选择方法与中国故有的传统方法和回回历法的不同。这一攻击果然具有威力。据黄一农分析，他最有效的武器是钦天监为荣亲王丧葬择日问题上所犯的错误。[①] 1665 年 1 月 16 日，日食，汤若望及何雒书各依其法推算日食时刻及过程，届时会验，汤若望推算与天象全不合，而依旧法推算有 8 分合[②]，连天象都帮了杨光先的忙。

顺治帝去世之后，汤若望失去了重要靠山。经过十二次议政王大臣会议，1665 年 4 月，汤若望案议决为“天祐皇上，历祚无疆，而汤若望只进二百年历，俱大不合；其选择荣亲王葬期，不用正五行，反用洪范五行，山向年月俱犯忌杀，事犯重大”。因拟决汤若望及钦天监官员杜如预、杨弘量、李祖白、宋可成、宋发、朱光显、刘有泰等凌迟处死，上述官员之子及汤若望义子潘尽孝斩立决，利类思、安文思、南怀仁及各省传教士皆杖百拘禁或流充。[③] 后因北京地震及出现异常星象，朝廷大赦传教士，利类思、安文思、南怀仁等免罪释放。不久，汤若望、杜知预、杨弘量及其族人亦被释放。只钦天监李祖白、宋可成等 5 人被斩，其族人亦被责打流徙。[④]同时，杨光先被任命为钦天监监副。杨光先以“但知推步之理，不知推步之数”屡次上疏力辞不就，但未获准。9 月 10 日，清廷下令，除汤若望、利类思、安文思（G. de Magalhaes, 1610—1677）、南怀仁外，其余各地集中在京的传教士 25 人一律驱逐出京，限期南下广州。1666 年 8 月 15 日，汤若望在京去逝。1668 年 10 月，因钦天监官员计算历法差错甚多，朝廷命钦天监监副吴明烜亲自推算。

1669 年 1 月，南怀仁劾奏钦天监监副吴明烜所推历法中的疏误。康熙帝令议政王、贝勒、大臣、九卿科道等会同确议。众王大臣于历法说不出所以然来，于是，康熙只有拿出中国确定历法准确性的惟一法宝：共同测验。2 月 26 日，图海等 20 名官员会同钦天监人员及南怀仁等测验历法。其结果是：立春、雨水、太阴、火星、木星与南怀仁所指逐款皆符，与吴明烜所称逐款不合。议政王大臣会议，建议将康熙九年之历日交由南怀仁推算。康熙帝似乎不满于如此轻率的决定，下旨云：

---

① 详见：黄一农．择日之争与康熙历狱．

② 阮元．畴人传．卷 36．3b—4b．

③ 大清圣祖仁皇帝实录．卷 14．27a—28a．

④ 大清圣祖仁皇帝实录．卷 14．28a—b．

> 杨光先前告汤若望时，议政王大臣会议以杨光先何处为是，依议准行。汤若望何处为非，辄议停止。及当日议停，今日议复之故，不向马祜、杨光先、吴明烜、南怀仁问明详奏，乃草率议复。不合，著再行确议。①

3月8日，议政王大臣等再议钦天监事，认为南怀仁推算之法上合天象，而“杨光先职司监正，历算差错不能修理，左袒吴明烜，妄以九十六刻推算乃西洋之法必不可用，应革职，交刑部从重议罪”。结果，杨光先革职，从宽免交刑部，余依议。3月17日以南怀仁为钦天监监副，并令他重新推算历法。7月4日，依南怀仁之请，改造观象台仪器。②7月24日，吴明烜因制星仪违限迟延，且在康熙帝面前说谎被杖责四十板。③9月5日，南怀仁、李光宏等控告杨光先依附鳌拜捏词陷害，得旨，汤若望复“通微教师”称号，照原品赐恤，26日追赐原任掌钦天监事通政史司通政使；还天主教堂建堂基地。其他同时受牵连的钦天监官员亦得官复原职。杨光先理应处死，但念其年老，姑从宽恕。④1677年，康熙帝令钦天监人员“学习新法”⑤，即西方历法。

从现代天文学角度来看，杨光先指责汤若望等的理由是不成立的。中国传统历法和西方历法基于两种不同的计算体系，仅就日、月食推算方法来看，在当时亦互有优劣。但由于杨光先在中、西两种历法知识方面的欠缺，无法找到汤若望历法的真正漏洞。⑥于是，他只能依赖吴明烜提供的一些天文理论和星占术来攻讦汤若望。

从欧洲科学在中国传播的角度来看，杨光先所发动的这场历狱风波似乎是一场灾难。但是，任何历史事件只有放在它所处的特定环境中才能够显示出其意义。汤若望及部分耶稣会士在中国传播了欧洲的科学技术知识，但他们所负有的主要使命是使中国基督教化，即使采取附儒的传教方

---

① 大清圣祖仁皇帝实录．卷28．6a—b．

② 南怀仁依西法制造的6种天文仪器至今还保存在古观象台。关于欧洲天文仪器的制造，参见：张柏春．明清测天仪器之欧化．辽宁教育出版社，2000．

③ 清史编年．第二卷（康熙朝）．上．109．

④ 大清圣祖仁皇帝实录．卷31．4a—5a．

⑤ 皇朝文献通考．卷256．10b．

⑥ 南怀仁曾承认，推算日食、月食是繁重而有风险的工作。令他感到幸运的是，他们在中国人面前没有做出错误的推算。（Noel Golvers. *The Astronomia Europaea of Ferdinand Verbiest, S. J.* (Dillingen, 1687); Text, Translation, Notes and Commentaries. Sankt Augustin & Leuven, Steyler Verlag · Nettetal, 1993. 79.）参见：张柏春．影响欧洲天文仪器技术东渐的若干因素．48—57．

式，他们也会在基本教义方面坚持宗教立场。入清以后，传教士们在介绍其教义方面显得更为直接与大胆。利类思在《天学传概》中将所有传统经典中的天和上帝定义为天主教的 GOD，由此推导出，中国的人种为亚当的后裔，而中国的一切经典和文化都起源于天主教教义。这种将儒学附属于天主教的方式自然会引起中国学者和士大夫的强烈反感。而传教士公开传教，广泛接受教徒也同样引起了各地官员的怀疑与不满。从这个角度，我们便可以更好地理解杨光先的“宁可使中夏无好历法，不可使中夏有西洋人。无好历法不过如汉家不知合朔之法，日食多在晦日而犹享四百年之国祚；有西洋人，吾惧其挥金以收拾我天下之人心，如厝火于积薪之下而祸发之无日也”等语的意义了。

虽然欧洲传教士重新得到了钦天监的位置。但清代学者和士大夫们对天主教的戒心却并未解除。这亦影响了西方数学在中国的传播。梅文鼎曾称：“窃观欧罗言，度数为专攻。思之废寝食，奥意心神通……惟恨棲深山，奇书实罕逢。我欲往从之，所学殊难同。讵忍弃儒先，翻然西说攻。或欲暂学历，论交患不忠。立身天地内，谁能异初衷。”[①]他虽欲从传教士学习西方历算，但因恐传教士由此劝其入教，所以只能放弃这一想法。

杨光先教案对于欧洲数学在中国的传播有着深远影响。通过对这次历狱的处理，年轻的康熙帝迈出了摆脱鳌拜摄政，并独掌大权的有意义的一步。同时，由于这次关于历法的争论，康熙帝认识到朝中大臣对天文历法的无知。他后来称：

> 康熙初年，因历法争讼，互为讦告，至于死者，不知其几。康熙七年，闰月颁历之后，钦天监再题，欲加十二月又闰，因而众论纷纷，人心不服，皆谓从古有历以来，未闻一岁中再闰，因而诸王九卿等再三考察，举朝无有知历者，朕目睹其事，心中痛恨，凡万几余暇，即专志于天文历法一十余载，所以略知其大概，不至于混乱也。[②]

由此可见，杨光先挑起的历狱风波正是康熙帝日后学习数学知识的直接原因。在康熙帝的要求下，传教士开始向他有系统地传授新的欧洲数学知识。这亦可算是杨光先历狱对西方数学知识在中国传播的正面影响。在

① 梅文鼎．寄怀青州薛仪甫先生．绩学堂诗钞．卷 2．16b—17a．

② 爱新觉罗·玄烨．圣祖仁皇帝庭训格言．69．

本书第一章中,我们已经提到,沈漼等引起的南京教案之后,传教士们大多从激进的传教方式中收回心来重拾以传播欧洲科学、技术知识辅助传教的适应的传教政策。从这两次大规模的反教事件对西方知识传播的正、反两方面的影响,我们亦可看到当时欧洲科学知识在中国传播的复杂局面。关于康熙时期欧洲数学在中国的传播,本章下一节将做较为详细的介绍。

三、清代初年的数学学习与研究

清代初年仍有一些学者随传教士学习西方数学。薛凤祚和方中通为其中较为著名者。

薛凤祚(1600—1680)幼习经学,曾拜明末著名学者孙奇逢和鹿善继为师。后因认为王氏心学不能致用,故转而学习经世实学。他的兴趣点主要在历法制订方面,但"历数之原本于算数",所以,他对与制订历法相关的数学知识亦有所研究。1663年初,他在《中法四线引》中自陈:

> 算法在予阅四变矣。癸酉之冬,予从玉山魏先生得开方之法,置从来上下廉隅从益诸方不用,而别为双单奇偶等数,此因羲和相传之旧而特取其捷径者。既而于长安复于皇清顺治《时宪历》得八线有正弦、余弦、切线、余切线、割线、余割线、矢线,亦即中法开方诸术,而以其方法易为圆法,亦加精加倍矣。然而苦其乘除之不易。壬辰春日,予来白下,去癸酉且二十年,复得与弥阁穆先生求三角法,又求对数及对数四线表。对数者,苦乘除之烦,变为加减。用之作历,省易无讹者也。此算经三变,可称精详简易矣。今有较正会通之役,复患中法太脱略而旧法又以六成十不能相入,乃取而通之,自诸书以及八线皆取其六数通以十数,然后羲和旧新二法时宪旧新二法合而为一,或可备此道阶梯矣。①

这段文字简要地勾勒出他学习和研究数学的过程。玉山魏先生即前章提到的与李天经及西方传教士发生激烈冲突的中法派代表人物魏文魁。1633年冬,薛凤祚开始随魏文魁习中法,学到魏氏的开方方法。在《天学会通·三角八线表》中,薛凤祚介绍了这一方法:

> 开方秘法　中法太乙山人传
>
> 立法先须明双单,奇法遇一用三归,偶法得数径除先,除后加

① 薛凤祚. 中法四线引. 历学会通. 益都薛氏遗书本.

位复折半，不必下法在此间。

此后，他从《时宪历》中学到三角函数方法，承认三角函数方法较中法开方法简易，用于历法计算更为精当，只是三角函数乘除过于繁难。但同时，他还认为八线方法与开方法并没有本质的区别，只是一用"方法"，一用"圆法"而已。1652 年，他随穆尼阁学得对数方法，利用对数，便可以将三角函数的乘除运算变为加减运算，较之直接以三角函数入算，自然更为简易且不易出错。此后，他致力于会通中、西，著成《历学会通》。薛凤祚在书中写到：

> 在昔立法，圣人神悟超卓，虽各天一隅，而理无不同，创法立制，皆劈空竖义，有令人积思殚虑不能作一解者。其玄奥慧巧，岂容后人复置一喙！后世代有更易，不过即其成法而为之节裁，非能别有创议也。不然，算为历原，天下岂有二道哉？

薛凤祚曾述其会通 11 条，其中与数学相关的是主要是将八线改为对数和各行用十数两条，即以对数形式的三角公式取代一般三角公式及将度、分、秒之间的六十进位变为十进位。

薛凤祚最重要的著作是《历学会通》(1664)。该书又名《天学会通》，56 卷，分正集、致用、考验三部分。"致用"有 16 卷，多为力学、水利、火器、兵法、乐律等方面的内容。他继承了徐光启《旁通十事》中所设想的将数学科学应用于实践的想法。① "考验"共 28 卷，收入当时比较重要的五种历法选要，其中以穆尼阁的《天步真原》为主。正集中除介绍太阳、月亮及五星运行的理论等天文内容外，还有介绍三角函数、三角函数的对数等内容及数表。但这些数学内容都是为了在天文计算应用而介绍的，因此缺少论证和详细的阐释。②

薛凤祚虽将《历学会通》定位为中、西会通型的著作。但该书内容以介绍西方方法为主的。在数学方面，他继承了西方传教士及徐光启等人的说法，认为"径一围三非弧矢真法"及"球、三角、三弧形非句股可尽"等。③而他所坚持的以中法十进位制取代西法弧度间六十进位制的会通方式并未得到后世数学家，包括以会通中西著名的王锡阐、梅文鼎及以提倡中学为标志的

---

① 详见第一章。

② 关于《历学会通》中数学知识的介绍，主要参照钱宝琮《中国数学史》中的相关内容改写和简化。有兴趣的读者可参阅原书，245—250。

③ 薛凤祚．古今历法中西历法参订条议．历学会通．益都薛氏遗书本．

乾嘉数学家们的认同。薛凤祚对清代数学影响最大的贡献是他在《历学会通》中介绍了穆尼阁传入的对数方法。但在这方面，他和穆尼阁均未全面介绍对数的原理及求一个数字的对数的具体方法。其书中亦很少含有解释和证明。这与其后的数学家的著述方式亦有很大不同。所以，他在会通方面的工作并不为清代数学家所赞赏。《畴人传》中评价他曰：“国初算学名家，南王（王锡阐）北薛并称①。然王非薛之所能及也。晓庵贯通中西之术而又频年实测，得之目验，故于汤、罗新法诸书能取其精华而去其糟粕。仪甫谨守穆尼阁成法依数推演，随人步驱而已，未能有深得也。”②

方中通（1633—1698）是方以智的次子，他亦曾随穆尼阁习算。前章已述，方以智年轻时对西方知识很有兴趣，并与毕方济和汤若望有交往。方中通很可能在随侍其父时开始接触传教士和西学。方中通本人主要对数学有兴趣，著有《数度衍》（1661）一书。《数度衍》，卷首 2 卷，正文 23 卷，附 2 卷。卷首分“数原”、“律衍”两部分。方中通称：“《九章》皆勾股”③，所以，其“数原”以“勾股原图说”开篇，由勾股导源于《易》之《河图》、《洛书》及《周髀算经》。该卷还称：“乘莫善于筹，除莫善于笔，加减莫善于珠，比例莫善于尺。”可见他熟练掌握了当时传入的西方筹算、笔算、尺算及中国原有的珠算，并对这四种方法做了详细比较。《律衍》部分解释音律原理，指出，音律“亦同符河洛”④，即，音律与数学本是同源的。《数度衍》正文的前 5 卷讨论“珠算”、“笔算”、“筹算”、“尺算”的运算方法和算法原理。此后诸卷以《九章算术》名目为纲，但值得注意的是，方中通是以自己对《九章算术》中内容的理解编排章节顺序的。他认为：

> 勾股不及九章，何哉？偃矩以望高，覆矩以测深，卧矩以知远，勾股之自为用也 环矩以为圆，合矩以为方，方数为典，以方出圆，勾股之所生也。……其变无穷，藏于圆方，少广圆方所出也。方田、商功皆少广所出。一方一圆，其间不齐，始出差分。而均输对差分之数盈朒者，借差求均，又差分均输所出。而以方程济其穷。度也，量也，衡也，原于黄钟，粟布出焉。⑤

---

① 关于王锡阐，参见：席文．王锡阐．席泽宗．试论王锡阐的天文工作．

② 阮元．薛凤祚．畴人传．卷 36．1b—2a．

③ 方中通．数度衍．卷首上．4b．

④ 方中通．数度衍．卷首．

⑤ 方中通．数度衍．卷首．5a—b．

《数度衍》中第六卷之后的编排为：勾股（3卷）、少广（6卷）、方田（1卷）、商功（1卷）、差分（2卷）、均输（1卷）、盈朒（1卷）、方程（1卷）、粟布（1卷）、九数外法（1卷），与他所理解的《九章算术》中各章关系一致。方中通进一步指出，“设为九章者，便用耳……九章以用而分，不以数而分也”①。即，《九章算术》的章节是以数学对实际的用途而非数学的内容为基础划分的，方中通显然对以用途为纲目的方法并不满意，因为他书中各卷虽冠以与《九章》相类的名目，但其中的内容则多为从原《九章》中抽象出来的数学方法。如其“少广”6卷实际上是由“方圆”、“较容”、“递加”、“外包”、“倍加”、“开平方”、“开平圆”、“开立方”、“开三乘方”等部分构成，各部分讲解一种方法的计算步骤及算法原理。②《九数外法》卷中主要讲述通分、定位、异乘同除等算法。这些算法有些是《九章算术》中已有的算法，亦有些算法取自程大位的《算法统宗》、李之藻的《同文算旨》以及其他算书。《数度衍》的附录为《几何约》一卷。该卷主要是对《几何原本》简写。书中抛开《几何原本》的演绎系统，以度、线、比例、三角形、圆、圆内外形、线面之比例等专题为线索节录原书内容。

《数度衍》虽还保留了《九章》篇目，但方中通以各章中的数学内容的内在关系及数学方法为纲组织全书内容。这是中国数学家重新归纳整理传统数学体系的一个尝试。这虽然可以被视作顾应祥等明代数学家工作的继续，但其中很可能也有西方数学的影响。与中国古代数学著作的另一个不同点是，《数度衍》的算法和测量方法均含有解释该方法正确性的论述，在论述过程中，方中通交会地使用中国传统方法和西方方法。③ 这亦是中算家受西方数学影响的一个表现形式。《数度衍》的这两个特点正是清代以后中国数学家融合中、西数学的两种方式。与方中通同时的杜知耕及其稍后的梅文鼎等均是以这样的方式会通中、西数学的。

杜知耕，字端甫，号伯瞿，柘城举人。“自束发受学，于天文、律历、轩歧诸家无不该览，极深湛之思而归于平实，非心之所安，事之所验，虽古人成说

---

① 方中通．数度衍．卷首上．5b—6a．

② “外包”、“倍加”分别表述两类级数。开三乘方即开四次方。由于珠算术中并未发展出开四次方的方法，而方中通又不懂传统数学中的可开任意高次方的增乘开方法，所以，《数度衍》中介绍的开四次方的方法为西方笔算方法。详见，方中通．数度衍．卷11．

③ 《数度衍》中每法或每题除给出解题方法外，还多附“通曰”。在这部分内容中，方中通给出其所附的算法的一般性论述和阐释。

不敢从也"①。杜知耕的主要数学著作有《几何论约》(1700)和《数学钥》(1681)两部。《几何论约》为《几何原本》的改写本。与方中通《几何约》不同的是,该书基本保留了《几何原本》原书的体例及结构。杜知耕认为,《几何原本》译成90余年来,之所以很少有读者,是因为该书每题"多者千言,少者亦数百言"。读者需要"凝精聚神,手志目顾,方明其义。精神稍懈,一题未竟,以不知所言为何事"②。为此,他"就其原文,因其次第,论可约者约之;别有可发者,以己意附之。解以尽者节其论,题自明者并节其解"③。以此为宗旨,该书对《几何原本》进行了简写,删去了书中杜知耕认为不必需的证明过程。④值得注意的是,对于《几何原本》中以反证法给出的证明,杜知耕多将其改写为对命题理论的直接解释或简单地将该证明删去。杜知耕的做法表现出中国数学家在论理方式上与古希腊数学家的不同。中算著作中多以解释的方式探讨计算方法或公式的正确性,而"古希腊数学证明的目的是要验证命题的真理性"⑤。受哲学思想及古希腊讲学方式的影响,古希腊数学著作中不仅要讲明数学命题的原理,还要具有严谨的证明体系以应付不同流派的数学家或哲学家的诘难,欧几里得几何严格的演绎体系正是在这样的背景下产生出来的。而中国哲学自古不尚论辩之术,巧辩多被视为奸滑者所擅之技,为儒家学者所不屑为。这可能是中国学者不愿接受反证法证明的一个原因。在明清中国数学家所撰写的数学著作中,我们很难发现他们使用过反证法的例子。

对于中国学者及数学家来说,算法或命题的证明只需讲清其中蕴含的算理即可。是以,虽然受《几何原本》等欧洲数学著作的影响,包括徐光启、方中通、杜知耕等在内的中国学者意识到数学著作中必须包含对所述内容的正确性的证明,或者说必须讲明算题之"义",但他们多以"阐释"算理的方式证明数学方法的正确性。入清以后,很多数学著作中所包含的"解"的部分实际上即是对相关数学方法正确性的说明或证明,这体现出欧洲数学严谨的论证体系在中国的影响及中国数学家基于传统思维模式对欧洲数学体

① 吴学颢. 几何论约序. 几何论约. 2a.
② 杜知耕. 几何论约序. 几何论约. 1a—b.
③ 杜知耕. 几何论约序. 几何论约. 1b—2a.
④ 《几何论约》卷末包含杜知耕自撰的几个算题。对于这些题目,杜知耕亦给出了证明。详见,《几何论约》,卷末.
⑤ 林力娜. 数学与注释:《九章算术》注研究. 田森译.

系的反应。笔者认为,欧洲数学知识的传入只是中国数学西化历程中的一个方面,中国数学家对西方数学的内容及思维模式的认识亦是衡量中国数学西化程度的最重要的标准。

《数学钥》依《九章算术》章目编排,但正如《四库全书》提要所称:该书以欧洲"点、线、面、体"之法并载图解阐述书中算法原理,每章前设凡例给出该章中涉及的概念及原理。"每问答有所旁通者必附其术于条下,所引证之文必注其所出"。①从该书亦可看出西方数学对中国数学著述方式的影响。《四库全书》提要说该书"为用今法以合《九章》者",此正是徐光启在修订《崇祯历书》时提出的"镕彼方之材质,入大统之型模"在数学与境中的意义。方中通和杜知耕将西方数学方法融入中国传统数学模式的会通式的研究和著述方式得到稍后于他们的梅文鼎的赞扬,梅文鼎认为这样的方式可以成为数学著作的"程式",也即规范。②

与方中通、杜知耕同时的尚有另一位数学家李子金。李子金著有《隐山鄙事》4 卷和《天弧象限表》1 卷。《隐山鄙事》为"发明《几何原本》、《几何要法》之理"③。《天弧象限表》为研究三角函数的专著④。清初的另一位历算名家是王锡阐,他主要关心宇宙论及历法的制订问题,他在译成中文的西方数学著作的基础上进行中、西会通的尝试,在三角学方面获得一些独到的成果。

对清代中国数学研究影响最大的当首推康熙帝,而梅文鼎则是与康熙帝同时最为重要的中国数学家。下文中,我们将围绕他们二人对西方数学的态度及研究,论述杨光先历案后西方数学在中国传播的特点。

第二节 康熙帝与西方数学知识在中国的传播

在历史上,康熙帝可能是惟一一位认真从事数学与天文学研究的中国帝王。在他的倡导和组织下,一些人从事数学研究与学习,成立了一些专门研究和学习数学的皇家机构,此外,还编成了一部大型的介绍数学知识的

---

① 纪昀,陆锡熊,孙士毅. 数学钥题要. 数学钥. 1a—b.

② 关于《数学钥》中融合中、西数学的具体方式,详见第 6 章。

③ 阮元. 李子金. 畴人传. 卷 36. 8a.

④ 详见本书第五章。参见:高宏林. 李子金《天弧象限表》研究.

《数理精蕴》。康熙帝所学习和研究的主要是西方天文、数学方法。在他的要求下，宫廷中的传教士为他系统地讲解了西方几何学和代数学知识。通过康熙帝，传教士所讲授的部分知识在中国流传开来。

一、康熙帝学习西方数学的动机

经历了杨光先历狱之后，康熙帝决定自己学习欧洲数学和天文学。大约在 1671 年前后，南怀仁开始向康熙帝进讲欧洲数学和天文学。①

南怀仁（Ferdinand Verbiest，1623—1688），字敦伯，一字勋卿。1623 年 10 月 9 日生于比利时皮藤（Pittem）。曾入当地耶稣会学校学习，1640 年 10 月 1 日，入鲁汶大学文理学院（Arts Faculty of the University of Louvain）学习，10 月 2 日成为百合花教学班（lily pedagogy）的学生②。当时该班的教授是菲利比（William Philippi）。作为一名哲学教授，他是第一位把笛卡尔主义介绍到鲁汶大学的人。1658—1664 年间，他出版过关于逻辑学、形而上学、物理学的四册一套的丛书。其中，他用笛卡尔的方法解释了亚里士多德的大纲。1639 年，笛卡尔主义者古乔文（Gerard van Gutschoven）被任命为数学代理教授，他将笛卡尔的数学发现、机械论和天文学思想介绍到该大学来。虽然当时有一些新的哲学思想被引入鲁汶学院，但总的来说，南怀仁于该校接受的仍然是传统的亚里士多德体系的教育。他在百合花班学习的前 8 个月中学习了逻辑学，8 个月后，初级教授讲授亚里士多德的 Libri Physicorum，同时，二级教授讲解撒克罗包斯考（J. De Sacrabosco）的 Tractatus de sphaera（《天球论》）。这本著作介绍了宇宙结构学。在这门课程的讲授中，教授们也有可能讨论托勒密、哥白尼和第谷的宇宙体系。1641 年 9 月，南怀仁加入耶稣会并离开鲁汶。两年后，他回到鲁汶的耶稣会学院，参加了著名数学家塔凯（André Tacquer）的讲座。塔凯师从波尔曼（W. Boelmans），而波尔曼的老师格里高里（Gregorius of St. Vincent，1584—1667）曾在罗马神学院随克拉维斯学习。南怀仁很可能在这个讲座中接受了更多的数学知识，遗憾的是我们并不了解塔凯在 1644—1645 年间的讲课内容。南怀仁曾想赴南美传教，但

---

① 南怀仁在清宫中的工作是多方面的。他的主要头衔是"治理历法"，主要负责钦天监的工作，包括编制历法和制作仪器。同时他也参与了火炮制造及舆图绘制等活动。关于南怀仁，见：传教士、科学家、工程师、外交家南怀仁；关于南怀仁所制的仪器，见：张柏春．明清测天仪器之欧化——十七、十八世纪传入中国的天文仪器技术及其历史地位．

② 罗杰斯．南怀仁时代鲁汶大学的学术环境．传教士、科学家、工程师、外交家南怀仁．13，20．

后来,在耶稣会总会长的劝导下改到中国。1656年,南怀仁起程赶赴中国。途中,他在科英布拉停留了一年,他在当地教授并进一步研究数学。[①]1660年,作为汤若望的助手,南怀仁来到北京。在此,他可以利用在北京的图书,并在汤若望的指导下进一步学习数学和天文学。[②]

据白晋称,南怀仁"讲解了主要天文仪器、数学仪器的用法和几何学、静力学、天文学中最新奇最简要的内容,并为此特地编写了教材"[③]。为了向康熙帝传授数学知识,南怀仁曾将欧几里得的《原本》译成满文,但总的来说,他并未引入新的欧洲数学内容。他所参加的最重要的有关欧洲科学技术传播的活动是至今仍保存在古观象台的6件大型天文仪器的制作及为清廷设计制造的百余门大小火炮。

对于他在数学方面的教学活动,南怀仁记述曰:

> 每日破晓我就进宫,立即被引入康熙的内殿,并经常到午后三四点钟才告退。我单独与皇帝在一起,为他读书和讲解各种问题。[④]

虽然南怀仁的描述恐有夸张之虞,但从中亦可见康熙帝学习西方数学的态度。据康熙帝所述,掌握西方天文、数学知识以裁决相关问题,是他学习数学的原动力。但他如此认真地学习西方数学,很可能还有另一个未道出的原因。该原因很可能与清代初年满汉之间的矛盾有关。

康熙帝自幼研习儒家经典。[⑤]作为统治中国的皇帝,为了不被儒家士大夫所轻视,他必须深入钻研儒学典籍。在他的上谕中,我们经常可以看到他引经据典地批评那些以学问见长的学者士大夫。1687年6月20日,他特别将当时的朝廷重臣陈廷敬、汤斌、徐乾学、耿介、高士奇、德格勒、孟亮揆、徐元梦等召至乾清宫内当堂考试。他亲自给出两个考题,并亲自阅卷,之后,

---

① 详见:李培德. 对南怀仁科学工作的总评价. 传教士、科学家、工程师、外交家南怀仁. 46—47.

② 这部分的内容主要参考了罗杰斯的《南怀仁时代的鲁汶大学的学术环境》及李培始《对南怀仁科学工作的总评价》。

③ 白晋. 康熙皇帝. 32.

④ 俄国、蒙古、中国. 1614—1618. 转引自:樊洪业. 耶稣会士与中国科学. 151.

⑤ 1684年12月,康熙帝对侍讲高士奇曰:"朕自五龄即知读书,八龄践祚,辄以学庸训诂询之左右,求得大意而后愉快.日所读者,必使字字成诵,从来不敢自欺.及四子之书即已通贯,乃读《尚书》,于典谟训诂之中,体会古帝王孜孜求治之意,期见之施行.及读大《易》,观象玩占于数,圣人扶阳抑阴,防微杜渐,垂世立教之精心,朕皆反复探索,必心与理会,不使纤毫扞格.实觉义理悦心,故乐此不疲。"引自:清史编年. 第二卷(康熙朝). 上. 494.

他称：

朕政事之暇，唯好读书……故召尔等面试。妍媸优劣，今已判然。总之，人之学问原有一定份量，真伪易明，若徒肆议论，则不自量矣！①

这表明，康熙帝并不仅仅满足于做一个惟我独尊的皇帝，还想成为学术仲裁人。清代各朝帝王均自幼研读儒家经典，从学习儒家学术的热忱来说，与其他朝代帝王相较，他们有过之而无不及。对于康熙帝来讲，能够成为儒家学术的最高仲裁人，不仅可以增强其一代帝王的权威，还可以表明儒家传统对他的完全接纳，并进而得到汉人士大夫们对清廷正统性的认同。但早期的汉人士大夫们却不买他的账。

1694年，康熙帝谕大学士等曰：

李光地、汤斌、熊赐履皆讲道学之人，然各不相合。李光地曾授德格勒《易经》，光地请假回籍时，朕召德格勒进内讲《易》，德格勒奏言光地精熟兵务，其意欲为将军提督，皇上若将光地授一武职，必能胜任。反覆奏请，尔时朕即疑之。德格勒又奏：熊赐履所学甚劣，非可用之人。朕欲辨其真伪，将德格勒、熊赐履等考试，汤斌见德格勒所作之文，不禁大笑，手持文章坠地，向朕奏云：“德格勒文甚不堪，臣一时不能忍笑，以致失仪。”而汤斌出又向众言：“我自有生以来，未曾有似此一番造谎者，顷乃不得已而笑也。”道学当以忠诚为本，岂有在人主前作一等语，退后又别作一等语者乎？②

汤斌在1687年10月病故，故康熙所述的故事应发生在1687年10月之前。1688年4月29日，康熙帝曾指责李光地和德格勒互相吹捧。李光地称德格勒作文甚优，“康熙帝曾将德格勒亲加考试，见其文词语粗鄙”。故命张玉书等责问李光地。李光地只好承认妄奏。然而，康熙帝的亲加考试，是要由汤斌等代为评价的。汤斌知道康熙帝的学术水平，所以敢公然在他面前指鹿为马，这对于自负的康熙不能不说是一个极大的耻辱。康熙帝在汤斌去世7年后旧账重提，亦可见此事对他的刺激之深。康熙帝虽然为了得到学术仲裁人的身份而日夜苦读，但他对儒家学术的理解却很难超过甚至达到自幼攻读经典的真正博学的儒家学者的水平。杨光先历案一方面使得康

---

① 清史编年．第二卷（康熙朝）．上．545．

② 蒋良骐．东华录．北京：中华书局，1980．卷16．268．

熙帝痛心于满朝大臣中竟无一人精通数学,但另一方面也使他发现了他能够超越汉人学者和士大夫们的知识领域——天文、数学。这很可能是康熙学习欧洲天文、数学的另一个动机。下文我们将看到,康熙帝学习数学的动机对西方数学在中国的传播有着很大的影响。

二、西方数学知识在中国的传播

应南怀仁的推荐,耶稣会士闵明我(Philippe Maria Grimaldi, 1636—1712)、徐日升(Thome Pereira, 1645—1708)奉召到钦天监工作。1694 年,闵明我接任“治理历法”。1685 年,南怀仁还向康熙帝推荐了比利时耶稣会士安多(Antoine Thomas, 1644—1709)。安多是在 1682 年 7 月 4 日到达澳门的。在此之前,他曾于葡萄牙科英布拉城的耶稣会学院教授数学。在葡萄牙期间,安多利用闲暇写成《数学概要》(Synopsis mathematica complectens varios tractatus quos hujus scientiae tyronibus et missionis Sinicae candidatis breviter et clare concinnavit P. Antonivs Thomas e Societate Iesv. Duaci,1685)一书,该书全名可被译为:《数学纲要:由这门科学的不同论著组成,简明、清晰地为初学者和到中国传教的候选人而撰写》。从拉丁文书名看,此书是为在中国之传教士及初学者所编①。该书凡二册,第一册为算术、初等几何、实用几何、球体、地理、水力学、音乐等八章;第二册为光学、静力学、钟表、球面三角、星盘、历法、天文学等七章,都是基本的科学知识。在前言中,他谈到此书的目的:对在中国传教有利;为传教士在中国立足提供必不可少的数学、天文学知识。1685 年 11 月 8 日,安多抵达北京。此后,他接替南怀仁为康熙帝讲解几何学和算术课程。据韩琦和詹嘉玲分析,他向康熙帝进讲的教材就是他自己编写的《数学概要》一书。南怀仁去世后,他和徐日升一起担任“治理历法”的工作。根据 1689—1691 年间白晋的日记,安多曾在宫廷编写中文的正弦、余弦、正切和对数表。还向康熙帝介绍算术、三角和代数方面的内容,并提供了一个解三次方程根的算表②。可能正是在此期间,安多向康熙帝介绍了欧洲代数学方法——借根方算法。欧洲代数学是康熙时期传入的

---

① 详见:韩琦,詹嘉玲.康熙时代西方数学在宫廷的传播——以安多和《算法纂要总纲》的编纂为例.146.

② 详见:韩琦,詹嘉玲.康熙时代西方数学在宫廷的传播——以安多和《算法纂要总纲》的编纂为例.147.

最重要的数学知识，借根方算法是一种非符号性的代数方法，关于它的特点及其在中国的传播，本书将在第五章做具体介绍。

南怀仁除向康熙帝引荐当时在中国的精通科学的耶稣会士外，还在1678年8月15日写下了告欧洲耶稣会士书①，信中称："凡擅于天文学、光学、静力学、动力学等物质科学之耶稣会士，中国无不欢迎。"中国皇帝给传教士们以优厚待遇，"皇帝宫内是诸侯也不能常到的，而这些科学家却常住宫中，时时近幸"。几乎与此同时，巴黎天文台台长、著名天文学家卡西尼(G. D. Cassini, 1625—1712)向法国首相柯尔柏(J. B. Colbert, 1619—1683)建议派遣耶稣会士到东方进行舆地调查，并拟定了一个详细的观测计划。大约在1680—1681年间，柯尔伯、卡西尼、天文学家腊羲尔(P. de la Hire, 1640—1718)、耶稣会士科学家洪若翰(J. de Fontaney, 1643—1710)商讨了这个计划。1683年，柯尔伯去世，法国向中国派遣耶稣会士的计划被耽搁下来。1684年，柏应理回欧洲时，路易十四专门接见了他及随行的中国教徒沈福宗。1684年12月，洪若翰、白晋(J. Bouvet, 1656—1730)、刘应(C. de Visdelou, 1656—1737)、张诚(J.F. Gerbillon, 1654—1707)等四名法国耶稣会士被法国皇家科学院任命为通讯院士，他们与李明(L. Le Comte, 1655—1728)和塔夏尔(Gui Tachard)一起以法国国王科学家的身份被派到中国。②1699年，巴多明(Dominique Parrenin, 1665—1741)、杜德美(Pierre Jartoux, 1668—1720)、傅圣泽(J.F. Foucquet, 1665—1741)等来华。此后有多名法国传教士来华，其中包括郭中传(Jean - Alexis de Gollet, 1664—1747)、宋君荣(Antoine Gaubil, 1689—1759)、汤执中(Pierre l Le Cheron d'Incarville, 1706—1757)、韩国英(Pierre - Martial Cibot, 1727—1780)、蒋友仁(Michel Benoist, 1715—1774)等。他们成为康熙时期在中国传播欧洲数学及其他知识的主力。

第一批来华的法国传教士中，除塔夏尔留在暹罗之外，其他5人携带大小30箱书籍和仪器进入中国，他们于1688年2月7日到达北京。康熙帝派钦天监官员对他们进行了考察，以确定他们是否真的精通天文历法。3月21日，在徐日升的引领下，5名法国耶稣会士参见康熙帝，此后，张诚与白

① 详见：韩琦．中国科学技术的西传及其影响．15．

② 以上主要参照：韩琦．中国科学技术的西传及其影响．11—19．

晋被留在宫中，其他三人被准许到各省居住。①应康熙帝的要求，张诚和白晋用满语向他讲解欧几里得的《原理》(《几何原本》)。张诚等每天都在大臣的协助下准备进讲的文稿，此后，口授文稿。康熙帝认真听讲，“反复练习，亲手绘图，对不懂的地方立刻提出问题……然后，(康熙帝)把文稿留在身边，在内室里反复阅读”。同时，他还“练习运算和仪器的用法，复习欧几里得的主要定理，并努力记住其推理过程。这样学习了五六个月，康熙帝精通了几何学原理，以至于一看到某个定理的几何图形，就能立即想到这个定理及其证明。有一天，皇上说，他打算把这些定理从头到尾阅读十二遍以上”②。“康熙帝充分领会了几何学原理以后，还希望能用满语起草一本包括全部理论的应用几何学问题集，并以讲解原理时所用的方法，进讲应用几何学。同时，皇上旨谕安多神父用汉语起草一本算术和几何计算问题集”③。

康熙帝确实在欧几里得几何学的学习上倾注了很大的心力。他的学习方法与当时中国学者学习儒家经典的方法非常一致，不仅要理解耶稣会士讲解的欧洲数学内容，还要背诵所有的定理及其证明过程。张诚、白晋向康熙帝进讲的《几何原本》很可能是以法国耶稣会士数学家巴蒂斯(Pardies)的Elémens de Géométrie为底本的。现存满文本《几何原本》即是此书的译本，而《数理精蕴》中的《几何原本》是这部著作的汉文译本④。

1712年夏，法国传教士傅圣泽为康熙帝写了一篇文章《阿尔热巴达新法》，该文是介绍欧洲符号代数的最早中文著作。⑤ 自1711年起，傅圣泽开始在宫中从事天文学工作。一天，康熙帝与他谈起代数，并希望知道傅圣泽对代数的想法。谈论间，傅圣泽提到一种“新”的代数，它比旧代数简捷且更

---

① 来华法国耶稣会士中，以洪若瀚的科学水平最高，他是法国著名的天文学家。来华前，他已在大学教授数学与天文学8年，并为耶稣会士天文学家巴蒂斯(I. G. Pardies, 1636—1673)编辑出版天文图。但康熙帝并未将他留在身边。据推测，很可能由于葡萄牙传教士与法国传教士之间的矛盾，当时负责钦天监工作的葡萄牙传教士徐日升并未对这些传教士的水平给出客观的评价。参见：费赖之. 著. 冯承钧译. 在华耶稣会士列传及书目. 423—434；韩琦的《中国科学技术的西传及其影响》.

② 白晋. 康熙皇帝. 34.

③ 白晋. 康熙皇帝. 35.

④ 刘钝.《数理精蕴》中《几何原本》的底本问题.

⑤ 在此之前，安多曾向康熙帝介绍了非符号化的借根方比例法。傅圣泽称他所介绍的符号代数为“新法”便是相对于借根方“旧法”而言的。

具一般性。康熙帝要求以此为题写一篇文章。傅圣泽完成几章之后，呈送给当时在热河避暑的康熙帝，当时在康熙帝身边的另一位法国传教士杜德美解释给康熙帝听。由于杜德美生病，傅圣泽的文章在将要涉及二次方程时中断。后来，康熙帝试图与其几个儿子一起学习符号代数，但由于他不能领会符号代数的优越性，而舍弃了该方法。他还由此对傅圣泽的数学能力产生了怀疑。傅圣泽不仅试图引入新的数学内容，他还向康熙帝介绍了一些天文学方面的新发现。这些新发现能够改进第谷的天文理论，也就是说，很可能用椭圆轨道代替圆形轨道。这引起了耶稣会士内部关于应该向康熙帝和中国人传授什么样的科学知识的争论。很多传教士认为，傅圣泽等试图指出他们的前辈汤若望、南怀仁等的错误，这样会引起中国人对耶稣会士介绍的知识的怀疑。但傅圣泽反击曰，中国学者有能力独立发现第谷体系运算结果的错误，耶稣会士不能仅仅是为他们的理论进行辩护，而应该主动引入新的更具优势的理论，这样才能保证他们能够长期在中国立足。法国传教士站在傅圣泽一边，并将这样的想法付诸实践。1760 年，蒋友仁在向乾隆帝呈献的《坤舆全图》中还给出了哥白尼的宇宙模型示意图。可以看出，虽然耶稣会士关于在中国传播什么样的科学知识有不同的意见，但他们的基点是一样的，那就是，利用科学知识的传播在中国立足，以达到传教的目的[①]。法国传教士坚持向康熙帝传授更新的欧洲科学技术知识，其目的一则为了传教，二则服务于法国国王和法国皇家科学院，弘扬法国的科学。

与利玛窦等早期耶稣会士不同，17 世纪中叶至 18 世纪初来华的传教士只专注于向康熙帝传授科学技术知识，很少和中国学者们联系。这样的局面令康熙帝和耶稣会士双方感到满意。因为，由此，康熙帝成为惟一掌握西方天文数学知识的中国人，这可以保证他对相关事务的绝对仲裁者的地位。对于传教士来说，如果中国学者能够掌握欧洲天文历法知识，那么他们便失去了藉以立足宫廷的长技。通过一段时间的学习，康熙帝掌握了一定的欧洲数学、天文知识。据白晋称，“皇上对自己成了一个优秀的几何学者感到由衷的高兴，并流露出极为满意的神情”[②]。康熙帝开始扮演中国科学

① 详见：詹嘉玲(C. Jami). 欧洲数学在康熙年间的传播情况——傅圣泽介绍符号代数尝试的失败.

② 白晋. 康熙皇帝. 38.

知识的仲裁人和传授者的身份，并经常在他的大臣面前炫耀他的新知识。白晋写到：

> 最近两三年来，特别频繁地看到皇上在北京皇城和那两三个离宫，或是巡幸鞑靼和其它地区时，利用刚会使用的天文仪器，在朝臣面前愉快地进行各种测量学和天文学方面的观测。他有时用照准仪测定太阳子午线的高度，用大型子午环测定时分，并推算所测地的地极高度。他也时常测定塔和山的高度或是感到兴趣的两个地点的距离……张诚神甫经常随皇上外出巡幸并和皇上一起观测。皇上和张诚观测结果一致时，朝臣们都感到钦佩和高兴。①

1689 年 3 月 18 日，康熙帝于江宁观星台与诸部院大臣论天文。他问掌院学士李光地“尔识得星？”李光地对以不能尽识。康熙又指参星，问“这是什么星？”李光地答以“参星”。皇帝又指南边近地大星，告诉诸臣此为老人星。李光地说：“据书本上说，老人星见，天下太平。”康熙曰：“甚么相干？都是胡说。老人星在南，北京自然看不见，到这里自然看见。若再到你们闽、广，连南极星也看见。老人星哪一日不在天上，如何说见则太平？”②据韩琦考证，1689 年，老人星赤纬为 52°33’57”，南京的地理纬度为 32°，故于南京可以见到老人星。而北京的地理纬度为 40°，所以，当时在北京看不到老人星。康熙帝在登上观星台之前，特地差侍卫赵昌向法国传教士洪若翰、毕嘉打听能否在南京见到老人星，洪若翰等解释了相关的天文问题。可见，康熙帝在做了充分准备之后才在部院大臣部面前显示他的天文学知识的，李光地试图趁机向康熙帝献媚，但却被康熙帝不客气地顶了回来。③

康熙三十一年（1692）年正月初四日（2 月 20 日），康熙帝于乾清门召大学士九卿等谈音乐、数学原理。称，“黄钟之管九寸，空围九分，积八百一十分，是为律本。此旧说也。其分寸，若以尺言，则古今尺制不同，自朕观之，当以天地之度数为准。至隔八相生之说，声音高下，循环相生，复还本音，必须隔八”。遂命乐人取笛和瑟次第审音，至第八声仍还本音。他又称，“《律吕新书》所言算数，专用径一围三之法。此法若合，则所算皆合，此法若舛，则无所不舛矣。朕观径一围三之法，用之必不能合。盖径一尺，则围当三尺

---

① 白晋．康熙皇帝．50．

② 见：李光地．榕村续语录．卷 14．742．

③ 韩琦．君主与布衣之间．

一寸四分一厘有奇。等而上之,其为舛错,可胜言耶?""朕观八线表中半径勾股之法,极其精微,凡圆者可以方算,开方之法即从此出"。遂逐一检验,无不吻合。又说:"算数精密,即河道闸口流水,亦可算昼夜所流分数,其法先量闸口阔狭,计一秒所流几何,积至一昼夜,则所流多寡,可以计数矣。"又命取测日晷表,以笔画标,称,"此正午日影之处,令诸臣候视,至正午,日影与画标恰合一处",诸臣奏曰:"臣等今日仰承圣训,得闻所未闻,见所未见,不胜欢庆之至。"①

通过学习欧洲天文学,康熙帝已不再相信天人合一思想。据白晋称:

> 中国人打算办理某些重大事情时,要事先选择吉日……钦天监有一个特殊房间,这个房间只为一切重大事件选择时间和地点……康熙皇帝在原则上要求钦天监行使这个职能。可是他却利用各种机会对我们流露了那种观测毫不足信的意思。皇上个人的事情,实际上是把皇上的圣意,明确地通知钦天监,一切都由皇上自己做出决定。比如皇上的长子结婚的时候,所有的候选者,谁最适合作皇子之妃一事,按惯例属于钦天监的职权范围,应由该部门决定。但钦天监却接到了令其推举皇上自己预先选定的一位贵族小姐的旨意。
>
> 皇上要巡幸某地时,也采用同样的方法。钦天监认为适当的日子和皇上决定启程的日子是完全一致。②

当时的钦天监主要由耶稣会士领导,这样,白晋对于康熙帝关于择日等的态度的描述应该是可信的。但与此同时,康熙帝并不想完全摒弃天人合一的理论。一来,这是钦定正统学术的重要组成部分;二来,承认天人合一理论也是对他帝位由天所授的肯定。所以,虽然一方面他要钦天监根据他的决定来进呈关于择日的推算结果,另一方面,我们又可以看到,每当日食、月食及彗星出现,他还是一本正经地要群臣上表议应革之事,并借机谕令大臣们修省。例如,1682 年 8 月 26 日彗星现,尾长二尺余。康熙帝以"彗星上见,政事必有缺失"。当日命诸臣议应行应革之事③。1691 年 1 月 11 日,钦天监奏 1692 年正月初一日食,康熙帝以"日食为天象之变,且又见于岁首",谕

---

① 大清圣祖仁皇帝实录.卷 154.2b—4a.

② 白晋.康熙皇帝.45.

③ 大清圣祖仁皇帝实录.卷 103.21a.

各官修省，元旦行礼、筵宴俱停①。

康熙时期，耶稣会士不仅在宫中为康熙帝讲解欧洲天文学和数学知识，主持钦天监的工作，还讲解过医学和解剖学知识，并参加火炮制作、《皇舆全览图》(1710)的制订等。为了奖励耶稣会士的辛勤工作，康熙帝对天主教也表现出一定程度的宽容。1687 年 5 月 23 日，南怀仁请欲行天主教，礼部议不准行。康熙帝批准了礼部的奏议，认为“天主教应行禁止”。但同时，他又说：“地方官禁止条例内，将天主教等同于白莲教谋叛，此言太过，着删去。”②1692 年 3 月 19 日，康熙帝谕大学士等，“前部议将各处天主堂照旧存留，只令西洋人供奉，已经准行。现在西洋人治理历法，前用兵之际制造军器，效力勤劳，近随征俄罗斯亦有劳绩，并无为恶乱行之处。将伊等之教目为邪教禁止，殊属无辜”。初五日(3 月 22 日)礼部尚书等议奏：西洋人万里航海而来，诚心效力，劳绩甚多。“各省居住西洋人并无为恶乱行之处，又并无左道惑众，异端生事。喇嘛僧道等庙尚容人烧香行走，西洋人并无违法之事，反行禁止，行属不宜。相应将各处天主堂均照旧存留，凡进香供奉之人仍许照常行走，不必禁止。”奉旨依议③。该诏书被称作是“宽容诏书”。

然而，康熙帝批准天主教传教，并不意味着他自己倾向于天主教的教义，或者说要皈依天主教。实际上，康熙帝对与宗教相关的知识并没太大的兴趣。举例来说，1683 年 12 月 31 日，南怀仁疏请以《穷理学》一书刊刻颁布。康熙帝曰：“此书内文辞甚悖谬不通。”明珠等曰：“其所云人之知识记忆皆系于头脑等语，于理实为舛谬。”帝曰：“部复本不必发南怀仁，所撰书着发还。”④

白晋清楚地看到，康熙帝一旦“对天主教和儒教的一致性稍有疑惑，就决不会许可天主教的存在”⑤。康熙帝的立场是完全可以理解的。且不论他自幼学习儒家经典，对儒家学说会有一定的感情，儒家的纲常伦理及道德观念对于他统治国家有利。此外，作为皇帝，尤其是一个出身“蛮夷”的帝王，背离根深蒂固的儒家传统便意味着和士大夫阶层及儒家学者的决裂，而这将会对他的政权带来颠覆性的影响。

---

① 大清圣祖仁皇帝实录．卷 153．21a—b．

② 康熙起居注．第二册．清史编年．第二卷(康熙朝)．上．544．

③ 李纲己缉录．教务纪略．卷首．谕旨．清史编年．第三卷(康熙朝)．下．41．

④ 康熙起居注．第二册．清史编年．第二卷(康熙朝)．上．475．

⑤ 白晋．康熙皇帝．赵晨译．刘耀武校．黑龙江人民出版社，1981．57．

白晋的预言终于应验了。1721年,康熙帝宣布严厉禁教。传教士在华活动就此告一段落。其间的导火索便是中西交通史上著名的“礼仪之争”。“礼仪之争”是“西学东渐”史上的一个重要事件,对西方数学在中国的传播亦产生了重要的影响,本书不得不以一定篇幅对其做一简述。

据《新天主教百科全书》定义,所谓“中国礼仪之争”主要有三方面内容,一是士人祀孔,二是家人祭祖,三是有关上帝的语义和语源学的争议①。为了附儒,利玛窦将天主教中的GOD翻译为《尚书》等中国典籍中出现的“上帝”和“天”,早在其在世时,这一译名便遭到其他教派的传教士乃至耶稣会内部的反对。此外,利玛窦对中国的祀孔祭祖礼仪给出世俗化的解释,认为这些礼仪是天主教可以容忍的。17世纪30年代以后,方济各会、多明我会的在华修士先后因祀孔祭祖礼仪问题与耶稣会士产生争执。三个修会各自将争议的情况报告了在欧洲的总会长。1645年,教廷宗教裁判所对在华多明我会会长莫若翰(Juan Baptista de Morales)关于“中国礼仪之争”的报告给出答复,认为,中国教徒不得参与祀孔和祭祖活动。为此,1654年,耶稣会士卫匡国赴罗马申辩。1656年,教皇亚历山大七世做出了对耶稣会士有利的决定。1681年,阎当(Charles Maigrot, 1652—1730)来到中国,1693年,身为福建宗座代牧的阎当宣布在他的教区内严禁中国礼仪。命令将其辖地的教堂所挂的仿制康熙帝赐给汤若望的“敬天”匾额摘去。同时,他将中国礼仪问题的争执扩大到欧洲。1700年,法国巴黎大学的神学院裁定中国礼仪为异端。1704年11月,教皇克莱芒十一世决定禁行中国礼仪,并派特使铎罗(Charles Thomas maillard de Tournon, 1668—1710)到中国宣布他的敕令。

为了赢得“礼仪之争”的论战,并得到罗马教廷及其他教派对以耶稣会为主的在华传教士对中国祀孔祭祖等的容忍,1700年11月30日,在京传教士闵明我、安多、徐日升、张诚起草了一份满文奏折,要求康熙帝证明,“拜祭孔子敬其为人师范,并非求福、祈聪明爵禄而拜也。祭祀祚出于爱亲之义,依儒礼亦无求佑之说,惟思尽教思之念而已。虽设立祖先之牌位,非谓祖先之魂在木牌之上,不过抒子孙‘报本追远’、‘如在’之义耳。至于郊天之礼典,非祭苍苍有形之天,用祭天地万物根原主宰,即孔子所云‘郊社之礼,所以事上帝也’”。他们希望康熙帝能向欧洲人说明祭孔祀祖不是迷信活动。收到该折的当天,康熙帝即批曰:“这所写甚好,有合大道。敬天及事君、亲

---

① 引自:李天纲,中国礼仪之争. 15.

敬师长者,系天下通义。这就是无可改处。”[①]康熙帝不仅如传教士们所愿地表示了其完全同意耶稣会士们对祭孔祀祖及郊天的含义的态度,还指出这些礼仪都是“无可改”的。但罗马教廷并不承认不信教的世俗国王的权威,认为康熙帝无权干涉教会内部的事务。1705 年 12 月 4 日,教皇特使铎罗带着未公布的教谕到达北京。康熙帝专门派人到天津迎候,并派大臣到铎罗的住处问候。12 月 31 日,铎罗觐见康熙帝。1706 年 8 月 20 日,铎罗离开北京。在他在京期间,康熙帝对他非常热情,几次接见了他,并询问其到中国的意图。铎罗不敢向康熙帝明言其所负有的宣布教皇禁止中国信徒祭祖敬孔的禁令,令康熙帝对其产生不信任感。[②]同时,康熙帝敏感地意识到天主教与儒家传统之间所产生的不可调和的矛盾,并清楚地看出,如果不能较好地处理这一矛盾,则将为其政权的稳固性带来不可估量的灾难。在这一关键时刻,康熙帝选择了儒家传统。1706 年底,熊赐履和李光地在向康熙帝讲完朱子书后。康熙帝令二人近前,称:

> 汝等知西洋人渐作怪乎?将孔夫子亦骂了。予所以好待他者,不过是用其技艺耳,历算之学果然好,你们通是读书人,见外面地方官与知道理者,可俱道朕意。[③]

意识到传教士们禁止教徒“敬孔祭祖”的行为必将会引起儒家士大夫和学者的强烈反对。康熙帝急于通过李光地和熊赐履向地方官员及儒家学者传达其维护儒家传统的态度,并表明他重视西方人仅仅是为了利用其技艺而已。但同时,康熙帝还不忘强调西方的历算之学“果然好”,这表现出当时他还对长期保留传教士在宫廷中工作抱有幻想。

1707 年 1 月,铎罗在南京颁布教宗禁令。10 月,康熙帝派龙安国等 4 人赴罗马,陈述对礼仪的意见。这可以说是康熙帝为了挽救中国政府和罗马教廷之间的濒临决裂的关系及留住在华传教士的最后努力。然而,1710 年 9 月,教皇重申 1704 年禁令。由于关系到其政权的稳定性,康熙帝对西方的消息非常关心。但传教士们为了不使康熙帝由此对天主教产生恶感,向康熙帝隐瞒教廷的敕令。康熙五十年(1711)七月二十九日,在武英殿总监造和素等向康熙帝奏进《直隶方域路程考略》时,康熙帝询问“听到何种西

---

① 引自:李天纲. 中国礼仪之争. 49—50.

② 关于礼仪之争的详细经过,参见:李天纲,中国礼仪之争.

③ 李光地. 榕村语录续集. 卷六. 转引自:韩琦,“自立”精神与历算活动.

洋消息?”和素询问过西洋人苏琳、吉利安等后奏称,尚无消息,并给出解释。康熙帝称,“现在西洋人所言,前后不相符,尔等理当防备”①。可见,当时康熙帝已对西方传教士失去了信任。同年,康熙帝谕大学士等曰:“《朱子全书》,凡天文、地理、乐律、历数,俱非泛然空论,皆能确见其所以然之故。朕常细加寻绎,欲求毫厘之差,亦未可得。”②从对西方科学的全盘肯定及对汉人数学能力的贬抑而变为全面赞扬朱子的科学水平,我们可以清晰地看到,“礼仪之争”在康熙帝态度转化的过程中所起到的作用。同时,康熙帝又谕大学士曰:“天文历法,朕素留心。西洋历大端不误,但分刻度数之间,久而不能无差。今年夏至,钦天监奏闻午正三刻。朕细测日影,是午初三刻九分。此时有舛错,恐数十年后,所差愈多……此事实有证验,非比书生作文,可以虚辞塞责也。”③

这样,西方的历法与中国的历法一样存在着日久生误的问题,西方天文体系和西方数学绝对正确的光环被击碎了。

1715 年 3 月 15 日,教皇颁布“即日起”通牒,措辞更严,并要求教士宣誓守禁。1717 年 5 月 24 日,兵部议复广东碣石总兵陈昴疏言:天主教设自西洋,“今各省设堂,招集匪类,此居心叵测,目下广州城设立教堂内外布满,加以同类洋船丛集,安知不交通事生,乞敕早为禁绝,毋使滋蔓”。查康熙八年会议天主教一事,奉旨天主教除南怀仁等照常自行外,其直隶各省立堂入教,著严行晓喻禁止。但年久法驰,应令八旗、直隶各省并奉天等处再行严禁。康熙帝批示:“从之。”④兵部根本不提康熙帝曾下的允许传教的诏书,重申以前只许南怀仁在北京传教的谕旨。康熙帝也就借此同意了严行禁止天主教在中国的传播。

1720 年,康熙帝谕在华传教士曰:

> 自利玛窦到中国二百余年,并无贪淫邪乱,无非修道。平安无事,未犯中国法度。自西洋航海九万里之遥者,为情愿效力。朕因轸念远人,俯垂矜恤,以示中华帝王不分内外。使尔等各献所长,出入禁廷,曲赐优容致意。尔等所行之教与中国毫无损益,即尔等

---

① 康熙帝. 满文朱批奏折全译. 741.

② 康熙帝. 圣训. 引自:康熙政要. 356.

③ 康熙帝. 圣训. 引自:康熙政要. 356—357.

④ 大清圣祖仁皇帝实录. 卷 272. 7a—b.

去留也无关涉。①

1721年1月18日，嘉乐将教皇禁令译成中文，呈送康熙帝。康熙帝在禁约上批道：

> 批览此条约，只可说得西洋人等小人，如何言得中国之大理？况西洋人等无一人通汉书者，说言议论令人可笑者多。今见来臣条约，竟是和尚道士异端小教相同。彼此乱言者，莫过如此。以后不必西洋人在中国行教，禁止可也。免得多事。②

至此，中国正式禁教。现代耶稣会士史学家邓恩论曰："禁止参加祭孔的禁令使得学者、官员们不可能成为天主教教徒。而教徒因而不可能进入学者行列，这就失去了得到学者和官员们同情和善待的可能性。而在耶稣会的传教策略中，这些学者和官员阶层是传教士们和平地渗透进中国社会的基础。在禁止祭祖礼仪的影响下，教会不得不处于与整个社会环境为敌的境地。与此同时，天主教成为在中国社会文化身体上的一个外来的异物。它表明'文化适应'的政策基本上已经结束了……信仰的纯洁性所需要付出的代价实在是太高了。"③站在耶稣会士的立场，邓恩惋惜"礼仪之争"为天主教在华传播的事业所带来的毁灭性灾难。由欧洲科学在中国传播的视角来看，我们也不得不对由其引起的禁教及驱逐传教士为欧洲科学在中国传播所带来的巨大损失感到遗憾。

1724年，12月14日，两广总督孔毓珣奏有关传教士及其他欧洲人的情况，雍正帝虽批"对西洋人勿过严"，但同时称"海禁宁严勿宽，余无善策。尔等地方大吏，不可因目前便利而贻他日之害"④。1725年11月12日，罗马教皇遣使来华，雍正帝告之曰：来华之西洋人，只要"慎守法度，行止无愆"，便一定会推恩抚恤。次年，应罗马教皇之请，释放了囚禁于广州的西洋传教士毕天祥、计有纲⑤。

事实上，从1700年之后，康熙帝开始重视中国民间的数学家，并试图摆脱对耶稣会士的依赖。他虽然仍对西学有着浓厚的兴趣，并很可能试图以其掌握的欧洲科学知识来在智力上取得他对于汉人士大夫阶层的优势，但

---

① 樊洪业．耶稣会士与中国科学．189．

② 康熙．朱批．康熙与罗马关系文书．台湾学生书局．1973．70—71．

③ 邓恩．从利玛窦到汤若望．284．

④ 雍正帝．朱批谕旨．转引自：清史编年．第四卷．100．

⑤ 雍正帝．上谕内阁．转引自：清史编年．第四卷．157．

他又巧妙地把他的西学学习纳入帝王正统的职责范畴之中。“通过颁布一部准确的历法，他将人类社会与天际循环相协调；绘制舆图象征着他已完成了帝国领土秩序的整顿；通过学习西学，他掌握了制订历法和绘制地图的适当方法；最后，通过编撰《律历渊源》，他保证了这些方法可以流传后世。确实，康熙帝完成上述活动正是为了仿效古代的圣人之制”①。康熙帝对西学的态度亦可以从梅文鼎的际遇和《律历渊源》的编写中看出端倪。我们在下面的两节中通过对梅文鼎的工作和《数理精蕴》的影响的探讨再做具体分析。

第三节　梅文鼎及其数学工作

康熙帝对数学的重视确实在其执政期间掀起了一个研究数学的高潮。清初重要数学家梅文鼎便因康熙帝的青睐而享有盛名。

梅文鼎(1633—1721)，字定九，号勿庵，安徽宣城人。是17世纪最著名的中国数学家。受其父梅士昌及塾师罗王宾影响，他自幼就学习了一些天文知识。27岁时，他与其弟梅文鼐、梅文鼏一起研究从倪观湖处得到钦天监交食法，“稍稍发明其所以立法之故，补其遗缺，著《历学骈枝》二卷”。②成年后，梅文鼎曾数度到金陵(今南京)访师会友，与黄虞稷、潘耒、方中通、方中履、杜知耕、揭暄等通数学的学者都有来往，并与方以智、薛凤祚等通信。1672年冬，梅文鼎完成他的第一部数学著作《方程论》的初稿，又于两年后整理成册。1675年，他在金陵购得部分《崇祯历书》，同时，又从人借抄得穆尼阁的《天步真原》及薛凤祚的《天学会通》等书，开始研究欧洲历算学。1680年，他将自己的9部数学著作汇编成《中西算学通》初编。同年，出版了《筹算》一种③。1684年，梅文鼎完成了讲述球面三角学的《弧三角举要》。

1689年，梅文鼎到达北京，他本欲探访南怀仁，但南怀仁在不久前去世。当时，清廷正在组织学者纂修《明史》，故北京云集着众多著名学者。梅文鼎得与朱彝尊、阎若璩、万斯同、陆陇其、刘献廷、黄百家等名家交游，并与安多结识。作为当时的历算名家，梅文鼎受托参加了《历志》部分文稿的修

---

① 詹嘉玲. 是“西学”，还是在中国的欧洲科学.

② 阮元. 梅文鼎(上). 畴人传. 卷37. 1a. 见：中国科学技术典籍通汇·综合卷. 七. 7—442.

③ 刘钝. 方程论提要. 中国科学技术典籍通汇·数学卷. 四. 4—317.

订工作①。由于梅文鼎在天文数学方面的成就，李光地将其延至家中。

李光地(1642—1718)，字晋卿，号厚庵，福建安溪人。他青年时曾随其父学习了一些数学知识。②后随潘耒继续学习。但由于他在数学方面的领悟力不是很强，而潘性急，当遇到李光地不懂他所讲授的内容时，潘"拂衣骂云：此一饭时可了者，奈何如此糊涂"。③李光地 1670 年中进士。1672 年授翰林院编修，1686 年任翰林院掌院学士，后来官至文渊阁大学士。大约在1687 年左右，康熙帝对李光地的水平产生怀疑。1689 年，康熙帝向李光地的座师，曾向康熙帝推荐过李光地的熊赐履，探问李光地的学术水平，熊称李"一字不识，皆剽窃他人议论乱说，总是一味欺诈"。④后在江宁观星台，李光地的对答又不趁康熙帝之意，受到康熙帝的批评。⑤ 1689 年五月，李光地调任通政使司通政使。

梅文鼎抵京后，很快被李光地请入家中坐馆，教授李光地及其几个学生学习天文数学。⑥1690 年，在李光地的建议下，梅文鼎著成《历学疑问》2 卷。后该书由李光地出资刊刻。王萍认为，"以文鼎之学，养而为此书，确系大材小用。而李光地极力催其完成此书，与其谓为使人人得其门户，不如谓其欲呈予康熙帝，则较恰当"。陈祖武也认为，李光地招梅文鼎入府，"讲求天文历算学，以便同康熙帝的学术好尚全然吻合"。李光地请梅文鼎传授历算学及促其写成《历学疑问》的动机很可能是为了向康熙帝邀宠的。但善于揣度康熙帝心思的李光地此次却未能完全领会康熙帝的意图。康熙帝要利用传教士传授的欧洲天文数学知识来树立其在科学知识方面的权威，成为中国与科学相关的事务的最高权威和仲裁人，所以，虽然他多次指责满朝大臣对科学知识的无知，但却似乎并无意于为一个精通天文数学知识的汉人树立学术威望。1689—1693 年间，梅文鼎断续在京居留了 4 年，其间还受到康熙帝之兄裕亲王福全(1653—1703)的礼请，他在天文历算方面的能力甚至引

---

① 关于《明史》历志的修订，见：韩琦，从《明史》历志的撰修看西学在中国的传播.

② 阮元. 李光地. 畴人传. 卷 40. 1a.

③ 李光地. 榕村语录.

④ 引自：李光地. 榕斋语录. 转引自：韩琦. 君主与布衣之间.

⑤ 李光地的调职与他和徐乾学、汤斌、高士其及熊赐履之间的派系争斗有关。后康熙帝曾多次指责熊赐履等虽为道学名家却构陷他人，可能也与李光地有关。

⑥ 韩琦. 君主与布衣之间.

起了钦天监官员们的忌畏[①]，但康熙帝并未召见过他。1693年，梅文鼎告别李光地回到南方。在京期间，梅文鼎还完成了《少广拾遗》(1692)，该书系统阐述中国古代利用贾宪三角形[②] 开高次方的立成释锁开方法。

1692年，康熙帝斥熊赐履不懂历法，同时连带上了梅文鼎，他称：

> “近日有江南梅姓者，闻其通算学。曾遣人试之，所言测景，全然未合。从来测景之法，某日某时太阳到度，其辨甚微。此人立表至短，曾不逾寸，一寸中差一杪，至尺则差一分，至丈即差一寸。彼因算法不密，故测景用短表，以欺人不见耳。”[③]

可见，当时康熙帝虽知道有梅文鼎其人，但对他的评价并不甚高。这很可能正是梅文鼎离京的重要原因。

此后近十年间，梅文鼎游学于江南和福建之间，授徒著书。李光地于1694年任顺天学政，1698年后，任直隶巡府，在此期间，他一直提倡经学和算学，周围聚集着一批通数学、天文、音律人才，如魏廷珍、王兰生、王之锐、陈成策、徐用锡等。1702年10月，康熙帝对李光地称，“汉人于算法，一字不知”[④]。但他却决定要阅读一些汉人所撰的天文、数学著作了。康熙帝向李光地索取相关书籍，李光地向他进呈了梅文鼎的《历学疑问》，自认为天文学事务的最高仲裁人康熙帝称，“朕留心历算多年，此事朕能决其事非”。两天后，康熙帝对李光地说，“昨所呈书甚是细心，且议论亦公平，此人用力深矣，朕带回宫中仔细看”。一年后，康熙帝南巡时，将《历学疑问》交还李光地，并称，“无疵瑕，但算法未备”。虽然康熙帝承认梅文鼎的著作没有瑕疵，但同时指出“算法未备”，似乎他要继续坚持汉人不通算法的论断。李光地将他已将《历学疑问》呈献给康熙帝的消息告诉了梅文鼎，梅氏对此满怀感激。1703年，梅文鼎来到保定，再次入李光地府坐馆。1705年6月10日，康熙帝南巡返京路过德州时，召见梅文鼎于舟次[⑤]。梅文鼎将《三角法举要》呈献给他。后，康熙帝谓李光地：“历象算法朕最留心，此学世鲜知者，如文鼎真

---

① 毛际可在《梅文鼎传》中称：“台官甚畏忌之，然先生(梅文鼎)素性恬退，不欲自炫其长以与人竞。”毛际可．梅文鼎传．转引自：韩琦．君主与布衣之间．

② 其构造与现代数学中所称的帕斯卡三角形一致。

③ 康熙帝．圣谕．张玉书文集．转引自：章梫．康熙政要．358．

④ 李光地．榕村续语录．卷17．814．

⑤ 李光地称：“忆及闰四月十九日臣地与文鼎伏迎河上，越晨俱召对御舟中，从容垂问。至于移时如是者凡三日。”见：李光地．绩学堂文钞序．绩学堂文钞．11b．

仅见也。其人亦雅士，惜乎老矣”[①]，并特书“绩学参微”赠予梅文鼎。此后，随着康熙帝与罗马教廷之间关系的日益紧张，他对梅文鼎的重视程度则随之加深。梅文鼎去世时，他特命江南织造曹頫“经纪其丧”，“传为稽古之至荣”。[②]梅文鼎可能是中国历史上惟一的一位因为掌握数学知识而受到帝王如此礼遇的人物。

梅文鼎一生著述颇丰，据说，到 18 世纪末，他的天文、数学著作已有八十余种。梅文鼎的主要作品都被收录在魏荔彤主编的《梅勿庵先生历算全书》(1723)和《梅氏丛书辑要》(1761)中。《梅氏丛书辑要》由梅文鼎之孙梅瑴成编辑成书，是研究梅文鼎天文、数学工作的最具权威的原始资料。《梅氏丛书辑要》共收入梅文鼎的著作 23 种 60 卷，另附梅瑴成自己的著作 2 种 2 卷。其子目依次为：《笔算》(五卷，1693)、《筹算》(二卷，1678)[③]、《度算释例》(二卷 1717)、《少广拾遗》(一卷，1692)、《方程论》(六卷，1672)、《勾股举隅》(一卷)、《几何通解》(一卷)、《平三角举要》(五卷)、《方圆幂积》(一卷 1710)、《几何补编》(四卷，1692)、《弧三角举要》(五卷，1684)、《环中黍尺》(五卷，1700)、《堑堵测量》(二卷)、《历学骈枝》(五卷)、《历学疑问》(三卷)、《历学疑问补》(二卷)、《交食》(四卷)、《七政》(二卷)、《五星管见》(一卷)、《揆日纪要》(一卷)、《恒星纪要》(一卷)、《历学答问》(一卷)、《禥著》(一卷)。其中前 13 种为数学著作，后 10 种为天文著作。

梅文鼎承袭利玛窦在《几何原本》序中所介绍的欧洲数学分类法，将数学分为数与度两类，称：

> 夫数学一也，分之则有度有数。度者量法，数者算术，是两者皆由浅入深，是故量法最浅则方田，稍进为少广，为商功，而极于勾股，算术最浅者粟布，稍进为衰分，为均输，为盈朒，而极于方程。方程于算术，犹勾股之于量法，皆其最精之事，不易明也。[④]

梅文鼎将传统数学的“九章”系统阐释为按照难易程度顺序安排的度与数两类数学知识。度的方面，也就是几何方面的顺序为：方田→少广→商功→勾股；数的方面，也就是数值计算方面的顺序为：粟布→衰分→均输→盈不足

---

① 李光地．绩学堂文钞序．绩学堂文钞．1b.

② 四库全书馆．四库全书·历算全书提要．历算全书．四库全书．

③ 《筹算》初稿原为七卷，在《梅氏丛书辑要》中精简为二卷。见：钱宝琮．中国数学史．253.

④ 梅文鼎．方程谬误之故．方程论．梅氏丛书辑要．卷十一．4b—5a.

→方程。梅瑴成正是按照梅文鼎关于数学知识的划分以循序渐近的方式安排《梅氏丛书辑要》的顺序的。在 13 种数学著作中，前 5 种著作属梅文鼎所规定的算术类，后 8 种属量法类。《笔算》主要介绍西方笔算算法。《筹算》所介绍的是西洋算筹用法，而非中国古代筹算法。《度量释例》介绍西方尺算，也就是比例规的用法。书中纠正了罗雅谷《比例规解》中的讹误之处[①]。《少广拾遗》以《开方作法本源图》为核心，系统阐述中国古代开高次方的立成释锁方法。梅文鼎算法类最值得关注的是《方程论》。梅文鼎称算法类最高深的方法为方程，所以，梅瑴成将《方程论》一书安排为算法类的最后一部。[②]

按照梅文鼎的说法，除方程和勾股以外，其他数值计算方法都是“近用所需”的，故都有较好的流传，勾股术可被“用以知道里之修，城邑之广，山之高，水之深，天地日月之行度”[③]，属于数学分支中之“精”、“大”者，所以“自昔恒有专书”[④]。独方程术，一来是算法中“最精之事，不易明也”，二来是“算学无关进取”，学者“皆视为贾人胥吏之事，而不屑从事”，然而商贾们“其用近小，但于方田、粟布取之，亦无不足”[⑤]，所以，方程术已久不为世人所道。《方程论》即是专门讨论方程术的著作。所谓方程术，其数学内容相当于多元一次联立方程组的解法。成书于公元前 1 世纪的中国古代最重要的数学著作《九章算术》中专有《方程》一章，但自明代末年，《九章算术》罕见其传[⑥]，当时尚较流传的杨辉的《详解九章算法》、吴敬的《九章算法比类大全》(1450)中都收录了《九章算术》中的很多算题，并保留了“九章”的数学体系，流传很广的程大位的《算法统宗》(1592)也是以“九章”为基本结构的，所以对于有心研究传统数学方法的人来说，《九章算术》原书虽已很难得见，但还可以了解其大体内容。梅文鼎很可能读过《九章算法比类大全》和《算法统宗》，他在论述“方程谬误之故”时称，“方程，别无专书可证，所存诸例，又为

---

① 关于梅文鼎的这几部数学著作的内容，详见：钱宝琮. 中国数学史. 253.

② 但这部书实际上是上述 13 部数学著作中梅氏完成最早的一部。

③ 梅文鼎. 方程谬误之故. 方程论. 梅氏丛书辑要. 卷十一. 3a.

④ 梅文鼎. 方程谬误之故. 方程论. 梅氏丛书辑要. 卷十一. 5a.

⑤ 梅文鼎. 方程谬误之故. 方程论. 梅氏丛书辑要. 卷十一. 5a.

⑥ 18 世纪末，毛扆从宋版《算经十书》的抄本中恢复了 7 部古典数学著作，1774—1776 年间，戴震在《四库全书》馆从《永乐大典》中抄录出 7 部算经。后孔继涵综合这两套著作出版了《算经十书》。至此，学者和数学家们才可以较为容易地得到《九章算术》。

俗本所乱，妄增歌诀，立为膠固之法，印定后贤耳目，而方程不复可用，竟如赘疣”。这正是针对像《算法统宗》一类含有大量算法口诀的民间数学书籍的批评。梅文鼎相信“古人立法决不如此”，于是，以恢复古法为目的，他自己决定要“以管窥之见，反覆推论以明之，务求其理众晓，而不疑于用，庶不致谬种流传，以乱古法云尔”[①]。

开篇伊始，他摒弃了程大位等以未知数个数为基础的线性方程组分类的方法，改由根据系数符号的排列情况对线性方程组进行分类。因为他认为，以未知数个数进行方程分类，综合未知数系数符号的变化而给出的解线性方程组分类方法使得“端绪斜纷，而说之滋谬也”。此后，按照他的分类方法，他给出各类线性方程的一般解法及引入具体数字的例题，并以这些例题详尽地说明解线性方程组的具体步骤。卷二为“极数”，其内容为解分系数线性方程组的方法。卷三“致用”，探讨针对具体问题如何简化解线性方程组的运算方法。卷四“刊误”，针对程大位《算法统宗》、吴敬《九章比类算法大全》、李长茂《算海说详》及李之藻《同文算指》中有关“方程”的错误进行辨正。卷五“测量”，给出一些利用方程术解决测量问题的实例，但梅文鼎开篇即称“测量非方程事也。方程者，算术。算术恃计，测量恃目，实惟两途。测量之不能兼算术，犹算术之不能兼测量”[②]。所以，他认为，虽然可以利用线性方程组的方法解决一些量法方面的问题，但数值运算方法不能涵盖量法，同样，量法也不能涵盖数值运算方法[③]。

《方程论》成书后，梅文鼎一直试图“得古书为徵”，也就是说，找到古代数学著作以证实他对方程术的复原是否与古法相符。但一直“不可得”，所以他“不敢出以示人”，该书只在梅氏的几个朋友间传抄。后在潘耒的催促下，由梅文鼎的同乡阮鸿胪出资刊刻[④]。

梅瑴成将《勾股举隅》和《几何通解》两书置于量法类之首，也是颇具深

---

① 梅文鼎．方程谬误之故．方程论．梅氏丛书辑要．卷十一．5a—5b．

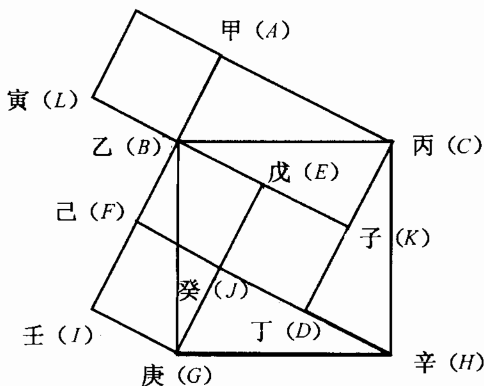
② 梅文鼎．测量．方程论．卷六．梅氏丛书辑要．卷十六．1a．

③ 梅荣照曾详论《方程论》的特点和数学内容。见：梅荣照．略论梅文鼎的《方程论》．

④ 梅文鼎．方程著论校刻缘起．方程论．梅氏丛书辑要．卷十一．7a．

意的。此两部书均是梅瑴成据梅文鼎旧稿整理而成的。①《勾股举隅》中，梅文鼎首先给出勾股名义，此后指出，在勾、股、弦、勾股积及勾、股、弦三事之和、较等诸元素间，只要已知其中的两项便可解勾股形。宋代杨辉《详解九章算法》中已经给出勾、股、弦及其和、差的名目表，除去可以利用代数方法归纳出的重复项，这类元素共有13项。加上梅文鼎加入的勾股积，则应共14项。在《勾股举隅》中，梅文鼎称：“以勾、股、弦三者相并相减以生和较，参全错综，遂如五花八门。”②可见，他自己很可能没有归纳出这14项的具体名目③。《勾股举隅》第一题以出入相补原理证明了勾股定理，从现有材料来看，这是在刘徽、赵爽之后中国数学家用此原理证明勾股定理的最早文献。④

甲乙丙(ABC)勾股形，甲乙为勾，甲丙为股，丙乙为弦。甲寅方为勾实(甲乙勾自乘之方也)，丙己方为股实(甲丙股自乘之方也)，丙庚方为弦实(丙乙弦自乘之方也)。丙庚弦实内兼有甲寅句实，丙己股实。



论曰：试自弦方之乙角作乙子线，与甲丙股平行而等。又自丙角作丙丁线，与甲乙句平行，而与甲丙股等。又自辛角作辛癸线与甲丙股平行，自庚角作庚戊线与甲乙平行。而皆与甲丙股等。则丙子、辛丁、癸庚、戊乙四线必皆与甲乙句等。而成乙子丙、丙丁

① 梅文鼎生前手订之《勿庵历算书目》中并不见此两书名。梅文鼎自撰书目中有《勾股积求勾、股、弦》、《用勾股解〈几何原本〉之根》、《勾股测量》和《几何增解》等篇目。魏荔彤将上述四篇与梅氏弟子杨作玫所撰之《勾股正义》合编为《勾股阐微》。梅瑴成在编辑《梅氏丛书辑要》时去掉《勾股正义》，将另四篇编成《勾股举隅》和《几何通解》。

② 梅文鼎．几何举隅．梅氏丛书辑要．卷十七．1a—b．

③ 19世纪初，李锐以勾、股、弦及其和较十三项为基础，构造出一个完备的解勾股形的系统。详见下文。

④ 刘钝．勾股举隅、几何通解题要．中国科学技术典藉通汇·数学卷．四．4—431．

辛、辛癸庚、庚戊乙四勾股形于弦实内，皆与原设之甲乙丙形等。于是移丙丁辛形于乙壬庚位，移辛癸庚形于甲乙丙位，则丙庚大方变成甲丙丁癸庚壬磬折形。末从癸己截之，成大小二方形，则丙己大方即股实，癸壬小方即勾实（癸壬小方与甲寅勾实等），是一弦实分为勾股二实也。①

梅文鼎首先借助图形给出勾股定理的解释。*ABC* 为勾股形，*AB* 为勾，*AC* 为股，*BC* 为弦。正方形 *AL* 相当于勾的平方，正方形 *CF* 相当于股的平方，*CG* 相当于弦的平方。所要证明的是：正方形 *CG* 为 *AL* 和 *CF* 两个正方形之和。

梅文鼎的证明相当于从 *B* 点作 *BK* 直线平行于勾股形的股 *AC*；自 *C* 点作 *CD* 直线平行于勾 *AB*，且长度等于股 *AC*；从 *H* 角作 *HJ* 与 *AC* 平行，从 *G* 角作 *GE* 直线与 *AB* 平行，令两线段的长度均等于股 *AC*。这样，*CK*、*HD*、*GJ*、*BE* 四线段的长度必与勾 *AB* 等。直角三角形 *CDH*、*HJG*、*GEB*、*BKC* 必与原勾股形 *CAB* 相等。将 *CDH* 移至 *BIG*，将 *HJG* 移至 *ABC* 的位置，则正方形 *BCGH* 化为矩折形 *ACDJGI*。最后，从以 *JF* 截矩折形为两部分，其中 *CG* 即股的平方，*IJ* 即勾的平方，所以，一个弦的平方可以分为勾的平方和股的平方两个部分。

与本书第一章提及的徐光启在《句股义》中给出的证明方法一样，梅文鼎通过对几何图形的分合移补给出勾股定理的证明。前章已述，此法为中国传统算法中已有的“出入相补”证明方法。梅文鼎对书中的其他算题亦以相似的方法给出证明。在西方数学在中国传播的背景下，此题的意义不仅在于梅文鼎重构了勾股定理的证明，而且在于通过利用传统方法给出勾股定理的证明，梅文鼎便可将勾股术的基础完全置于传统数学的范畴之内，这相当于对徐光启所指出的只有在《几何原本》译成后，才能够讲清中国数学著作中所蕴含的“义”的否定。只有在这一基础上，梅文鼎的“几何即勾股论”才有意义。然而，此处，我们还必须提到，梅文鼎的著作完全采取利玛窦和徐光启所译著作中引入的术语，书中算题的体例亦与《几何原本》中问题体例完全一致。不仅如此，梅文鼎对其书中每个命题均给出证明，这正是徐光启所强调的西方数学相对于传统数学的优势所在。且梅文鼎在作图时反复提到平行一词。虽然他没有给出他所作的勾股形与原勾股形全等的证

① 梅文鼎，勾股举隅．3b—4a．

明，但他很可能引用了平行线理论。平行线理论和概念均是传统数学中所没有的。这样，他给出的勾股定理证明并不是严格建筑在传统数学的体系之上的。由此，我们可以说，在梅文鼎拒绝以西方数学涵盖中国数学的同时，接受了西方数学方法论的精髓及西方数学的基本理论。

梅文鼎的《几何通解》的副标题即是“以句股解几何原本之根”。他在该书开篇即称：

> 几何不言句股，然其理并句股也（西人谓勾股为直角三角形，译书时不能会通，遂分途径），故其最难通者，以句股释之则明。[①]

书中，他用勾股术重新证明和改写了《几何原本》卷二第五、七、八、九、十、十一题；卷三第二十七、三十五题，卷四第十、十一题和卷六第三十题等。梅文鼎只通过几个例题证明《几何原本》可以由中国传统勾股术推演出来，如此便得出《几何原本》前6卷中介绍的欧洲几何学体系可以完全由中国传统的勾股体系扩展生成的结论，这显然是不充分的。此外，梅文鼎的做法打散了《几何原本》的演绎体系。在中国传统数学中，如何解决数值问题是中国数学家关注的焦点，所以，通常的数学著作都是由问题集的方式编成的。囿于传统数学的框架，梅文鼎很可能没有理解欧几里得几何学严谨的演绎体系，但在《几何举隅》和《几何通解》中，梅文鼎坚持对他所处理的任何问题都给出证明[②]，则可明显看到《几何原本》的影响。[③]

梅文鼎几何学著作的核心即是阐示“几何即勾股”论[④]。西方三角学与中国传统的勾股术一致，甚或起源于勾股术的说法并不是梅文鼎的独创。黄宗羲曾称“勾股之术乃周公商高之遗，而后人失之，使西人得以窃其传”，黄氏入室弟子陈訏曾撰《勾股引蒙》五卷和《勾股述》二卷，探讨解勾股形的

---

① 梅文鼎. 几何通解. 梅氏丛书辑要. 卷十八. 1a.

② 在《几何通解》解《几何原本》卷二第十一题中，梅文鼎对题目中需要的 $2a+(c-a)=c+a$ 都给出了证明和解释。在此前的中国数学著作中，一般对这样的公式，甚至比这更复杂的公式，都并不给出任何解释。

③ 就笔者掌握的史料，除徐光启之外，其他明、清数学家均未留下记录其对《几何原本》演绎体系的理解的论述。《数理精蕴》中的《几何原本》选择的是法国数学家巴蒂斯的作品，该书的体例与欧几里得的著作已有很大不同。从中可以看出当时中国数学家的选择趋向。详见下文。值得注意的是，16、17世纪以来，欧洲一些重要的学者和科学家批评古希腊几何学著作的写作方式，毕达哥拉斯式的注重数字运算的数学方法甚为流行，同时，与梅文鼎同时的一些欧洲重要数学家的著作中也包括一些并不严谨和完备的证明。

④ 刘钝. 梅文鼎在几何学领域的若干贡献.

理论和方法。陈訏在《勾股引蒙》凡例中称："三角八线皆句股法也。"可见，三角即勾股的说法在当时非常普遍。梅氏在这方面走得更远一步，是他试图将传进来的所有欧洲几何学内容构筑于勾股术之上，所以，他尝试着利用勾股术、出入相补原理及传统数学中处理平面和立体几何的方法来重新解释传入的欧洲几何学知识。

梅瑴成将《勾股举隅》置于"度"类著作的第一部，相当于既介绍了中国传统"度"学的最高成就，即勾股术，又阐明了来自欧洲的"几何学"的立法基础。紧接着给出的《几何通解》则明确指出西方的"几何学"是构筑在"勾股术"的基础上的。在其他几部度学著作中，梅文鼎进一步阐明他的"几何即勾股"的理论。在《平三角举要》序言中，梅文鼎再次强调："西法用三角犹古法之用句股也。"梅文鼎对《大测》、《测量全义》等书中所含的涉及三角形的几何学性质，以及有关三角术的算法做了系统的整理①。在书中给出利用垂线将钝角和锐角三角形化为勾股形的方法，此后，梅文鼎试图藉传统勾股术重新整理三角学知识。关于该书的具体方法和内容，我们将在第六章中做较为详细的介绍。《方圆幂积》中讨论了方中容圆和圆中容方的相应长度及体积之比，以及立方容球和球容立方的相应长度及体积之比，具有相等面积的方、圆边长与直径的比，球体与其外切圆柱体的表面积比及体积比，球冠的面积和球扇形的体积等。当时引入的《测量全义》等著作中虽然收录了阿基米德(Archimedes)有关球体的几个命题，但并没有给出证明，而由于《九章算术》原书已很难见到，梅文鼎等数学家无法看到记录祖暅的球体积公式及其公式求解过程的文献。梅文鼎于该书开卷即称："《新法历书》曰割圆，亦属古法。②"书中，梅氏利用中国传统出入相补原理，通过对球、柱等旋转体截割拼合，得到正确的球体积公式和一系列相关结果。为了解决球体积公式的证明问题，他提出了类似于旋转体的古尔丁(P. Guldin)定理的思想③。这是中国数学家利用传统数学方法证明引入的欧洲数学公式的一个早期尝试，18世纪20年代之后，欧洲数学知识的传入基本停滞，而早先传

---

① 关于《大测》、《测量全义》，见本书第一章。明末清初，三角学知识大都是作为制订历法的运算方法引入的，所以相关内容多零散见于《崇祯历书》等著作中。梅文鼎的《平三角举要》可称是中国数学史上最早的三角学教程。详见：刘钝．平三角举要提要．中国科学技术典藉通汇·数学卷．四．458．

② 梅文鼎．方圆相容，方圆幂积．梅氏丛书辑要．卷二十四．1a．

③ 刘钝．方圆幂积提要．中国科学技术典藉通汇·数学卷．四．509．

入的一些数学知识,尤其是与三角学相关的知识的证明方法未被介绍到中国,一些中国数学家只能利用中国传统的数学方法对这些内容给出证明,并做进一步的发展。梅文鼎的工作可谓是这方面研究的先导。在《几何补编》中,梅文鼎研究了《测量全义》中引入的正四面体、正八面体、正十二面体及正二十面体的几何性质,他还引入了两种半正多面体:方灯体和圆灯体。他给出了各立体体积与棱长的关系,并专门讨论了五种正多面体和两种半正多面体及球体间的相容关系等。①《弧三角举要》、《环中黍尺》、《堑堵测量》三书都是关于球面三角学的著作。其中,《弧三角举要》可以说是中国人撰写的第一部球面三角学教科书。卷一介绍有关球面几何的知识并对球面三角形进行分类。卷二以黄、赤坐标换算为例,例述了解球面直角三角形的纳皮尔(Napier)算法,然后介绍更具一般性的正弦定理。卷三详细讨论了将各种一般球面三角形化为球面直角三角形的方法。卷四利用球面三角形边或角的对称、互余、互补等关系构造新的球面三角形进而求解的方法。卷五排列出 4 类 21 个成比例关系的三角公式,又列表说明了各式的具体用法②。《环中黍尺》中,梅文鼎利用投影原理研究球面三角形。在《堑堵测量》中,梅文鼎提出,四面全是勾股形的直角四面体,“立三角形”,也即传统数学中的“鳖臑”,是立体测量的基础③。

梅文鼎的著作多通俗易读,“其论算之文务在显明,不辞劳拙,往往以平易之语解极难之法,浅近之言达至深之理,使读其书者不待详求而义可晓然”④。试图学习数学的学者们完全可以利用他的著作自学。所以,他的著作对清代数学知识的传播产生了很大的影响。梅文鼎另一项对清代数学影响颇大的工作是他对中、西数学特点的分析及其对中、西会通的倡导。而这又与他和康熙帝共同倡导的“西学中源”说有关。

---

① 关于梅文鼎《几何补编》中的数学内容及梅文鼎的计算方法,详见:刘钝. 梅文鼎在几何学领域中的若干贡献.

② 刘钝. 弧三角举要提要. 中国科学技术典籍通汇·数学卷. 四. 565.

③ 关于梅文鼎几何学方面的工作,参见:刘钝. 梅文鼎在几何学领域中的若干贡献.

④ 阮元. 梅文鼎. 畴人传. 卷 38. 15a.

第四节　“西学中源”说与《数理精蕴》的编撰及影响

一、“西学中源”说

所谓“西学中源”，意指西方的学术都是起源于中国的。这里的西学最初主要是指天文历法，以及与之相关的数学。在前面的章节中，我们已叙述了利玛窦的调合儒、耶适应的传教政策。早期，利玛窦也以类似的说法描述欧洲科学、技术。1601 年，利玛窦向万历帝进呈方物的奏表中称：

> 天地图及度数，深测其秘；制器观象，考验日晷，并与中国古法吻合。倘蒙皇上不弃疏微，令臣得尽其愚，披露于至尊之前，斯又区区之大愿。①

表中，他以自己掌握与中国古法吻合的天文、舆地、数学等知识为说辞，希望能引起万历帝对他的重视。② 接受欧洲知识的明末士大夫们也多有关于欧洲科学与中国古代科学相符的说法。徐光启在《几何原本》序中即称，通过《几何原本》前六卷的翻译，古学废绝二千年后“顿获补缀”。

与利玛窦的说法相似，徐光启、李之藻等人的言论并不属于“西学中源”说。他们所强调的是西学与中学的相似性，而其理论依据是“心同理同”的观念。“其用意是在西学与中学之间建立某种联系，缩小中西学术的隔阂，使西学不致被正统学者目为异学，以避‘用夷变夏’之嫌”③。

1704 年 11 月，康熙帝在《三角形推算法论》：

> 《孟子》云，规矩方员之至，圣人人伦之至。益见规矩方员，乃数学之根本，太极两仪之变化也。三代以上，人心尚实，有学必精。所以考订日月之盈缩，七政之参差，鸟兽草木之应候，又以闰月定四时，‘庶绩咸熙’者，岂偶然哉？古人璿玑齐七政，表度准南北。察两至明太阳之回转，识二分为寒暑之变迁。日月星辰交食、凌犯入差，清濛地气之考，苟非测量，难得其详。有测量无推算，势不可

---

① 利玛窦．进呈方物表．见：徐宗泽．中国天主教传教史概论．177.

② 利玛窦可能并不真的认为欧洲科学与中国古代科学是一致的。在 1595 年的两封信中，他分析了中国的宇宙理论和托勒密水晶球理论的区别，并认为托勒密的体系较中国的宇宙体系更为优越。

③ 王扬宗．明末清初“西学中源”说新考．

成。所以古人以圆容众角，众角容方，自方而三角，勾股在其中矣。勾三股四弦五者，以直角论，乃一角九十度，并两角又九十度，即成半圆一百八十度也。若非直角，出于九十度内外者，勾股之所不能推，虽分作直形，凑合偶成，亦非数家之堂奥，何足论哉[①]？上古若无众角归圆，何能得历之根，而成八线之表？皆因俗就易畏烦，以功名仕宦为重，敬天授时为轻，故置而不论，以至如此。康熙初年间，以历法争讼……因而诸王九卿者再三考查，举朝无有知历者。朕目睹此事，心中痛恨，凡万机余暇，即专志于天文历法二十余年，所以略知其大概，不至于混乱也。论者以古法、今法之不同，深不知历原。原出自中国，传及于极西。西人守之不失，测量不已，岁岁增修，所以得其差分之疏密，非有他术也。其名色条目，虽有不同，实无关于历原。皆系于岁修查考之密，方圆众角之推算，测量经纬之分合。则历法行之千年，何弊之有？三角者，圆方众角之尽，精微易晓，舍此他求，必至混乱，历不可成矣。唐一行、元郭守敬不过借回回历，少加润色，偶合一时而已，亦不能行久。可见出于意见，非有根基于算术也。历本于测量，终于推算，授之于民时，验之于交食，岂能逃于众目之所观乎？[②]

康熙帝之倡"西学中源"虽然可能有劝导中国学者学习欧洲数学知识之目的，但究其根源，可能还是因为这可以为他自己学习欧洲知识找一个合法且值得儒家学者称道的理由：恢复失传的古代圣贤的知识。如果说，早期康熙帝明确批评"你们汉人全然不晓算法"，同时以其所习西法自炫，是试图在科学知识方面展现"夷"人对汉人的优势的话，他的提倡"西学中源"说，则表明他对汉人士大夫和儒家学术传统的彻底妥协。

1711年，康熙帝与赵宏燮论数，称："夫算法之理，皆出自易经。即西洋算法也善，原系中国算法。彼称为阿尔朱巴尔。阿尔朱巴尔者，传自东方之谓也。"阿尔朱巴尔是代数学一词的音译。阿拉伯数学家对于代数学的发展做出过突出贡献，代数学一词源于9世纪阿拉伯数学家花拉子模的一部著

---

① 康熙帝对三角学和勾股术的比较应采自邓玉函《大测》，在《大测》序中，邓玉函称："九章算多以三测一，独句股章以二测一则皆三角形也．其不言句股者，句与股交必为直角．直角者，正方角也．遇斜角则句股穷矣．分斜角为两直角，亦句股也．遇或不可得分又穷矣．三角形之理非句股可尽，故不名句股也"．见：邓玉函．大测序．大测．西洋新法算书．卷9．四库全书本．1a.

② 康熙帝．三角形推算法论．康熙政要．卷十八．引自：章梫．康熙政要．358—359.

作的名称。相对于欧洲来说,阿拉伯是东方。很可能是为了迎合康熙帝的心理,耶稣会士将这一故事讲给他,而康熙帝将这个东方解释成了中国。不久之后,数学家梅瑴成发现当时传入的代数方法与中国传统的天元术名异实同。此后,代数学源自中国成为“西学中源”说的著名例证。

有一点值得我们特别注意,康熙帝公开宣传“西学中源”的主张是在他对“礼仪之争”有所了解之后的事情。与罗马教廷决裂之后,康熙帝深知罗马教皇谕令可能在汉人士大夫中间激起的反感情绪,他不能为了学习西学而自决于儒家传统。如果罗马教廷坚持对天主教纯洁性的要求,那么,与罗马教廷决裂并驱逐传教士将是他惟一的选择。

很可能是在阅读了王锡阐或梅文鼎的天文历法方面的著作之后,康熙帝于1714年5月15日,谕诚亲王胤祉等,古历规模甚好,但计算年代过长,数字便不准确。“今修历书,宜用古之规模,用今之数目为善。[①]”可以看出,康熙帝开始认真考虑王锡阐等融合中、西的修历方法了。

梅文鼎也是“西学中源”说的支持者。他很早便反复阐述传入的欧洲几何学知识都可由传统勾股术给出解释。在当时,他的工作并不是孤立的个案。前文已述,黄宗羲通过对中、西历法的研究,亦将欧洲数学归为勾股之术,并称其为周公商高之遗,也就是《周髀算经》的遗绪。方以智亦称欧洲天文历法知识为“圣人之所已言”。当时与梅文鼎齐名的天文学家王锡阐对中、西天文学做了更为详细和深入的比较与测验,[②] 王氏称:“今者西历所矜胜者不过数端,畴人子弟骇于创闻,学士大夫喜其瑰异,互相夸耀,以为古所未有,孰知此数端者,悉具旧法之中,而非彼所独得乎。”“大约古人立一法必有一理,详于法而不著其理,理具法中,好学深思者自能力索而得之也。西人窃取其意,岂能越其范围?就彼所命创始者,事不过如此,此其大略可睹矣。”[③] 如黄宗羲一样,王锡阐亦称:“西人窃取其意”,也就是说,西方人偷取了中国传统历算方法,但从其著作中可以看出,他似乎并未明确称西学源自中土。王锡阐所做《晓庵新法》(1662)在保存传统历法框架的前提下,容纳西方天文学技术性成果,以与西法相抗衡。可以看出,当时已有一种模糊的“西学中源”观念在一些学者间流传,而比较中、西,通过两种天文、数学方法

---

① 清史编年. 第三卷(康熙朝). 下. 419.

② 关于王锡阐的天文学工作,详见:王锡阐. 晓庵新法.

③ 王锡阐. 历策. 转引自:阮元. 畴人传. 卷35.5b—6b.

的相似部分试图以将西法构筑在中国传统基础之上的做法在当时的历、算家及学者中非常流行。

然而，在当时，梅文鼎的"西学中源"观点还不是十分明确。1689 年，他撰成的《历学疑问》，该书探讨中、西、回回历法及其天文学基础的异同。书中特别注重阐发中历和西历之相近、相似之处，倡西洋新说不自西人始的观点，同时，承认西历之长，认为它可以补中历之不足，最后肯定了清代采用西法的合理性。梅文鼎此书是应李光地之请所做的，李光地应该对康熙帝对中、西历法的态度有所了解，所以，他的态度自然会倾向于西法，而李光地即想以梅文鼎所著书邀宠于康熙帝，则承认清廷取西历的合理性应该是他所必须坚持的。作为梅文鼎的恩主，李光地究竟在多大程度上影响了梅文鼎《历学疑问》的结构及其中的观点，我们并不清楚。同时从梅文鼎的经历来看，他本人也非常希望能够得到康熙帝的赏识。① 他是否有迎合康熙帝意趣的倾向，也值得深思。《历学疑问》虽然继续坚持西法为古法所固有的观点，但与黄宗羲、王夫之、王锡阐等批评西法以申夷夏之辨，或另创新法以图取代西法的方式不同，梅文鼎之书则可以息"两家纷纭之辨"②。

1699 年，毛际可为梅文鼎作传，其中记录了梅氏自己的一段话：

> 历以敬授人时，何论中西。吾取其合天者从之而已。天不变，道亦不变。故自羲和至今数千年，不过共治一事以终古圣人未竟之绪。虽新法种种，能出尧典范围乎？若其测算之法，踵事而增，如西人八线三角及五星纬度，适足以佐古法所不及；至分宫置闰尚宜酌定；又其书非出一手，不无矛盾，瑕瑜亦不掩也。且《周髀算经》言：北极之下朝耕暮获，以春分至秋分为昼，秋分至春分为夜；《大戴礼》曾子告单居离，谓：地非正方；汉人言月食格于地影，此皆西说之权舆见于古书者矣。彼骤闻西术而骇，与尊西太过而蔑视古法，皆坐不读书耳。③

可见，通过比较研究，梅文鼎看出了中、西历法之间的相通之处，但他很可能意识到中、西历法之间的一些本质性的不同。1699 年，他明确提出不论中西的融合论，绕过中、西历算之辨和起源问题，同时对严守中、西之辨的双方

① 这从梅文鼎对李光地向康熙帝推荐他的著作的感激之情便可见一斑。

② 万斯同．送梅定九南还序．转引自：杨向奎．新编清儒学案．第一卷．218．

③ 毛际可．梅先生传．勿庵历算书目．知不足斋丛书本．

都提出了批评。然而,他却始终对欧洲天文、数学知识何以会与中国传统知识的相通感到疑惑。1692 年,梅氏"赠吴胥巇"之二中有云:

古法改逾精,小异归大同。学人守师说,中西各长雄。谁知欧罗言,乃与《周髀》同。结发受经史,此事疑在胸。往者不可作,欲问将焉从。积久思虑专,径转千山穷。欣欣云雾开,昭昭发我蒙,独见期共时,其人亦罕逢。①

也就是说,直至 1692 年,梅文鼎对欧洲几何学何以会和《周髀算经》中的方法相通仍未形成明确的观点。1705 年,梅氏蒙康熙帝召见,1706 年,梅氏作诗云:

圣神天纵绍唐虞,观天几暇明星烂。论成三角典谟垂,今古中西皆一贯(御制《三角形论》言西学实源中法,大哉王言,著撰家皆所未及)。枯朽余生何所知,聊从月令辨昏旦。幸邀顾问遵明训,疑义胸中兹释半。②

梅氏明确说明,康熙帝在召见他时谈到"西学中源"的观点,令梅文鼎胸中疑义释半。由此,康熙帝在梅文鼎"西学中源"观形成过程中确实有着启发性影响。然而,梅文鼎是一个具有求真求证精神的学者,与李光地以邀宠为目的的数学及天文学研究不同,③ 他不会不加检验地完全接受康熙帝的观点,如上引诗所称,康熙帝只能令他的"疑义"释半,另一半的疑义则要靠梅氏自己来解答了。在此之后,梅文鼎著《历学疑问补》两卷。该书卷一中,梅文鼎分别"论西历源流本出中土即周髀之学"、"论盖天与浑天同异"、"论中土历法得传入西国之由"、"论周髀中即有地圆之理"、"论浑盖通宪即古盖天遗法"、"论浑盖之器与周髀同异"、"论简平仪亦盖天器而八线割圆亦古所有"、"论周髀所传之说必在唐虞以前"、"论地实圆体而有背面"、"论盖天之学流传西土不止欧罗巴"、"论远国所用正朔不同之故",全面阐述和证明西

① 梅文鼎.赠吴胥巇.绩学堂诗钞.卷 3.乾隆间梅瑴成校刊本.20b—21a.

② 梅文鼎.雨坐山窗,得程偕柳书,寄到吴东岩诗箑,依韵合之.绩学堂诗钞.卷 4.20b—21b.

③ 李光地曾称:"上深于历算,多是捷法,古法原不考求。当是看古法多迂阔可笑。如以律以策起算,果然不是根本之论。"(见:李光地.榕村续语录.814)李光地自己在天文和数学方面的工作也都是对西法的研究,这应该是为了与康熙帝的兴趣保持一致。虽然他曾向梅文鼎学习数学,并帮助梅文鼎出版著作,但他似乎并不赞成梅氏关于中、西数学异同及"几何即勾股论"等观点,而认为古法迂阔可笑,不是根本之论。

学源于中土说。[1] 在《论中土历法得传入西国之由》中，梅文鼎引经据典地描述了中国历法传入西方的途径：

> 幽历之时，畴人子弟分散，或在诸夏，或在夸翟。盖避乱逃咎，不掸远涉殊方，固有挟其书器而长征者矣……然远国之能言历数者多在西域，则亦有故。《尧典》言，“乃命羲和，钦若昊天，历象日月星辰，敬授人时”，此天子日官在都城者，盖其伯也。又命其仲叔分宅四方，以测二分二至之日景，即测里差之法也。羲仲宅嵎夷，曰旸谷，即今登莱海隅之地；羲叔宅南交，则交趾国也。此东、南二处皆滨大海，故以为限。又和叔宅朔方，曰幽都，今口外朔方地也，地极冷，冬至于此测日短之景，不可更北，故即以此为限。独和仲宅西，曰昧谷，但言西而不限以地者，其地既无大海之阻，又自东而西，气候略同内地，无极北严凝之畏。当是时，唐虞之声教四讫，和仲即奉帝命测验，可以西则更西，远人慕德景从，或有得其一言之指授，一事之留传，亦即有以开其知觉之路。而彼中颖出之人，从而拟议之，以成其变化。固宜有之。[2]

梅文鼎在其他各篇中反复论述西方的天文理论与《周髀算经》中论述的相同之处，并论证《周髀算经》中的理论在唐虞以前已经存在，以此从理论和时间上证明《周髀算经》中算法传入西方的可能性。综合他在几何学方面所论证的“几何即勾股”说，他为“西学中源”说提供了理论根据。

虽然同倡“西算中源”，但康熙帝和梅文鼎的内在的想法很可能是不同的。对于康熙帝来说，通过“西算中源”说，他便赋予了来自西方的科学知识以合法的地位，使之成为中国学术的一个组成部分。同时，这也为他自己学习欧洲数学科学知识提供了一个借口，因为归根到底，他是在学习中国古代的知识，通过他的传授和推动，中国古代学术内容得到了复兴。与此同时，

---

① 《历学疑问》卷一中有如下篇目：《论历学古疏今密》、《论中、西二法之同》、《论中、西之异》、《论今法于西历不去取之故》、《论回回历与西洋同异》、《论回回历元用截法与授时同》、《论西历亦古疏今密》，通过这些篇目的名称我们即可以看出，当时梅文鼎是将中、西历法均视为有各自历史传承及发展过程的两种方法。书中虽然提到《周髀算经》中的盖天说，但亦没有明确地给出《周髀》即西法之本源的观点。（见：梅文鼎．历学疑问．历算全书．四库全书本．卷一）比较《历学疑问》和《历学疑问补》的各篇内容，我们可以清晰地看到梅文鼎在两部书中关于中、西天文学起源的看法是完全不同的。

② 梅文鼎．论中土历法得传入西国之由．历学疑问补．卷一．5a—b．

综合“算法愈出愈密”,则西学虽源于中学,但由于它出自古代“中学”之后,则它便较中国数学更为优越。于是,欲学习数学知识的中国人大可不必回头去读古代的数学著作,只要学习经欧洲人进一步发明的更为优越的西方数学就可以了。所以,虽然有“西算中源”之倡,但康熙帝自己并没有对传统数学做过深入研究,也未曾试图聘一位中国数学家为他讲授中国数学知识。

梅文鼎倡“西学中源”亦有提倡西学的意图。梅文鼎对中、西数学家的轸域之见一直持批评态度。他称:“畴人守师说,蔑肯窥西书;欧罗矜别传,宁能徵昔儒,二者不相通。樊然生龃龉,大哉圣人言,流传自古初(伏读圣制《三角数形论,谓古人历法流传西土,彼土之人习而加精焉尔。大语煌煌,可息诸家聚讼》)。[①]”在《历学疑问补》中,他又称:清代以西法为基础的《时宪历》,“集其大成,兼采西术。而斟酌尽善,昭示来兹。为万世不刊之典。顾经生家或犹有中、西异同之见,何以徵信而使之勿疑,曰历以稽天,有昼夜永短,表景中星可考,有日月薄蚀,五星留逆伏见凌犯可验,乃实测有凭之事。既有合于天,即当采用。又何择乎中、西。”[②]表现出梅文鼎追求客观实证的思想。

二、《数理精蕴》的编撰及其内容和影响

与罗马教廷决裂后的康熙帝不仅大力宣传“西学中源”说以倡导数学研究,以为自己学习欧洲数学找到合理的借口,同时,他决定逐步摆脱西方传教士。“多年的经验使皇帝(康熙帝)确信,中国人主要或惟一对欧洲人的依赖是,如果没有欧洲人的帮助和指导,他们就无法正确地在天文学方面进行管理及准确无误地预告日食和月食”。[③]要摆脱西方人,首先要做的就是摆脱在天文学方面对西方人的依赖。所以,康熙帝要将他所学到的数学知识亲自传授给一批满汉官员,并编辑一套天文、数学书籍总结当时传入的天文、数学知识。这一方面可以培养出一批精通西方科学知识的中国人,另一方面,也可以向士大夫们表明,他学习西方科学技术知识的目的是为了使西

---

① 梅文鼎. 上孝感相国. 绩学堂诗钞. 卷4. 23b.

② 梅文鼎. 论西历源流本出中土即周髀之学. 历学疑问补. 卷一. 5a—b.

③ 佛朗西斯·罗德里杰斯. 葡萄牙耶稣会天文学家在中国(1583—1850). 104. 转引自:韩琦. “自立”精神与历算活动——康熙之际文人对西学态度之改变及其背景.

方的科学知识在中国得到永久流传。[①]陈厚耀(1648—1722)是较早受康熙帝数学指导的学者之一。陈厚耀,1706年中进士,由李光地以通晓历法推荐给康熙帝。1708年,他应召入京。次年,他随康熙帝至热河,途中,康熙帝试以笔算及其他历算内容。陈厚耀不久至苏州任教职,但不到一年即被召至南书房,后又至渊鉴斋。康熙帝亲自传授陈厚耀数学知识。[②]陈厚耀一生著有多部历算书,其《算义探奥》主要讲述几何及传统历法制订方面的内容。其中《错综法义》讨论排列组合问题[③]。李培业先生称,他藏有《陈厚耀算书》一套,包括《勾股图解》二册,《算法原本》一册,《直线体》一册,《堆垛》一册,《借根方比例》一册[④]。陈厚耀曾向康熙帝提议“定步算诸书以惠天下”,康熙帝首肯此事。这是编撰《数理精蕴》的一个起因。

1713年,康熙帝于畅春园之蒙养斋设立算学馆。据《钦定大清会典》记录:

> 康熙五十二年(1713)设算学馆于畅春园之蒙养斋。简大臣官员精于数学者司其事,特命皇子亲王董之,选八旗世家子弟学习算法。又简满汉大臣、翰林官纂修《数理精蕴》及《律吕正义》诸书,至雍正元年(1723)告成,御制序文镌版颁行。[⑤]

法国传教士傅圣泽语带讥讽地为我们描述了这个算学馆的情况:

> 一个学校性质的机构被建立了。一些获选的听众将每天来到(皇帝)面前,他会向他们讲解某个欧几里得的命题。(康熙帝)享受着精通抽象科学的快感以及他的新学生们不失时机地给予他的赞扬的愉悦,虽然这些学生通常是听不懂(其讲授的内容的)。但是这个学校没能延续下去,它只是皇帝建立的一种学院的初级阶段。他从北京或其它省的汉人和八旗人中选取所有精于数学科学的不同分支的人。那些总督和高官们为了讨好他,给他引荐了一些智力超群及最适于科学学习的学者。为了建立我们正在谈论的这个书院,这些学者,主要是年轻人,从各处被带到皇帝的面前。

---

① 关于康熙帝及清代学者对数学方面事务的自立的追求,参见:韩琦.“自立”精神与历算活动——康乾之际文人对西学态度之改变及其背景.

② 阮元.陈厚耀.畴人传.卷41.1a—6a.

③ 韩琦.错综法义提要.

④ 详见:李培业.《陈厚耀算书》研究.

⑤ 钦定大清会典.1899.1102:10b—11a.

他从中选择了一百多人:他们是从所有的饱学的官员、计算家、几何学家、乐师、天文学家及大量的仪器制作者等中筛选出来的。为了这一群人,他建造了一个有很多建筑物的地域广大的场所,畅春园。并且指定他的第三个儿子作为这个新学院的领导。①

畅春园的算学馆由康熙帝亲自任教,并由其皇子掌管,从傅圣泽的叙述来看,宫廷内的耶稣会士并未参与畅春园的教学工作。詹嘉玲分析,这暗示了康熙帝西学传播政策的转变,换一种说法,他要结束其在科学事务方面对耶稣会士的依赖。从这个角度,我们也可以解释为什么耶稣会士没有被指派去参加《律历渊源》的编撰②。我们并不了解傅圣泽所说的这一百多人的具体情况。1713年,康熙帝谕其三子胤祉曰:"律吕算法诸书,应行修辑。今将朕所制律吕算法之书发下,尔率庶吉士、何国宗等,于宫内立馆修辑。③"所以,从一开始,康熙帝设畅春园算学馆的目的就是为了编辑天文、音律和数学书籍。同时,受康熙帝指点的皇三子胤祉很可能更为注重中国传统历法的研究,法国传教士傅圣泽曾称胤祉为欧洲天文学的敌人。这表明传教士们当时并不清楚康熙帝已改变了对欧洲天文学和数学传播的态度和策略。

畅春园算学馆所编辑的书籍为《律历渊源》,该书可说是一部百科全书式的大型著作,包括《历象考成》42卷,《数理精蕴》53卷和《律吕正义》5卷。《律吕正义》前两卷探讨声学与和声学,三、四卷描述中国传统乐器,第五卷介绍相关西方知识。《历象考成》分为三个部分。第一部分(前16卷)探讨历法基础的天文学概念。第一卷为总的导言;卷二、卷三为球面三角学;卷四、卷五分别讨论太阳和月亮的运行;后面的三卷讨论日、月食;卷九到卷十五探讨五星运动;卷十六探讨恒星的位置。第二部分(10卷)介绍制表用到的天文常数,并以太阳、月亮、五星及恒星为例解释了这些常数的物理意义。第三部分(16卷)为恒星和行星的位置表;最后的两卷给出黄道和赤道坐标之间的变换关系。《历象考成》与《崇祯历书》依据同样的理论基础,但《历象考成》中用于计算常数的数据依1714年畅春园观测结果做了修改。在技术

① Jean – François Foucquet. *Relation exacte de ce quis' est passé à Péking par raport à l' astronomie européane depuis le mois de juin* 1711 *jusqu' au commence ment de décembre* 1716, 转引自:詹嘉玲. 清代初期和中期的数学教育.

② 詹嘉玲. 清代初期和中期的数学教育.

③ 康熙帝. 圣谕. 康熙政要. 357.

方面，两部著作之间也存在一些不同，这是传教士南怀仁的著作造成的。《历象考成》对西方科学持更强烈的批评态度。书中采用的坐标系是与中国传统一致的赤道坐标，这与耶稣会士著作中采用黄道坐标系统的做法不同。[①]1742年，在耶稣会士戴进贤（Ignatius Koegler）的监督下，《历象考成》被修订为《历象考成后编》。该书虽然还是以地心说为基础的，但书中介绍了开普勒的椭圆轨道。[②]

《数理精蕴》53卷，上编五卷《立纲明体》，卷一为《数理本原》两部分，一为《河图》、《洛书》，一为《周髀经解》。在理学家的象数学中，《河图》、《洛书》被说成是数学的本源。[③]《周髀经解》开篇称：

> 数学之失传久矣，汉晋以来，所存几如一线，其后祖冲之、郭守敬辈，殚心象数，立密率消长之法以为习算入门之规。然其法以有尽度无尽，止言天行，未及地体，是以测之有变更，度之多盈缩，盖有未尽之余蕴也。万历间，西洋人始入中土，其中一二习算数者，如利玛窦、穆尼阁等，著为《几何原本》、《同文算指》诸书，大体虽具，实未阐明理数之精微。及我朝定鼎以来，远人慕化，至者渐多，有汤若望、南怀仁、安多、闵明我，相继治理历法，间明算学，而度数之理，渐加详备。[④] 然询其所自，皆云本中土所流传。粤稽古圣，尧之钦明，舜之濬哲，历象授时，闰余定岁，璿玑玉衡以齐七政，推

---

① 在当时的欧洲，黄道坐标正逐步被赤道坐标所取代。见：Needham. *Science and Civilisation in China*, Vol. 3. 438.《崇祯历书》成书后耶稣会士撰写的著作也被收入《历象考成》。关于这部著作更详细的分析，参见：桥本敬造.《历象考成》の成立（《历象考成》的形成）.

② 参见：Sivin. Copernicus in China. 90—91. 关于戴进贤（1680—1746），见：Louis Pfister, *Notices biographiques sur les jésuites de l'ancienne mission de Chine* 1552—1773（前代在中国传教的耶稣会士之传记 1552—1773）. 643—651. 关于开普勒天体理论在中国的传播，参见：薄树仁. 清代对开普勒方程的研究.

③ 法国传教士白晋曾深入研究《河图》、《洛书》，并将他的研究结果寄给莱布尼茨，莱布尼茨当时刚刚完成了他关于二进制的文章，文章被寄到法国科学院，但以无意义为由被拒。收到白晋的信后，莱布尼茨在被退的文稿后加上二进制与中国《易经》的关系一段，以示其文章的意义，并再投至法国科学院，不久后，该文被发表了。作为一个数学家，莱布尼茨相信古代的八卦符号肯定有数学含义，莱布尼茨给白晋回信，指出《易经》与他的二进制之间的关系。白晋很可能将这一通信内容呈报康熙帝，这也许是康熙帝认同《河图》、《洛书》为数学本原的一个原因。

④ 值得注意的是，此处没有提到当时正在皇宫的法国传教士。他们的译著对《数理精蕴》的成书起到了关键作用，如《几何原本》即是根据张诚、白晋的进讲文稿编成的。这似乎可以证明，传教士们并没有参与《数理精蕴》的编撰。

> 步之学,孰大于是。至于三代盛时,声教四讫,重译向风,则书籍流传于海外者,殆不一矣。周末,畴人子弟,失官分散,嗣经秦火,中原之典章,既多缺佚,而海外之支流,反得真传,此西学之所以有本也。古算书存者独有《周髀》,周公商高问答,其本文也。荣方陈子以下所推衍也。①

通过这段文字,我们可以了解《数理精蕴》的编撰者何以要将《周髀算经》中的部分内容置于篇首的原因。文中以“西学中源”说来说明“西学”“有本”,这样,便为欧洲的天文数学知识找到了一个正统的根源,使之可以合法地融入中国学术之中。由于推测欧洲天文数学是在秦代传到欧洲的,而当时留下来的秦以前的数学著作只有《周髀算经》中周公与商高的一段问答,将这段文字编在卷首正是为了昭示它是中、西两种数学的共同来源。这也正是“数理本原”的含义。

上编卷二至卷四为《几何原本》,卷五为《算法原本》,按照欧洲数学分类,将数学分为几何② 和算法两类。《数理精蕴》中的《几何原本》,共 3 卷 12 个部分,是根据清宫中所存的满文、汉文本《几何原本》稍事修改而成的。③这两本《几何原本》均非欧几里得的《几何原本》,而是根据法国数学家巴蒂斯(Igance Gaston Pardies, 1636—1673)的 *Elémens de Géométrie*(1671)翻译、增删而成的④,主要内容取自巴蒂斯著作的卷一至卷六及卷九,但《数理精蕴》并不包含原书中巴蒂斯论述其自创的不可度量及对数原理的第七、八卷,此外,《数理精蕴》中增加了大量的图解内容。⑤

《数理精蕴》中的《算法原本》是根据稿本《算法原本》删节而成的。原稿本《算法原本》很可能是张诚向康熙帝进讲时编译的教材。《数理精蕴·算法原本》由两部分构成,第一部分利用几何图式的方法讲解整数的性质及四则运算、乘方运算等,第二部分以同样的方法讲解比例运算、有限级数求和等内容。

综上所述,《数理精蕴》上编“立纲明体”,由《河图》、《洛书》及《周髀算

① 周髀经解. 数理精蕴. 上编. 卷一. 10a—11b.

② 此处的“几何”的含义已是 geometry,也就是几何学,不是利玛窦和徐光启译《几何原本》时的“多少”,或“数学”的含义.

③ 李兆华. 关于《数理精蕴》的若干问题.

④ 刘钝.《数理精蕴》中《几何原本》的底本问题.

⑤ 韩琦. 数理精蕴提要. 3—4.

经》的部分经文,编撰者将它们视作中、西数学的共同起源。其后,则是按耶稣会士传授的按欧洲数学分类法的几何、算术两类内容的基础知识:《几何原本》和《算法原本》,这暗示了编撰者意中的数学的"体"是建筑在欧洲数学分类法之上的。[①]

《数理精蕴》下编 48 卷"分条致用",分为首部、线部、面部、体部和末部。

首部首列度、量、衡单位及换算法,其后为欧洲笔算定位及四则运算方法,分数及其计算方法和各类比例算法。

线部讲解线性运算,卷二至卷七详细讨论各种比例的运算方法,其中不仅包括现代数学意义下的比例计算法,还包括等比数列和等差数列的求和方法。书中指出:

> 尽人皆知,线有线之比例,面有面之比例,体有体之比例,殊不知差分、盈朒、方程、借衰、叠借之类,皆比例之属也。[②]

也就是说,《数理精蕴》将传统数学的差分、盈不足、方程、借衰、叠借等均隶于比例算法[③]。该书下编卷八至卷十分别讨论盈不足、借衰及方程术。《数理精蕴》虽然将方程术统归入西法的比例算法,但其方程术的总体论述、方程分类法及解方程法均与梅文鼎《方程论》中方法一致。

《数理精蕴》下编卷十一至卷二十二为面部,主要讨论与平面图形相关的问题。卷十一为开平方和开带纵平方(二次方程的数值解法),卷十二、十三为勾股问题,卷十四讲解三角形。卷十四中称:"凡三角形……不拘锐角钝角,自一角至底边作垂线,即分为两直角,是仍不离乎勾股也。[④]"可见,在《数理精蕴》中,勾股形,也即直角三角形,并不仅仅是一类特殊的三角形,而是被认为是解决三角形问题的基础。由此可见,到 1723 年,康熙帝已转变了其在 1704 年《三角形推算法》中所持的"勾股之所不能推,虽分作直形,凑合偶成,亦非数家之堂奥"的观点,接受了梅文鼎所坚持的"几何即勾股"说。卷十二、十三中不仅有传统勾股术中的勾、股、弦及其和、差相求问题、勾股容方容圆问题,还包括"定勾股无零数"一节,为整数勾股形问题。此类问题

---

① 梅文鼎的数学分类法与此是一致的,但从《数理精蕴》将这两部分分别称为《几何原本》和《算法原本》,而非梅文鼎的"数"与"度",可以看出耶稣会士传授的知识对《数理精蕴》的体例有更大的影响。

② 比例. 数理精蕴. 下编. 卷三. 2b—3a.

③ 传统盈不足术、衰分术的方法确实可以归结为四项比例算法。

④ 三角形. 数理精蕴. 下编. 卷十四. 1a.

引起了中算家的注意,到清代末年成为一个活跃的数学问题。

下编卷十五讲割圆①,卷十六利用割圆术讲解传入的三角函数及三角函数公式。卷十七为“三角形边线角度相求”,包括直角三角形解法和一般三角形的解法,卷十八利用卷十七中得出的公式讲述测量问题。卷十九处理直线形的面积问题,卷二十主要讲解圆、弓形和椭圆面积。卷二十一、卷二十二讲各正多边形的面积求法及正多边形与其外切圆径、内容圆径的关系。

下编卷二十三至卷三十为“体部”,主要解决立体问题。卷二十三至二十四讲述开立方及开带纵立方(求三次方程数值解)问题,卷二十五讲柱体、棱锥体、棱台体的体积。卷二十六讲圆柱、圆锥、球、截球体、椭圆体的体积。卷二十七、二十八、二十九讲解各种等面体的体积与各种等面体的边长和外接球径、内切球径的关系。卷三十讲各种物质的比重,实物的重量及几个堆垛问题。②

下编卷三十一至卷三十六为《借根方比例》,介绍欧洲代数方法。③ 下编卷三十七为杂题。卷三十八为对数比例,开篇简要介绍了对数及其性质,此后,介绍“对数之原”,即“真数”与“假数”(对数)的关系,并利用比例性质探讨对数的原理。该卷最为重要的是给出了求常用对数的三种方法。在此之前,穆尼阁曾把对数引入中国,但只介绍了对数表及利用对数简化运算的方法,并未引入造对数表的方法。《数理精蕴》中介绍的计算对数的方法为英国数学家巴里吉(H. Briggs)所创的方法,其直接底本很可能是弗拉格(Vlacq)的对数著作。该法虽然计算量很大,但是此后中国数学家研究对数的基础。④

《数理精蕴》下编的最后两卷讲解比例规,主要内容采自《崇祯历书》中罗雅谷的《比例规解》一书。卷四十最后详细介绍了画日晷法及假数尺,即西洋计算尺,是为计算尺传入中国的最早记载。

总之,《数理精蕴》是对当时所理解的中国传统数学内容及传入的欧洲

---

① 中国传统数学中的割圆术即利用内切、外接正多边形逼近圆周,以期利用正多边形的性质求解圆的面积、周长及圆周率等相关问题。关于中国传统割圆术,见:郭书春. 中国古代数学. 163—177. 关于割圆术及三角函数在明、清时期的发展,详见本书第6章。

② 关于堆垛问题,详见本书第七章。

③ 关于借根方比例,详见本书第五章。

④ 《数理精蕴》中介绍的是巴里吉发明的屡次开方法。当时欧洲已有较为简便的对数级数展开式方法,但并未被传入。19世纪,一些中国数学家独立地发现了利用幂级数展开式求对数的方法。参见:韩琦.《数理精蕴》对数造表法与戴煦的二项展开式研究.

数学知识的总结。虽然以"西学中源"作为纲纪,并收入了一些传统数学内容及梅文鼎的部分工作,但其整体内容基本是按欧洲数学分类法编排的,并以欧洲数学方法重新阐述部分传统数学内容。该书的体例为:先给出算法和几何学的一般性描述,即"明体",然后再对具体内容进行详细论述,即"分条致用"。全书内容由浅入深,以线性问题、二次问题和高次问题为脉络,以比例算法为联系,构成了一个知识整体。一个值得注意的倾向是,《数理精蕴》利用图解等方式对书中的内容进行阐释和证明,书中收入的知识都是在某种程度上被验证是正确的。明末传入的天文、数学著作中的一些不确定的内容并没有被《数理精蕴》收入。①

挟敕编之名的《数理精蕴》在清代流传很广,成为当时数学教育和学习的主要教材和参考书。1818 年,国子监算学馆的数学学习定为"线、面、体三部,每部各限一年通晓",教学安排与《数理精蕴》的体例一致,其教育很有可能就是以《数理精蕴》为教材的。②18 世纪末重要数学家汪莱称,当时学习数学中十人有八人是从西方数学为入门的。他们很有可能是以《数理精蕴》为教材学习西方数学的。③

17、18 世纪之后,数学科学在中国得到复兴。这可以说是多方面因素促成的。从明末以来,当时对实学的普遍关注及历法改革的迫切需要使得传教士引入的欧洲数学科学知识得到了一些儒家学者的重视。自清代初年,对明代灭亡的反思及"夷夏之辨"使得一些明代遗民提倡经世之学,并转向经典研究,同时,受"异族"政权以"西"法颁布历书的刺激,他们转向中、西数学之辨。虽然他们只读到很少的中国传统数学文献,但他们的研究方向及治学方法都对后世学者起到了启发作用,并被乾嘉学者继承下来。康熙帝对数学科学的倡导无疑对 18 世纪以后数学成为中国的一个重要学术分支起到了很大的促进作用,康熙帝晚年与梅文鼎共同倡导的"西学中源",调合中、西数学的方法成为后世学者研究数学的主流方法。康熙帝对欧洲数学在中国的传播及中国数学的研究所做的贡献不仅在于他对数学本身的研究。在康熙帝以前,除利玛窦和徐光启、李之藻分别合作完成的《几何原本》与《同文算旨》之外,其他著作都围绕着改革历法及有利于当时社会实际的

① 参见:詹嘉玲. 清代初期和中期的数学教育.

② 参见:詹嘉玲. 清代初期和中期的数学教育.

③ 韩琦. 康熙时代传入的西方数学及其对中国数学的影响.

机械学、火炮制造和演放技术等相关知识,所以,当时传入的纯数学内容并不多,而传入的内容又多是与历法制订或力学相关的零星知识,不能自成系统。康熙帝本人对数学有着浓厚的兴趣,应他的要求,当时在宫廷的安多及来华法国传教士系统地向他介绍欧洲的几何学、算法及代数学,引入了部分欧洲的最新研究成果。[①] 根据他们讲授的内容,康熙帝及《律历渊源》的编撰者将这些欧洲数学知识系统整理编撰成《数理精蕴》,使得欧洲纯粹数学知识得以被介绍到中国来。可以说,《数理精蕴》的编撰是中国数学西化历程上的一个里程碑。

不仅如此,在《数理精蕴》之前介绍西方天文数学知识的《崇祯历书》印行很少,学者很难得见,《数理精蕴》在当时流传很广,欲学习数学知识的学者可以容易地得到该书,这促进了数学知识,尤其是西方数学知识的普及与研究。此外,《数理精蕴》编成之时,中国已全面禁海禁教,西方知识已无缘进入中国内陆。《数理精蕴》成为19世纪末西方数学知识第二次输入之前中国人学习西方数学知识的最权威的资料。

对《数理精蕴》编撰贡献最大的有梅瑴成、何国宗和明安图。

梅瑴成(1681—1763)为梅文鼎之孙。他早年曾随梅文鼎学习数学。1715年成进士。康熙帝因陈厚耀的推荐将其召入宫中,与陈共同研究,并在蒙养斋学习了新传入的西方数学知识。[②]何国宗出身于天文世家,因掌握数学知识受到康熙帝的赏识,被钦赐进士,入翰林院。他参与《数理精蕴》、《历象考成》、《历象考成后编》及《钦定仪象考成》等书的修订及大地测量工作。[③]明安图为蒙古族天文学家和数学家。《律历渊源》被编成之后,陈厚耀

---

① 《数理精蕴》中的知识偏重于与计算方法相关的内容。在中国历史上,数学以其对社会生活的实用价值而得到社会及儒家传统的认可,《数理精蕴》偏重于计算方法的介绍很可能是基于中国传统的价值取向。但不容忽视的是,在18世纪的欧洲,对于数学计算方法的偏重也成为一种风尚,古希腊的演绎和证明体系被很多数学家所抛弃,他们认为以欧几里得为代表的古希腊几何学传统并不是发现数学成果的方法,有些人甚至指责古希腊数学家试图以其演绎方法掩盖他们找到新知识的真正方法以成就自己的名望。传教士并没有把当时欧洲最先进的数学知识介绍到中国来。举例来说,牛顿和莱布尼茨的微积分学并没有被引入,而传入的代数学——借根方算法,也是在欧洲已经落后的方法。当然,我们不能片面指责耶稣会士只向中国介绍过时的知识。傅圣泽曾向康熙帝介绍过符号代数学,但康熙帝并没有意识到这一方法的优越性(详见第五章)。

② 阮元. 梅文鼎. 畴人传. 卷39. 1a—b.

③ 阮元. 何国宗. 畴人传. 卷41. 13b—19a.

(1648—1722)、梅瑴成、何国宗、明安图等人被授予大小不等之官职,他们也继续从事数学方面的研究。梅瑴成撰成《增删算法统宗》十一卷,《赤水遗珍》一卷,《操缦卮言》一卷。梅瑴成对后世数学影响最大的是他通过学习欧洲代数方法重新理解了中国传统天元术。以此为基础,中国传统代数方面的出色成果在18世纪末至19世纪初得到了全面复兴。① 梅瑴成在《赤水遗珍》中也提到了法国传教士杜德美介绍的三个幂级数展开式,并以其法计算了直径为20亿的圆周长及几个三角函数的值。但并没有做进一步的研究。明安图对这三个幂级数展开式进行了深入的研究,完成《割圜密率捷法》,书中不仅给出了这三个公式的证明,并扩充了6个公式,成为杜氏九术。三角函数幂级数展开式的研究成为18世纪之后的一个活跃课题。②

康熙年间还有一些较为活跃的数学家。年希尧便是其中较为出色的一位。年希尧(?—1739),字允恭。他可以经常出入宫廷,并与传教士有很多来往。年氏有多种数学著作,如《测算刀圭》、《三角法摘要》、《八线真数表》、《八线假数表》、《面体比例便览》、《对数表》、《对数广运》等③。

年希尧最重要的数学著作是《视学》,该书主要以图示方法讲解西方透视原理及绘图法,为中国研究这类问题的第一部专著。年希尧曾随意大利耶稣会士郎士宁(J. Castiglion, 1688—1766)学习欧洲绘图法。据考证,《视学》中的前一部分采自意大利耶稣会士画家 A. Pozzo(1642—1709)所著的《绘画与建筑透视》(*Perspectiva pictoram et Architectorum*)。此书虽经刊刻,但流传绝少,并没有引起后世数学家们的重视,此后的中算家几乎没有人关注西方透视学原理的研究④。

清代早期也有一些为了应用而学习数学的。庄亨阳便是其中一例。庄亨阳,字元仲,南靖人。1718年中进士。官至淮徐道。他研究数学主要是因其被任命负责河防,所以“于高深测量之宜随事推究,设问答以穷其变。因笔之于书”。⑤ 在他去世之后,其后人将他的残稿搜集成《庄氏算学》八卷。该书主要节录和整理梅文鼎的著作及《几何原本》等其他数学著作中的方法

---

① 详见本书第五章。

② 详见本书第六章。

③ 阮元. 年希尧. 畴人传. 卷40. 12a.

④ 参见:沈康身. 从《视学》看十八世纪东西方透视学知识的交融和影响.

⑤ 四库馆臣,《庄氏算学提要》,《庄氏算学》,《四库全书》本,页1a—b.

和内容。[1]

无锡人杨作枚撰《解割圆之根》一卷及《勾股正义》一卷，阐述三角函数表的造表方法；海宁人陈世仁撰《少广补遗》一卷；发明垛积术之术[2]；屠文漪撰《九章录要》十二卷，试图从当时所存关于《九章算术》的书籍恢复《九章算术》中的方法；桐城人余熙著《八线测表图说》一卷，讲述勾股术及三角学等等。[3]但他们多是继续梅文鼎等的研究方法，在当时传入的欧洲天文、数学及一些尚有流传的中国传统数学内容的基础上做进一步的阐释，很少发明新的数学内容。

清代初年，确实有更多新的数学知识被系统地引入中国，但出于各自的动机，18世纪之前，耶稣会士和康熙帝均不积极于普及这些知识。这些知识主要在宫廷内部传播。民间学者很难得到新的西方数学知识，同时，在重新发现传统数学著作方面亦无太多进展。所以，当时中国数学家研究的基础与明末学者基本相同。与明末学者不同的是，他们以怀疑的态度对传入的数学著作进行了更深入的分析和研究，并与他们可以得到的传统著作进行了认真的比较和会通。

与罗马教廷决裂之后，原已在民间颇具雏形的“西学中源”说得到康熙帝的支持，从此，西方数学知识开始被融入中国学术体系之中。同时，康熙帝开始更注意培养中国学者在天文、数学方面的独立性，并将他掌握的数学知识传授给一批学者。以此为基础，综合传统数学知识，由梅瑴成、何国宗等编成《数理精蕴》。由于耶稣会士没有参与《数理精蕴》的编辑，《数理精蕴》中的西方数学内容主要是康熙帝理解且感兴趣的知识。禁教之后，绝大部分传教士被驱逐出中国内陆，新的西方知识基本无缘再进入中国，学者们只能以《数理精蕴》及早期传入的西方知识为基础学习和研究西方数学。

---

① 庄亨阳，《庄氏算学》，《四库全书》本.

② 详见本书第七章。

③ 阮元. 畴人传. 卷40至卷41.

第三章　清代中叶的复古与西化之交融

本书前文已经提到，康熙帝在18世纪初开始因礼仪问题而疏远欧洲传教士，至20年代与罗马教廷彻底决裂，从此传教士被禁止在内地传教。相继执政的雍正帝、乾隆帝也坚决禁教。此后直至鸦片战争后被迫开埠之时，除仍有少数传教士为钦天监和宫廷工作外，欧洲人一般不能再进入中国内陆。与此相应，在1860年以前，基本上没有新的欧洲数学知识被传入内地。18世纪之后，考据学风盛行。清朝中期，通过编撰《四库全书》及乾嘉学派学者的多方搜寻和校订，一些古典数学著作被重新发现和研究，成就了中国传统数学最后的辉煌。数学史上通常把18世纪中叶至19世纪中叶的百余年时间视为中国传统数学复兴的时期，但在此阶段，中国数学的西化并没有完全停止。

第一节　乾嘉学派对数学的态度

18世纪中叶至19世纪初的大部分数学家都是乾嘉学派的学者，所以，要了解这一时期的数学研究状况，我们不得不先对乾嘉学派做一简单介绍。乾嘉学派学者又被称为汉学家、朴学家或经学家。从这些称呼我们就可以约略看出该学派的主要特点：活跃于清乾隆、嘉庆两朝（1736—1820），主要以考据的方法从事经学研究。

从历史渊源上说，明代经学家杨慎（1488—1559）、焦竑（1540—1620）、陈第（1541—1617）已肇考据学之端。[①]但乾嘉学派的直接先驱则是明末清初诸

① 杨慎曾提出"《六经》作于孔门，汉世去孔子未远，传之人虽劣，其说宜得其真"。（见：杨慎．升庵外集．卷四十六）这也正是乾嘉学派学者们提倡汉学的基础。关于明末经学研究，参见：葛荣晋．中国实学思想史．

遗民，对他们影响最大者为顾炎武和黄宗羲。上文我们已经提到，清初遗民的考据研究以恢复儒家经典及纯洁儒家传统为目的。他们并没有将自己置于理学或心学的对立面。顾炎武自视为理学家，而黄宗羲并不讳言自己的心学渊源。顾炎武称“经学即理学”。同时，他每论一事必广求证据，且不以孤证自足。这种无徵不信的治学态度后来成为清代汉学派学者的金科玉律。所以，顾炎武被视为汉学派的先驱。①黄宗羲则开乾嘉学派的另一研究趋向。黄氏为心学派的嫡传，却对心学进行了修正。完成了《群经辨疑》这样的考证著作。他对乾嘉学派的影响主要来自于他的史学研究。身经明、清交替并以遗民自居的黄宗羲试图通过历史研究探讨明代灭亡的原因，开浙东学派治史之先声。

到乾嘉时期，有些经学家转而一心专注于章句训诂，他们研究的政治性和思想性均趋淡漠。造成这样一种局面的原因是多方面的。其中很重要的一条即是乾嘉学者们所处的时代环境已与清初诸遗民的环境迥然不同。清初诸遗老生活于动荡的环境之中，他们身经明王朝灭亡的过程，目睹过亲、友遇难的惨状并不同程度地参与了反清的活动。他们对明亡的反思必然是异常深切的，他们对史学的探讨和经学的研究均以恢复儒家传统及“经世致用”为目的，由此衍生出具有深刻思想性的突出成就。根深蒂固的切肤之痛使他们很难在研究中迷失方向或忘却目标。乾嘉时期则不然，处于清王朝的鼎盛时期，可谓社会安定，经济繁荣。历经三朝近百年的清统治，随着局势日益安定，汉族学者们的反清思想已渐渐淡漠，满、汉矛盾日趋缓和。同时，清代中期，随着政权的巩固，清统治者放弃了早期对汉人学者的较为宽纵的怀柔政策，而变为厉禁所有触及其统治正统性及忌讳的研究，由此引发了多起大规模的文字狱。这使得与反思明代灭亡及有关夷夏之妨等相关的研究成为学者们的禁地。在此环境中，乾嘉学者的经世思想亦变得相对淡泊。同时，经过近两代人的努力之后，经学研究已经非常深入，由此引发出一些更为专门却亦更为琐细的问题，一些学者陷于对这类问题的思索而将考据这一恢复传统儒家理论（或建立新的儒学理论）的手段转化为研究目

---

① 支伟成称：“明季遗儒，越在草莽，砥砺名节，耻事新朝.相率刊落声华，专治朴学.惩明儒之空疏无用，其读书以通大义为先，惟求经世之务，因痛宗社之变，则好研究古今史迹成败，地理山川阨塞，以为匡复之图。”《清朝朴学大师列传》中首列顾炎武、黄宗羲、王夫之。见：支伟成. 清朝朴学大师列传. 1.

的。同时，清政府组织的大型编书活动，亦为经学家们提供了一定的生活保障及研究素材。搜遗考校一时成为学术界的主流。

虽然较诸清初学者，乾嘉学者的经学研究显得缺乏思想性，同时，专注训诂的研究亦使得他们的工作看起来更为沉闷和琐屑。但不可忽视的是，他们的研究更具学术性，其研究方法也更为专业化。正是在这样的背景下，出现了乾嘉数学研究的高潮。下面，就让我们看看乾嘉学派与数学的关系。

今人常按师承和地域将乾嘉学派分为吴派、皖派、扬州派和浙东学派。吴派起于惠周惕、惠士奇(1671—1741)，成于惠栋(1697—1758)。皖派肇于江永(1681—1762)而成于戴震(1723—1777)。这两派均是沿袭了顾炎武、毛奇龄(1623—1716)和阎若璩(1636—1704)的偏重治经的研究方式。扬州派实由吴、皖二派衍生，主要代表人物有钱大昕(1728—1804)、汪中(1745—1794)、焦循(1763—1820)和阮元(1764—1849)等。浙东学派学呈袭黄宗羲，偏重治史，以章学诚(1738—1801)为代表，提出"六经皆史"的口号。

值得注意的是，四派中的代表人物多数有关于数学的论述或著述。从他们的著述中，我们可以大致看出他们对西方数学的态度。

被江藩置于《汉学师承记》篇首的阎若璩对吴、皖二派有着直接影响。他以"一物不知，儒者之耻"为治学口号，于经、史、天文、数学及山川形势、州县沿革均有研究。在数学方面，于17、18世纪研究天文学和数学的学者中，他的工作应该并不值得特别称道，以阮元所论，"其于步算，盖余事耳"①。但作为乾嘉学派的开山之祖，他的治算方法对该派学者有着很大的影响。借助于天文、数学知识，他完成了奠定他在学术史上的地位的《尚书古文疏证》一书。书中专辩孔安国传古文《尚书》中较今文《尚书》多出来的25篇为伪书。自宋代起，古文《尚书》的真伪问题便引起了包括朱熹在内的儒学家的注意，但当时没有人提出该书为伪作的明证。明代学者梅鷟对晚出的古文《尚书》进行考证，指出古文《尚书》中的25篇为晋人伪作，但其辨证并不完备②。阎若璩在前人基础上，论述该书与古籍不合、与史例不合、与古史不合、与典制不合、与历法不合、与地理不合、与训诂不合及与义理不合。在历法方面，他列举并分析了古文《尚书》中所载的天文记录与《三统历》的不

① 阮元.阎若璩.畴人传.卷40.9b.

② 梅鷟.尚书考异.

合之处，这是他断定古文《尚书》为后人伪作一个重要证据①。至此，对《尚书》辨伪的工作基本告一段落。对于《尚书古文疏证》在历史上的地位，梁启超称："自兹以往，而一切经文，皆可以成为研究之问题矣。再进一步，一切经义，皆可以成为研究之问题矣。"②阎若璩称："历法疏密，验在交食，虽千百世以上，规程不爽，无不可以筹策穷之。"③这相当于指出，利用一部准确的历法，可以通过计算推算出千百世以前发生的日、月食的时间，自古以来，中国史书中即对历史上发生的日、月食及其他异常天象有着详细的记录，而典籍中也常会对特殊历史事件发生时的天象情况做出描述，利用这些记录及天文、数学计算，后人便可以考证古代典籍。承认一切特殊天象均可以数学和天文学方法逆推来确定其发生的确切年代暗示着阎若璩对理学宇宙观及天人感应理论的怀疑，这很可能与西方天文学思想的影响有关。④阎若璩的治学方法对其后的学者影响很大，18、19 世纪的汉学派学者们几乎人人都有天文、数学方面的常识，并鼓励数学教育和研究。

乾嘉学派吴派先驱之一惠士奇亦通天文、历算。惠士奇，字天牧，一字仲儒。1709 年成进士，选庶吉士，授编修。惠士奇称："康成《三礼》，何休《公羊》，多引汉法，以其去古未远，故借以为说。""夫汉远于周，而唐又远于汉……况宋以后乎？周、秦诸子，其文虽不尽雅驯，然皆可引为《礼》、《经》之证，以其近古也。"⑤汉儒较宋儒去古更近，是为乾嘉学派倡汉学驳宋学的理论基础。惠士奇幼读《二十一史》时，由于不懂天文数学知识，不能理解其中天文志和乐律志两部分。官翰林院时，他学习了西方历算方法，著《交食举隅》二卷，主要探讨日月交食的推算方法，他以传入的欧洲天文理论批驳了沈括关于日、月有气而无体的说法⑥，并称："古法不能定朔，故日食或在晦，说者谓日之食晦朔之间，月之食唯在望。此知二五不知十也。"⑦

由阎若璩和惠士奇在天文、数学方面的见解可以看出，作为乾嘉汉学派

---

① 阎若璩. 尚书古文疏证. 卷 1.

② 梁启超. 清朝学术概论. 14.

③ 阎若璩，尚书古文疏证. 转引自：阮元，阎若璩. 畴人传. 卷 40. 8b.

④ 清代初年，王锡阐和梅文鼎均曾批评理学宇宙论，梅文鼎认为，为了得到准确的历法，天文常数必须来自观测与计算，而不应来自象数。John B. Henderson, *The Development and Decline of Chinese Cosmology*. 150—155.

⑤ 转引自：江藩. 汉学师承记. 卷 3. 20.

⑥ 阮元，畴人传. 卷 41. 6a—7a.

⑦ 引自：江藩，汉学师承记. 21.

的早期学者，他们虽然倡导汉儒的研经方法并提倡汉学而批评宋学，但他们也并不盲目崇信古代经典。通过他们的考证，古代儒学经典及史学著作都成为可供研究的课题。他们以“无征不信”、“实事求是”为口号，同时，他们也并非完全排斥西学。阎若璩在一定程度上接受了西方宇宙论，惠士奇以西方天文理论为基础批驳古代天文理论，都是这方面的例证。清代另一位经学大家，乾嘉学派的皖派先驱江永在这方面则表现得更为明显。

江永（1681—1762）的天文、数学研究较阎、惠二位更为深入。江永，字慎修，安徽婺源人。江永博古通今，精于音韵、经学、天文、地理、步算、钟律，尤精《三礼》，江藩称其为“一代通儒”，确可谓名致实归。江永治学以注疏为主，长于比勘。他著述甚丰，著有《周礼疑义举要》、《礼书纲目》、《仪礼释例》、《春秋地理考实》、《群经补义》、《河洛精蕴》等等。在天文、数学方面，他著有《推步法解》、《数学》①、《中西合法拟草》等。《数学》（8卷）主要是对梅文鼎所撰《历学疑问》中的内容的评注，在某些段落，江永批评了梅文鼎的观点②。梅瑴成在读了江永的《数学》后，很可能不满于他对梅文鼎的批评，故赠联江永曰：“殚精已入欧罗室，用夏还思亚圣言”，而江永则曰：“至今日此学昌明，如日中天，重关谁为辟，鸟道谁为开？则远西诸家，其创始之劳，尤为不可忘也。”③表明江永不仅承认欧洲数学较中国传统数学更为优越，且根本不认为需要利用“西学中源”说将他的工作纳入传统学术的范畴中去。重要经学家戴震、程瑶田、金榜均曾问学于江永。④ 程瑶田除精于经、史之外，还写过《数度小记》等有关数学的著作。

戴震（1723—1777），字慎修，一字东原，号果溪，休宁人（今安徽省顿溪市）。约20岁时，戴震就学于汪梧凤（1726—1772），由此，有机会与当时居住在汪家的江永共同研究数学、音韵学及《礼记》。⑤1755年，戴氏避仇至北京。“困于逆旅，人皆以狂生目之”。获识钱大昕，钱氏视戴震为“天下奇

① 江永原定书名为《冀梅》，《数学》为戴震订定该书时所改的名称。

② 江永称：“其（梅文鼎）说又杂以臆度之见，无理之谭”．江永．数学．卷1．6a．

③ 江永．又序．数学．3．

④ 戴震与江永的关系为清代学术史上的一段公案。有的学者认为，戴震先为江永弟子而晚年背师，魏源、王国维均主此说．（见：魏源．书赵校水经注后；王国维．聚珍本戴校水经注跋）．胡适力主戴震一生都十分礼敬江永（胡适．戴震对江永的始终敬礼）。余英时认为戴与江之间并没有正式的师徒关系，所以不存在戴震背师之说（余英时．戴震的〈经考〉与早期学术路向）。但戴震曾随江永学习，并在经学、算学方面受到江永的影响则是学界的共识。

⑤ A. W. 恒慕义．清朝名人传略（中）．206—216．

材”,并以其为“精于推步者”推荐给秦蕙田(1702—1764)。秦氏1736年成进士,曾任礼部侍郎、工部尚书、刑部尚书兼国子监算学,加太子太保。秦蕙田精于三礼之学,当时正在撰著《五礼通考》,希望能够找到精通天文数学的人作为助手。《五礼通考》是一部关于古代礼制的总结性著作,其所谓五礼,即吉礼、凶礼、宾礼、军礼、嘉礼,《五礼通考》“嘉礼”中含利用天文算法推测古代史实,及勾股割圆等内容的“观象授时”一篇。[①]据称,戴震曾对该篇的成稿有所贡献[②]。此后,戴震结交纪昀、朱筠、王昶、卢文弨、王鸣盛等著名学者。1755年,纪昀主持刊行了戴震的《考工记图注》。1756年,戴震于王安国家坐馆,后成为著名经学家的王念孙(1744—1832)随之学习。1757年之后,戴震得与惠栋、沈彤等相识。1762年戴震中举,次年入京。戴氏于北京屡次讲学,段玉裁(1735—1815)时与其会。1766年,段氏正式拜戴震为师。戴震四次会试不第,靠协修地方志及教书为生。1773年,他奉上谕至北京任《四库全书》纂修官,负责从《永乐大典》中辑录古书。他辑录出《算经十书》中的6部,《测圆海镜》、《水经注》及数种其他珍本。戴震于经学、史学、音韵学、舆地学、天文算学等均有研究,为清代最为重要的经、史学家之一,但他最重要的贡献则在哲学领域。戴震强调考据学的哲学意义,他综合前人对理学宇宙论的基础性经典的考证工作,强烈批评理学的道德学说,他试图构建出一套新的哲学体系,提出一种理性主义一元论的思想。考据校勘、天文、数学、音韵、舆地等都是他建立新的哲学体系及批判理学的工具。戴震曾称:“诵《尧典》数行至‘乃命羲和’,不知恒星七政所以运行,则掩卷不能卒业。”“不知少广、旁要,则《考工》之器不能因文而推其制”[③],由此观之,戴震从事天文、数学的研究的主要原因是,他认为掌握天文、数学知识是理解古代经典的必备条件。但戴震为学最大的目的还是构建他的哲学体系。他的哲学研究并没有被其后的学者所继承,他对理学的强烈的批判态度在当时也未被广泛接受。

戴震最早的数学著作为《策算》一卷,该书主要讲述欧洲传入的纳皮尔筹的计算方法。戴震指出,“算法虽多,乘除尽之矣。开方,亦除也。平方用广,立方罕用。故《策算》专为乘、除、开平方举其例,略取经、史中资于算者,

---

① 秦蕙田. 五礼通考. 卷181—卷192.

② 江藩. 汉学师承记. 87.

③ 戴震. 与是仲明论学书. 戴震全集. 第6册. 371.



辑成一卷，俾治《九章算术》者从事焉”①。戴氏早期的数学研究似乎并不以追求高深的数学内容为目的。由于开立方的方法很少被用到，故他在《策算》中只介绍至开平方的方法。实际上，开立方还是有其应用的，戴氏称其“罕用”，很可能与他自己的研究内容有关。而这可以从他的著作中看出究竟：书内容多为经、史典籍中，如《汉书·律历志》、《皇极经世》、《吕氏春秋》《考工记》，与数学有关的问题。这正是他研究数学的目的，以天文、数学方法作为他校经之助，而以考校经典作为他建立自己的哲学体系之助。

戴震另有《算学初稿》四种，分别为《准望简法》、《割圆弧矢补论》、《句股割圆全义图》、《方圆比例数表》。《准望简法》介绍三角测量方法。书中开篇录《周髀算经》文本，并试图补出弦图，但总体上来说，书中广泛应用了欧洲三角学中关于角度的算法并介绍了数种传入的测量仪器的用法和原理。②《割圆弧矢补论》探讨弦、矢、弧、径等之间的比例关系，并借助图形给出解释与说明。《句股割圆全义图》为7幅取自第谷宇宙论的简图。《方圆比例数表》相当于以《隋书·律历志》中所记的祖冲之求得的圆周率为基础计算出的圆直径与圆周、正方形面积与以正方形边长为直径的圆的面积、圆直径及与该圆面积相同的正方形的直径、圆与方、圆直径的平方与圆分之间的关系表。

戴震最重要的数学著作是他的《句股割圆记》。该书初稿完成于1755年，后屡经改易，孔继涵将其定稿本附刊入微波榭《算经十书》之后。全书64图，49术，主要探讨球面三角学和平面三角学方面的知识。与梅文鼎一样，他试图以勾股术阐释传入的欧洲三角学知识，故其各术之名均为“句股第某术”。他自称该书是“因《周髀》首章之言衍而极之，以备步算之大全，六艺之遗简”。从数学内容上来看，他的成果并未超出梅文鼎的《平三角举要》、《弧三角举要》等书的内容，该书亦综合了他自己所著《策算》中的数学内容，可以明显地看出欧洲三角学的影响。戴震在该书中以一些更为古奥的词汇重新定义从欧洲传入的并在当时已经流行的数学术语。为此，他遭到了后辈经学家凌廷堪的批评。③

戴震对乾嘉时期数学研究影响最大的工作是他以《四库全书》馆臣的身

① 戴震．策算序．策算．戴震全书．第5册．5．

② 在第六章中，我们还会继续分析戴震在三角学方面的工作。

③ 关于戴震的数学著作，参见：钱宝琮．戴震算学天文著作考．

份从《永乐大典》中辑出多部算经。这些书籍被重新刊印之后，学者们才能够读到中国数学史上最重要的传统数学著作，此为乾嘉时期古算复兴的基础。古算经的重新解读，使得中国学者和数学家重新认识并理解了传统数学的出色成就及其固有的算法理论体系。故，阮元评戴震曰：

> 九数为六艺之一，古之小学也。自暴秦焚书，六经道湮。后世言数者，或杂以太一三式，占候卦气之说。如是，儒林之实学，下与方伎同科。是可慨已。庶常（戴震）以天文、舆地、声音、训诂数大端为治经之本，故所为步算诸书，类皆以经义润色，缜密简要，准古作者。而又网罗算氏，缀缀遗经，以绍前哲，用遗来学。盖自有戴氏，天下学者，乃不敢轻言算数，而其道始尊。然而戴氏之功，又岂在宣城（梅文鼎）下哉！①

与戴震同时的扬州学派经学家钱大昕也对18世纪及19世纪初的数学研究起到了很大影响。钱大昕，字晓徵，一字辛楣，又号竹汀，嘉定人。自幼被视为神童。1751年，乾隆帝南巡途中召试举人，以内阁中书补用。至北京后，与同时在京的褚寅亮、吴朗一起研究传统数学及传入的欧洲测量学和三角学。并与当时任钦天监监正的何国宗奉旨为蒋友仁所著的《地球图说》一书润色文字。② 其间，他们经常一起探讨数学问题。据称，何国宗“逊谢，以为不及”③。1754年，钱大昕成进士，授翰林院检讨，1763年，以大考翰詹列一等第三，擢为侍讲学士，充日讲起居注官。三十七年，改补侍读学士，并被擢为詹事府少詹事。入直上书房，授皇十二子书。参与了《热河志》、《续文献通考》、《一统志》、《天毬图》等书的编撰，并多次出任各地考官、学政和会试同考官之职。后以丁艰回籍，至此不再出仕。钱大昕“生平博及群书，兼擅众妙。不专治一经而无经不通，不专攻一艺而无艺不精，凡经、史、文义、音韵、训诂，历代典章制度、官制、氏族里居、官爵、事实年齿、古今地里沿革、金石画像、篆隶以及古《九章算术》，迄今中、西历法，无不了如指掌。其

---

① 阮元．戴震．畴人传．卷42．22a—b．

② 《地球图说》较为系统地介绍了哥白尼的日心说宇宙论。通过对该书的研究，钱大昕可以发现传教士引入了不同的宇宙体系。

③ 引自：罗士琳，钱大昕．畴人传续编．卷49．1b．江藩所著《汉学师承记》中《钱大昕》条亦称，“何翰如（国宗）久领钦天监事，精于推步，时来内阁与先生论李氏、薛氏、梅氏及西洋利玛窦、汤若望、南怀仁诸家之术，翰如逊谢，以为不及也”。见：江藩，汉学师承记．卷3．41．

是非疑似，人不能明断当否者，皆确有定见”。[①]该评价虽有过誉之嫌，但钱大昕确实为当时一代通儒。

钱大昕在数学方面的著作并不多。“偿取算术二十四条，演为答问”。这二十四条问题多为“《左传》绛县人甲子”、“《续汉志》太史令虞恭等议以太初元年岁在丁丑”等与经、史或天文历法有关的问题，并非纯数学问题。[②]钱大昕对于天文、数学研究产生重大影响的是他对于古代历法的研究。在钱氏之前，其他经学家多将天算作为他们研究经、史的工具，所以，他们完全可以选择最准确的历法上推古代的天文现象，以与古代经、史著作中的记载相对照，从而考证经、史著作中内容的真伪。钱大昕敏锐地注意到，传人的欧洲天文学方法也是逐渐改进的。他虽然也将天文、数学用于经、史研究之中，但他还要进一步深究古代历法。“著《二十二史考异》，详论《三统》、《四分》以来诸家之术”[③]。他还撰成了《考异》和《三统术矜》研究古历的历史和内容。据李锐称：“史学家自吾师而外罕言及者”。

对于钱大昕，考察天文学发展的历史也是史学研究的内容之一。当然，探讨天文、数学的历史所需要的对天文、数学的研究比仅将其用于经、史考据的要求高得多。钱大昕对于数学的态度很值得我们的注意。他曾称：“宣尼有言，推十合一为士，自古未有不知数而为儒者”[④]。“数为六艺之一，由艺以明道，儒者之学也。自世之学者卑无高论，习于数而不知其理，囿于今而不通乎古，于是儒林之实学遂下同方技，虽多运算如飞，又何足贵乎？”[⑤]从中，我们可以看出钱大昕对数学的态度及他研究数学的目的。首先，数学是古六艺之一，是儒者应该掌握的知识，所以，作为一个儒家学者，必须研究数学。其次，数学研究所贵的是“理”，而不是单纯的对计算方法的追求。当然，钱大昕的数学之“理”与现代数学中所称的理论数学含意并不完全一致。因为他所强调的是要由“艺”以明“道”，知今且通古。钱大昕曾读过秦九韶的《数书九章》，他的由“艺以明道”的观点很可能来自秦九韶的著作。而他的数学研究必须知今通古的观点则与他的经、史研究密切相关。钱大昕的这些观点均为其弟子李锐所继承。李锐发出三大愿，欲全面探讨中、西天

---

① 罗士琳．钱大昕．畴人传续编．卷49．4a—b．

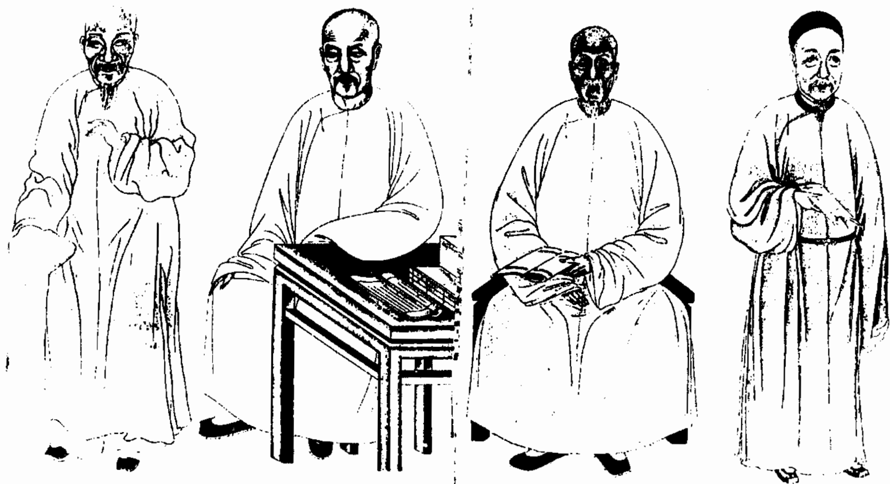
② 参见：罗士琳，钱大昕．畴人传续编．卷49．4b—5b．

③ 阮元，利玛窦．畴人传．卷42．8a．

④ 钱大昕．赠谈阶平序．潜研堂文集．卷23．嘉定钱大昕全集．第9册．362．

⑤ 李锐．三统术衍钤跋．三统术钤．嘉定钱大昕全集．180．

文、数学的历史。据称，钱大昕“平生未尝轻许人，独以锐为胜己”，很可能正是由此而发的。从这个角度来说，钱大昕的观点很可能影响到李锐对中、西天文、数学的看法和评价，以及李锐治算的方法和目的。由此，亦可能对欧洲数学在中国的传播带来过负面的影响。我们将看到，在钱大昕等人之后，出现了纯粹数学方面的研究高潮。钱大昕个人的贡献是他明确提出计算并不是数学研究的最重要的目的。他曾在任教紫阳书院时讲授数学知识，培养出李锐、谈泰等通数学的学生。长州人龚沦五旬以后入紫阳，“从钱氏受数学”[1]。此外，掌握一定数学知识的经学家孙星衍曾从学钱氏于钟山书院，钱氏族子钱塘亦通天算。



钱大昕、戴震、焦循与阮元

扬州学派的主要代表阮元对18世纪末至19世纪上半叶的数学研究有着很大的影响。阮元(1764—1849)，字伯元，号云(芸)台、雷塘庵主、颐性老人等。1789年成进士，选翰林院庶吉士。1791年授编修。后历任山东、浙江学政，户部、工部、吏部侍郎，浙江、湖南、江西巡抚、两广总督、云贵总督。1835年，晋职为大学士，直至1838年74岁的阮元以半俸致仕，加太子太保。阮元不仅是一位能吏，还是一位重要的经、史学家。一生中主持编撰《经籍训诂》(116卷)，整理刊刻了《十三经注疏》，并刊出了他校

① 阮元．龚沦传．畴人传．卷42．29a．

勘经书的心得《十三经校勘记》，编撰了《两浙輶轩录》、《广东通志》、《皇清经解》等。在《四库全书》成书后，阮元仍努力于各地采访遗书，他集成《四库》未收古书 174 种进呈内府，且每得一种，他都仿《四库全书》提要之式奏进提要一篇。后嘉庆帝将这 174 种书籍赐名《宛委别藏》。他在各地任官期间，都非常注意提倡学术。除编辑出版大量书籍之外，他还创办了清朝中叶著名的诂经精舍和学海堂两所以经学为主要教育和研究内容的学校，数学也被列入这两所学校的教学内容之一。梁启超曾将他和毕沅一起喻为汉学派的护法。

阮元早年应学过与数学相关的知识。1788 年，他撰成《考工记车制图解》(二卷)，考证图解古代车制，这是在江永、戴震同类著作之后的一部力作。阮元自称其作品为他“玩辞步算”而成，即利用数学原理重新考校古代车制。1791 年翰林院散馆大考翰詹时，阮元所学习的天文、数学知识派上了用场。是年，乾隆帝钦命考题，其中有《拟张衡天象赋》一题。阮元为乾隆亲自由第二名擢至第一，并由此得到少詹事及南书房行走的职位。同年“夏至前二日”，阮元被召见于乾清宫西暖阁，乾隆帝“问及书画、天文算法等事”①。1799 年，阮元兼管国子监算学，他很可能即是由于其有关天文算法方面的对答较为出色而得掌国子监算学。

阮元从多方面倡导和支持数学研究。他出资勘刻了一些同代人的数学著作，如钱大昕的《三统术衍》、孔广森(1752—1786)的《少广正负术》、焦循的《里堂遗书》、李锐的《李氏遗书》等，并在他所创办的诂经精舍和学海堂的教学中加入数学内容。此外，他广泛搜集佚书，使得一些重要数学著作得以流传于世，在他搜集进呈的 174 种遗书中，便有元代最重要的数学著作之一，朱世杰的《四元玉鉴》。同时，他将自己得到的算书抄赠焦循、李锐等数学家，由他们进行深入研究。18 世纪数学家李锐、沈钦裴、罗士琳、戴煦、李善兰等都对《四元玉鉴》作了系统研究，通过对四元术的研究，综合先此重新被理解的天元术和增乘开方法等传统数学方法，一些中算家们得出中国传统代数方法优于《数理精蕴》中介绍的欧洲代数方法(借根方法)的结论，并由此引发了 18、19 世纪中国数学家间中法派和西法派关于中、西算法优劣的论争。② 阮元直接参与的最重要的有关天文、数学的工作是《畴人传》的

---

① 张鉴等．阮元年谱．卷 2．10．

② 关于天元术、四元术和借根方法在 17、18 世纪的研究和传播情况，详见本书第五章。

编撰。关于该书，我们将在下文中作更为详细的介绍。

扬州学派的另一个重要代表人物焦循为当时中国最重要的数学家之一。关于他的工作，我们也会在下文中分析。

综上所述，乾嘉学派的学者们确实非常重视数学。这主要是由该学派的治学方法决定的。乾嘉学派虽然提倡古学，但却以怀疑的态度看待所有流传下来的经典。他们治学讲究无征不信，在经、史研究中追求实事求是和确定无疑的证据，然而，对于古代文献的研究来说，这并不容易做到。年代学和舆地学方法成为他们经史研究的手段，这两者均要用到天文数学知识。由此，严格而确定性的数学成为他们经学研究的重要辅助工具。然而，早期乾嘉学派学者虽然重视数学，但他们的数学工作却有着很强的实用目的，故他们多数并不致力于深化数学研究。戴震在其数学著作中以开立方术为用不多而将其略去不讲便是早期乾嘉学派学者对数学的态度的一个具体表现。但正基于此，他们对西方数学采取了一种较为开放的态度，他们所需要的仅是可以提供准确结果的计算方法，对于该方法的来源及延革，他们并不十分介意。总之，早期乾嘉派学者虽均通算学，但其中很少有数学专家，他们所做的数学工作也多是在传入的欧洲数学知识及当时仅存的几部中国传统数学著作的基础上完成的。从纯数学的角度来看，他们均未超过清代初年梅文鼎、方中通、杜知耕等人的数学水平。

18世纪后半叶，一些汉学家对数学的态度已有所变化。钱大昕提出天文、数学均属学术范畴，是儒学中的“小学”。所谓“小学”主要指文字学，汉学家奉为必读经典的《尔雅》、《苍颉》等字书均属小学类著作。在支伟成所著的《清代朴学大师列传》中，顾炎武、江永、戴震、段玉裁、王念孙、王引孙及钱大昕均属“小学”家。①钱氏将数学归入其中，可见，对于他来说，天文、数学不仅仅是研究的工具，且是研究的内容及基础。正因如此，他仔细考察了中国传统及从西方传入的历算知识的延革。

18世纪末年，出现了一批出色的数学家和数学成果。一批重要的传统数学著作的重新出版是成就此一局面的重要因素，而这批数学著作大多是藉《四库全书》的编撰重新面世的。让我们先来看看《四库全书》的成书及该书与数学研究之间的渊源。

---

① 支伟成．清代朴学大师列传．

第二节 《四库全书》的编撰与乾嘉时期的数学研究

前文已经提到，清朝帝王虽为满族，但却在其执政伊始即摆出继承中国传统文化的态度，这不仅表现在各朝帝王都自幼接受严格的儒家经典教育，还表现在他们对传统儒家文化的不遗余力的赞扬，以及搜集、整理各类书籍及编撰出版大型丛书等方面。清朝政府组织编纂的最重要及最大的两部大型图书是《古今图书集成》和《四库全书》。《古今图书集成》最早是在康熙第三子胤祉的主持下，由陈梦雷(1651—1741)等于1706年编成，原名《古今图书汇编》。雍正帝继位后，命蒋廷锡(1669—1723)重新编校，于1726年完成，更名为《钦定古今图书集成》。全书一万卷，分"历象"、"方舆"、"明伦"、"博物"、"理学"、"经济"六个汇编，32典，6109部，约160 000 000字。虽然该书采集广博、资料宏富，且注明了所引资料的出处，但书中资料多为征引前人类书，且校核粗疏，甚至有任意删节之处。乾嘉时期，"汉学家们一面研究经史，考订古书，一面复将旧类书中散见之各种古书搜辑成帙，各还原本。故辑佚书之风气，披靡一时"[①]；这样，《古今图书集成》这类类书已与当时的学风不能相侔。1772年，乾隆帝下诏曰："康熙年间所修《图书集成》全部，兼收并录，极方策之大观。引用诸编，率属因类取裁，势不能悉载原文，使阅者沿流溯源，一一徵其来处"。为此，他要及时采集"古今来著作"，"汇送京师"。以使"四库七略，益昭美备，称朕意焉"[②]。这一广收书籍的最终结果，便是大型丛书《四库全书》的成书。全套丛书收入书籍3503种，79330卷。《四库全书》中的书籍主要来自三个方面，一为清宫内府藏书，一为从明朝类书《永乐大典》中辑录出的书籍，一为从全国各地搜集的藏书家及著作家所集及所著的书籍。虽然乾隆帝藉搜访遗书而大事毁弃对其统治不利及触及清朝忌讳的书籍，造成了很多古书的失传[③]，但很多古代典籍在《四库全书》的编撰过程中被收集并保存下来。为数众多的经学家参与了该丛书的编撰工作，他们精心选择善本，并进行精细详备的校勘考证，为后世研究打下了良好的基础。

① 郭伯恭.《四库全书》纂修考. 2.
② 乾隆帝. 诏书. 转引自:《四库全书》纂修考. 6.
③ 关于《四库全书》编纂中禁毁图书的情况，参见:郭伯恭.《四库全书》纂修考.

在《四库全书》的编纂过程中，部分数学古籍得以重新流传于世。《古今图书集成》收入的数学著作很少，只有《周髀算经》、《数术记遗》、《算法统宗》及《西洋新法算书》中的《大测》、《比例规解》和《几何要法》。相较而言，《四库全书》收入的数学书籍要丰富得多。《四库全书》馆专设天文算学纂修官及分校官 3 人，郭长发、陈际新、倪廷梅负责天文、数学方面书籍的编校工作。陈际新为明安图的学生，曾在明安图去世后为其补成《割圆密率捷法》全文。除天文算学纂修官之外，戴震任《永乐大典》的纂修分校官，他从《永乐大典》中辑出《算经十书》中的《周髀算经》、《九章算术》、《海岛算经》、《孙子算经》、《五曹算经》、《夏侯阳算经》七部算书①，与毛扆② 所藏的影抄南宋本《张邱建算经》和《缉古算经》及明刻本《数术记遗》一起合成《算经十书》全帙。亦通数学的李潢任总目协勘员，另一通数学的经史学家丁杰虽未被列入四库馆职之中，但曾应邀助理校勘工作。③他们应该都对《四库全书》中的天文、数学类书籍的整理做出过贡献。李冶的另一部重要数学著作《测圆海镜》即以李潢家藏本为底本校勘，收入《四库全书》。《四库全书》中还收入了明以来的很多数学著作。汤若望由《崇祯历书》改编而成的《西洋新法历书》以《新法算书》的名义被收入，顾应祥、方中通、杜知耕、梅文鼎、江永等人的数学著作及《数理精蕴》也被收入。《四库全书》可以说集中了当时传入的西方数学知识及当时能收集得到的中国数学家的著作。

《四库全书》馆臣中以乾嘉学派学者为主体，故从《四库全书》收录的著作及《四库全书提要》中我们亦可看出乾嘉学派及清初至清中叶学者对文化的认识和态度。本书中，我们主要关心的是他们对数学和西方知识的态度。早在 1748 年，乾隆帝即曾下旨，收辑西人所译书籍，核正后誊写进呈。《四库全书》中收入和存目了西洋传教士参与撰述的著作。这些著作不分疆被域地收入《四库全书》④。那么，《四库全书》中对西学的态度究竟是怎样的呢？关于这一问题，《寰有诠提要》为史学家经常引用的有代表性的文献：

> 欧罗巴人天文推算之密，工匠制作之巧，实逾前古。其议论夸

---

① 关于《算经十书》及其在清代的流传，参见：钱宝琮．中国数学史．关于戴震对《九章算术》的校勘，参见：郭书春．评戴震对《九章算术》的整理．

② 毛扆(1640—1713)，字斧直，江苏常熟人。为著名藏书家汲古阁主人毛晋的第五子。

③ 参见：任松如．四库全书答问．民国丛书．7—29．

④ 计文德．从《四库全书》探究明清间输入之西学．355．

诈迂怪，亦为异端之尤。国朝节其技能，而禁传其学术，具存深意。①

文中的“学术”主要指的是西方哲学及宗教学方面的知识。清代中叶的学者虽然斥西方哲学宗教内容为“异端之尤”，但他们还是承认西方在天文、数学方面的优势。正基于此，乾嘉学派的学者并不忌讳使用西方的数学天文方法。《四库全书》对传入的西方知识的收取及介绍确实遵循了“禁传学术”，“节其技能”的原则，传教士撰写的关于天主教教义及西方哲学的著作几乎全部未被采入。对于采入的著作，《四库全书》馆臣亦删除了其中涉及天主教的内容。传入的数学、天文、仪器及机械等方面的著作多被较为完整地收入。

像《四库全书》这样的大型丛书在当时不可能得到广泛的流传，《四库全书》共被誊写七部，分别藏于文渊阁、文源阁、文溯阁、文津阁、文宗阁、文汇阁和文澜阁。1773 年二月十三日，乾隆帝下诏，将从《永乐大典》中辑出的，在世上“实在流传已少，其书足资启牖后学，广益多闻者，……，汇付剞劂”②。一年后，《四库全书》中选出 138 种以《武英殿聚珍版丛书》为名印行。该套丛书首次刷印 300 部，听人购买。后因不敷所需，乾隆帝令颁发东南五省各一分，并准所有情愿刊者，听其翻版通行，这部分图书在社会上得到了较为广泛的流传。在这 138 部书籍中，有数学书籍《周髀算经》、《九章算术》、《海岛算经》、《孙子算经》、《五曹算经》、《五经算术》、《夏侯阳算经》七部。③后孔继涵综合这七部算经与毛扆所藏的影宋版《算经十书》中的七部算经，校勘出版了《算经十书》。至此，中国数学家终于可以较为容易地得到在世上流传绝少的传统数学名著《九章算术》等著作。虽然社会上一般学者可能很难见到《四库全书》全帙，但像阮元等有一定官阶的人还是可以读到全书的。为编写《畴人传》，李锐曾广泛阅读《四库全书》中的数学书籍，这很可能也是经阮元的介绍才能办到的。

在《四库全书》编纂的过程中，大批在社会上很难得见的书籍被重新整理出版，为乾嘉学派的学者提供了新的研究课题。传统数学书籍作为古代经典的一部分，亦引起学者们的强烈兴趣。18 世纪末，校勘、研究新发现的

---

① 寰有诠提要．四库全书总目．

② 乾隆帝．上谕．转引自：郭伯恭．《四库全书》纂修考．96．

③ 参阅：郭伯恭．《四库全书》纂修考．100—104．

古算书成为数学界最主要的课题。虽然校勘古代数学典籍及对传统天文、数学历史的研究均属传统数学研究范畴，但如果细心的话，我们还是可以看出西方数学的影响。

《九章算术》是中国历史上最重要的数学著作。从现存文献分析，《九章算术》在西汉中叶(公元前1世纪)已经成书①。该书分"方田"、"粟米"、"衰分"、"少广"、"商功"、"均输"、"盈不足"、"方程"九章，共246个问题。《九章算术》的9部分内容确定了中国数学的基本框架。此后的数学研究或在此基础上增补，或取其一二项甚至个别问题展开深入。中国传统数学中绝大部分成果均可在该书中找到源流。《九章算术》以术统题的写作方式奠定了中国数学著作的著述模式。现传《九章算术》包括原书文本、魏刘徽注及唐初李淳风注三个部分。刘徽在其作于公元263年的注中全面论证了《九章算术》中的计算程序和公式，使"《九章算术》建立的框架变成了一个'通而不黩，约而能周'的理论体系"②。明朝以后，民间很难见到《九章算术》原书。徐光启、李之藻以至梅文鼎均未曾读到过《九章算术》全文。《四库全书》中的《九章算术》出版后，引起了乾嘉学者的普遍关注。1776年，常熟屈曾发刊行了戴震以《四库全书》武英殿聚珍本及汲古阁本为底本重校的《九章算术》。次年，戴震再次校勘《九章》，孔继涵将其收入微波榭丛书本《算经十书》。此本被多次影印、翻刻，影响很大。后来，李潢在数学家李锐等的协助下撰成《九章算术细草图说》。该书由按、草、说、图四种内容构成。其"按"主要为校勘意见。经过李潢的校勘，《九章算术》中舛误不可通的文字大都能文从字顺。其"草"是根据《九章算术》术文及其刘徽注，列出演算程序。"说"主要是对刘徽注及李淳风等注释的文字逐句阐释，并分析了注文中不易理解的文字。"图"则为解释问题及算法的辅助图形。《九章算术细草图说》经沈钦裴校算后于1820年刊刻成书。③通过该书，《九章算术》中的数学成果及刘徽等所构筑的理论体系可以为当时的数学家全面理解。

很有可能是通过对《九章算术细草图说》的校算，数学家沈钦裴对刘徽所撰的《海岛算经》中的重差测量法做了深入的分析，撰成《重差图说》一

① 郭书春．九章算术序．九章算术．

② 郭书春，九章算术提要．中国科学技术典籍通汇．第1卷．85．

③ 详见：郭书春．九章算术细草图说提要．九章算术细草图说．第4卷．945—946．

卷。① 书中以《几何原本》中介绍的相似三角形理论解释及证明了重差术的计算方法。

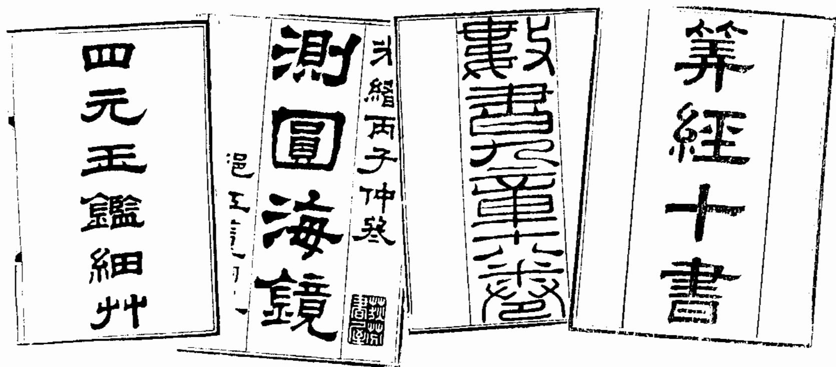
《四库全书》中还收入了李冶所撰的《测圆海镜》。在本书第二章中曾提到，梅瑴成通过学习欧洲代数学方法重新理解了天元术。《测圆海镜》为现存含天元术的最早作品。当时，通过《数理精蕴》的介绍，中算家们对来自欧洲的借根方代数方法已较为熟悉。《四库全书》馆臣以借根方方法和术语注释《测圆海镜》中的问题。《数书九章》、《测圆海镜》等宋元数学著作在学者中得到流传之后，一些数学家通过对这些著作的研究重新理解了增乘开方法，并对天元术和借根方方法的异同做了进一步的分析。其结果引起数学家内部关于中、西代数方法优劣的争论，该争论导致了中国数学家在方程论方面的出色成果的出现。争论双方虽然各自以来自不同传统的数学方法推导及论证他们的数学成果，但中算家致力于方程的理论（完全属于西方传统的数学领域）的研究本身亦说明西方数学的方法及思想在乾嘉时期已被部分中国数学家所接受。这亦是中国数学西化的一个重要表现。关于中算家围绕这一问题的争论及争论的原因，将在第五章介绍。

中国数学史上另一部数学著作《四元玉鉴》是乾嘉末期重新被发现和整理的一部重要著作。《四元玉鉴》，三卷，元朱世杰著，1303年刊刻。该书内含四元术、垛积术等在中国传统数学中占有重要地位的内容。元代末年，中国古典数学开始衰落，到明代，《四元玉鉴》中所含的许多数学内容已不能为当时的数学家所理解。虽然有一些数学家和藏书目录还提到《四元玉鉴》，但其流传绝少。嘉庆初年，阮元抚浙时，访得旧本《四元玉鉴》，以《四库》未收古书进呈内府（此本影抄本为清宫所保存），同时以副抄本交数学家李锐（1769—1817）校算。李锐不久病逝，未能完成这一工作。此后，张敦仁、沈钦裴、黎应南、董祐诚、徐有壬、何元锡、王萱铃、罗士琳、戴敦元（1768—1834）及学者龚自珍、魏源等人均读过该书。1822年，徐有壬读到《四元玉鉴》，积思三昼夜，写出细草。徐有壬很可能是清朝最早读懂四元术的人。沈钦裴、罗士琳、戴煦等还各耗10年之力独立完成《四元玉鉴细草》。其中，

---

① 《海岛算经》本为刘徽《九章算术注》的第十卷，原名重差。唐初以《算经十书》课士，该卷以《海岛算经》为名作为独立的著作被列为十部算经之一。

罗士琳的细草被多次刊刻，对后世关于《四元玉鉴》的研究起到很大的影响。[①]重新理解四元术之后，曾对西方数学情有独钟的罗士琳不再支持西方借根方代数，并成为19世纪20年代之后中法派的代表人物。借根方代数方法在此后很少被中算家所提及。至1859年，西方符号代数学被引入之后，天元术和四元术逐渐被取代，但直至20世纪初，还有一些学者和数学家研究《四元玉鉴》。[②]



乾嘉时期重新发现和整理的部分古算书书影

《四库全书》也为18、19世纪的数学史的研究提供了丰富的素材。介绍钱大昕时，我们已经提到，钱氏将天文、数学的历史研究纳入其史学研究范畴之中。钱大昕的学生李锐则进一步试图将其研究范围推广致对世界天文、数学史的研究。1796年3月25日，李锐在写给另一位数学家焦循的信中袒露了他的三大愿望：

> 中法自《三统》以至《授时》、《大统》，载在廿四史者甚备，然史学家自吾师考异而外罕言及者。意欲随术讨论，于法之隐奥者详说之，字之误者正之，文之脱者补之，不可考者阙之，俾古人创造之法，愈改愈密之苦心不致泯没无传，则所愿一也。本朝时宪书用西方本轮、次轮，以及椭圆面积之术，至精密矣。溯其所自来，唐有《九执》，元、明有《回回》二家，国初又有未经行用之穆尼阁《天步真

---

① 关于《四元玉鉴》的流传和版本，参见杜石然．朱世杰研究；田淼．《四元玉鉴》的清代版本及清人对《假令四草》的校勘．

② 关于代数学的流传，详见本书第五章。关于《四元玉鉴》的内容、版本及流传情况，参见：杜石然朱世杰研究；田淼．《四元玉鉴》的清朝版本及清人对《假令四草》的校勘研究．

原》,是三术者,《九执》则传写脱误处甚多,《回回》则月分最高之元术中并未明载,穆尼阁、薛仪甫(薛凤祚)所译,言之不详。亦思有以剖析之,使谈西学者知彼中测验亦由疏而密,非一蹴可到,则所愿又一也。唐宋相传有算学十书,今《缀术》亡矣,存其九种。《周髀》为盖天遗说,《九章》于算数之事纲举目张,《海岛》用矩表测望高深广远,《缉古》(带)从开立方,为后来立天元一、借根方之所自出,孝通自云,如有排其一字,臣欲谢以千金,则其立术之精深可知矣。亦欲一一究明其所以然,无所疑惑而后快,则所愿又一也。①

李锐的“三大愿”为认真研究并考校中国古代的历法,以志古人创造之苦心;研究阿拉伯和欧洲天文学,以显西方天文学也是逐步发展而来的;研究古代数学著作,考查诸算法立法的所以然,也就是其原理。这三项研究均可被归结于史学范畴之中,同时,李锐希望将经学研究的考证方法运用到他的三大研究之中。② 焦循对李锐的三大愿极为赞赏,称:

兄愿于数千年中、西疏密之原,汇而贯之,此实从来未有之书,亦宇宙内断不可无之书,循所乐之而力不能为者。以兄之学力赴兄之所愿,必成无疑。惟是不朽之业,鬼物所忌,富贵利禄疾病困乏,或顺或逆,皆所以阻挠乎?我以为之魔,敢为兄戒之。身外之物,听其自来,即学问中六书、音韵、训诂、典章之要,亦乞待之于书成之后,专于所愿,务期其成。③

焦循希望李锐能够摈弃一切世俗羁绊,甚至暂且将经、史等学术研究搁置一边去完成其志愿,可见他对李锐工作的期待之殷。李锐确实为了完成他的三大愿望做了很多工作。其工作以考证、校订古算经及天文历法为基础。他先后对《三统历》、《四分历》、《乾象》、《奉元》、《占天》、《淳祐》、《会天》、《大明》、《大统》等历法进行疏解,其中前五种书稿被收入《李氏遗书》。1799

---

① 李锐. 至焦循. 观妙居日记. 抄本. 转引自:郭世荣. 清朝中期数学家焦循与李锐之间的几封信. 130—131.

② 李锐是乾嘉时期最重要的数学家之一,关于他及他的工作,我们还会在下一节及以后的篇章中作详细的介绍。现代数学史家往往感叹经、史研究耗去了像李锐这样具有很高数学能力的数学家的精力和时间。单从数学的发展来说,这确实令人惋惜,但我们只有回到李锐所处的环境下才能理解他的工作。作为一位经学家,对于李锐来说,经、史研究的地位绝不下于数学研究。李锐的三大愿望也可以被归入学术史的研究。学术史的研究也是清代学术的一个重要课题。

③ 洪万生. 焦循给李锐的一封信. 谈天三友. 141—148.



年,他研读《宋书·律历志》,对其中所载周琮转述何承天的调日法有所悟,撰成《日法朔余强弱考》,不但正确阐述了“于强弱之际以求日法”的数学意义,且提出一种基于求一术的二元一次不定方程解法。在阿拉伯和欧洲天文学的研究方面,他撰成了《回回历元考》等著作。① 在古算书的研究和校勘方面,他校订出版了王孝通的《辑古算经》、秦九韶的《数书九章》、李冶的《测圆海镜》和《益古演段》,并与焦循、汪莱、凌廷堪、沈钦裴等一起协助张敦仁完成了《缉古算经细草》、《求一算术》、《开方补记》等著作。李锐这些工作均汇入中国历史上第一部大型数学家和天文学家的传记集——《畴人传》。后文中我们还会介绍《畴人传》的编撰和内容。

通过研究历史上的数学著作,李锐对传统数学方法有了深刻的理解。我们以他所著的《勾股算术细草》一书说明他在这方面工作的特点,亦藉此进一步分析西方数学对乾嘉时期数学家的影响。②

李锐通过对传统勾股术的整理,撰成一部《勾股算术细草》。该书中的算题均为已知勾、股、弦及其和差 13 项中的两项求解勾股形问题。在第一章和第二章中,我们已分别介绍了徐光启的《句股义》和梅文鼎的《句股举隅》,从本质上来说,《勾股算术细草》与上述两部著作所处理的问题是一致的,且李锐很可能研究过徐光启和梅文鼎的著作。③ 因此,通过对这三部著作的分析,我们可以看到明末、清初及清中叶在数学研究上有着出色贡献的三位学者对中、西数学的态度,同时,也可以较为明白地看出欧几里得几何学方法和思想在中国被理解及接受的过程。前文已经提到,从几何意义上

---

① 限于当时传入中国的有关欧洲和阿拉伯数学史的资料极少,李锐不可能在这方面取得太多的成果。

② 2002 年 5 月,笔者曾在林力娜教授主持的关于数学证明史的讨论班(巴黎,2002 年 3 月—6 月)上做了关于《勾股算术细草》的报告。讨论班的参加者对相关问题进行了长时间的讨论,笔者从中受到很多启发。其中林力娜(Karine Chemla)、詹嘉玲(Catherine Jami)、劳埃德(Geffery Lloyd)、缪勒(Ian Muller)、奈茨(Rivei Netz)、沃尔科夫(Alexi Volcov)等学者的建议尤具建设性。关于相关问题,笔者曾撰成两篇文章:“Rejection and adoption —— A study on Li Rui and his detailed draft of gougu mathematics”及“A formal system of the gougu method”的初稿。林力娜教授详阅了这两篇文章,并提出很多修改意见。此两文现正在修改之中。

③ 自 1797 年起,李锐开始协助阮元编著《畴人传》。杭州文渊阁本《四库全书》为其主要资料来源,而《句股义》和《句股举隅》两书均被收入《四库全书》。《畴人传》中有徐光启和梅文鼎的传记,所以,李锐很可能研究过两人的著作。由此可知李锐应了解徐光启和梅文鼎的相关著作和研究方法。

来说,勾、股、弦及其和、差只有十三项。[1]根据组合学知识,我们知道,从十三项中任选两项只有78种组合。《勾股算术细草》"目"中即全部罗列了78个算题[2]。李锐将"目"中所列的算题分为两部分。举例来说,78题中,有25题具有如下的形式:

句、股求弦[3]

而另外的53题是以如下形式表述的:

句、句股和。以句减和余即股,依句、股术入之[4]。

前一题相当于已知勾、股,求解勾股形,后一题相当于已知勾、勾股和求解勾股形。后一种形式不仅包括一个问题,还包括将该问题转化为前一形式的问题的具体过程。即:从勾股和中减去勾便可得到股,以已知勾、股求解勾股形的方法解决这一问题。这一过程亦为将该问题归结为另一个问题进行求解的证明,因对转化过程的描述实际上确立了该转化的正确性。通过这种形式,在"目"中,李锐将他归纳出的78个勾股问题化为25个基本问题。《勾股算术细草》正文对这25个问题作了全面的分析。对其中个别题目,李锐还以四个或两个方法给出解释。故全书正文包括34个算题。

下面,让我们来看看《勾股算术细草》的正文是怎样的结构。本书引述的为该书第8题:

今有弦七十五,句股和九十三,问句、股各几何?

答曰:句二十一,股七十二。

术曰:二幂相减,余半之,为负实,和为正从,一负隅,开平方得句。以句减和,余为股。

---

① 杨辉《详解九章算法》(1261)中给出含勾、股、弦及其和较13项的表格。郭书春认为,《详解九章算法》的本文为贾宪所著的《黄帝九章算法细草》,书中只有以小字排印的注文为杨辉所著。如此,则在11世纪,中算家已经归纳出这13项的名目。顾应祥在其《勾股算术》中引述了这13个名目。各书中所列13项的名称并不完全一致,举例来说,杨辉的后3项与李锐所列的后3项并不完全相同。如李锐书中的勾和和在杨辉书中被称为弦和和(弦与勾股和的和)。关于贾宪《黄帝九章算法细草》的成书年代,参见:郭书春,中国古代数学. 15.

② 为了能够罗列出所有已知勾、股、弦及其和较的13项中的2项求解勾股形的问题,李锐遵循两条原则,他首先按照勾、股、弦、勾股和、勾股较、勾弦和、勾弦较、股弦和、股弦较、勾和和(勾与股弦和的和)、句较和(勾和股弦较的和)、勾和较、勾较较13项的顺序选择第一个已知条件,然后,他依次以13项中他所选定为第一个已知条件之后的各项为作第二个已知条件,得到所有含第一个已知条件的组合。

③ 李锐. 目. 勾股算术细草. 1a.

④ 同上.

093

0

草曰：立天元一为句，自之得0为句幂，又置句股和 93，以天元

1

8649　　　　　　8639

句减之，得 93 / −1 为股，自之得 −186 为股幂，二幂相加得 −186 为弦幂

1　　　　　　2

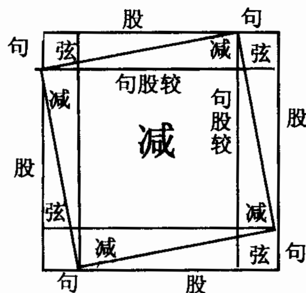
(寄左)，又置弦 75，自之得 5625 为同数，与左相消，得下式：

−3024　　　−1512

186，半之，得　93，开平方得 21，即句也。依术得股，合问。

−2　　　　　1

解曰：和幂内有句股相乘幂四，较幂一。弦幂内有句股相乘幂二，较幂一，相减，余句股相乘幂二，半之为句股相乘幂一，又为句与句股和相乘幂内少却一句幂，故以和为从一为虚隅。①



上题相当于，已知弦 75，勾股和 93，求勾、股。答案：勾为 21，股为 72。文中的术为解该问题的一般形式的方程式，如以 a 表示勾，b 表示股，c 表示弦，以 x 表示未知数，该术文即为如下一元二次方程：

$$-x^2+[(a+b)+a]x-\frac{(a+b)^2-a^2}{2}=0$$

解此方程，求得的为勾。以勾减勾股和便可得到股。文中的草为以天元术求得术文中的公式的过程，相当于：设 a 为 x，自乘为 x^2。以勾 a 减勾股和 $b+a$(已知为 93)，得 $93-x$ 为股。将该式自乘，则得股的平方：$x^2-186x+8649$。将勾的平方与股的平方相加，得：$2x^2-186x+8649$，为弦的平方。已知弦为 75，75 的平方为 5625，该数与 $2x^2-186x+8649$ 应该是相等的，相消，便得到 $-2x^2+186x-3024=0$，将各项除以 2，便得到 $-x^2+93x-1512=0$，解方程，得 21，即是所求勾。

① 原文中的数字为筹算符号，本书中为方便读者阅读，改为阿拉伯数字。关于筹算符号及天元术方程表达式，详见本书第 5 章。见：李锐．勾股算术细草．11a—b.

书中的解相当于:在勾股和的平方内(图中外面的大正方形)有四个面积为勾股相乘积的长方形(四边的四个长方形)及一个勾股较(勾和股的差)的平方(中间的正方形)。弦幂(图中斜的正方形)内有两个勾股相乘构成的长方形(四个勾股形可以合成两个长方形)和一个勾股较的平方。以勾股和的平方减去弦的平方,便得到两个面积为勾股的乘积的长方形。除二,即为一个勾股相乘积。勾股相乘积又等于勾乘以勾股和减去勾的平方(这也可以从图中看得出来)。可见术文中的方程式是正确的。此解为一借助图示的严谨的证明过程,是中国古代证明勾股恒等式及其它几何问题的常用方法。

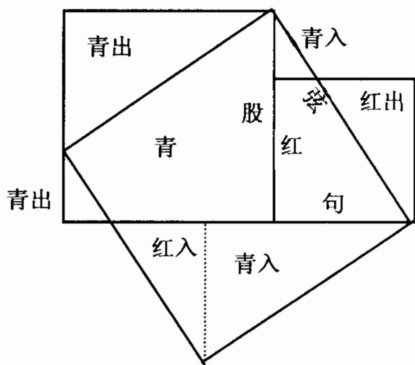
《勾股算术细草》中的绝大部分算题均具有与上题完全一致的结构,包括含具体数目的问题、答案、相当于一个高次方程的术文、一个代数推导的算草及一个带有图示的“解”。我们可以看出,题中的“解”实际上是算法正确性的几何证明。此处,我们要强调的是,《勾股算术细草》中的所有证明都是以勾股定理为基础的,这样,只要勾股定理正确性得到了保证,《勾股算术细草》便构成了一个完备的、严谨的勾股算法系统。那么,李锐是如何证明勾股定理的正确性的呢?《勾股算术细草》的第一题便是勾股定理的证明。李锐原题为:

今有句二十一,股二十八,问弦几何

答曰:三十五。

术曰:二幂相加为实,开平方得弦。

草曰:置句二十一,自之得四百四十一为句幂,又置股二十八,自之得七百八十四为股幂,二幂相加得一千二百二十五为实,开平方得三十五,即弦也,合问



解曰:句自乘为朱幂,股自乘为青幂

令出入相补恰成一段弦幂,故二幂相加开方得弦也①。

李锐“解”的含意为:勾的平方等于红正方形的面积,股的平方为青正方形的面积。青、红正方形所出的面积与所入的面积相消,正好可以构成与弦

① 李锐,勾股算术细草. 7a.

的平方相等的面积。这段文字几乎是原文照搬了刘徽《九章算术注》中勾股定理证明的原文①。传本《九章算术》中不含图示,上图是李锐依刘徽的注文构造的。②需要注意的是,与前文所引的问题不同,李锐此处所给出的"解"并不是一个严谨的证明。且在上述证明中,如果没有平行线的概念及与平行线相关的定理,我们很难严格证明相应的出、入部分的面积是相等的。然而,没有文献表明,中国古代数学中曾发展出平行线的概念和理论。在第二章中,我们看到,梅文鼎在其勾股定理证明中提到了平行的概念并很可能用到相关理论。李锐曾研究过《几何原本》和梅文鼎的著作,他应该知道利用全等三角形理论及平行线的性质,可以给出上述证明的严谨的表述形式。即便李锐没能找到以平行线理论解释图中出、入的图形的面积确实相等的方法,他还可以直接引用《几何原本》中的勾股定理证明来保证其基本公式的正确性。徐光启在《句股义》中正是这样作的。但李锐并没有选择这两种方法中的任何一种,其间的原因很可能与李锐写作该书的动机有关。李锐在《勾股算术细草》序中称:

> 为算之道,要须会通大义。枝枝节节而求之,虽合数,不足为法也。岁丙寅,仁和许子云庵(乃蕃)、南昌万子小廉(启昫)从余游,兼及句股算事。讲论之暇,作此卷示之。俾知随问立术,有一以贯之者耳③。

李锐简单地说,他作此书的目的是为了让他的学生知道"随问立术,有一以贯之者",随问立术为中国传统数学著作的主要著述方式。从表面上来看,中国传统数学著作中的算题似乎是零散的,以实践问题的形式表现的,且一般来说,每题的答案和术文亦只对该题有效,书中很少给出一般的方法,亦不讲明算法的理论基础。然而,通过认真分析,我们可以看出,像《九章算术》、《数书九章》、《益古演段》、《测圆海镜》及《四元玉鉴》等书是有其内

---

① 刘徽关于勾股定理的注文为:"句自乘为朱方,股自乘为青方.令出入相补,各从其类.因就其余不移动也,合成弦方之幂。"刘徽.勾股术注.九章算术.卷9.1b.

② 李潢的《九章算术细草图说》中包含同样的图形。据刘钝研究,李锐曾将其《勾股算术细草》的初稿寄送李潢,故李潢很可能在其书中采用了李锐构造的图。详见:刘钝,略论李锐的数学研究方法——以方程正根的判定为例.255—262.郭书春认为,《九章算法细草图说》中的勾股定理证明图,也即李锐所构造的图形是符合刘徽《九章算术注》原意的。见:郭书春.《九章算法细草图说》摘要.

③ 李锐.勾股算术细草序.勾股算术细草.1a.

在的体系及理论基础的。刘徽的《九章算术注》更是以一些基本算法为基础对《九章算术》中的算法给出了系统的证明与分类。李锐认为，学算“要须会通大义”，此“大义”及后文中李锐所称的“一以贯之者”当是指算法的理论基础。正基于此，我们认为，李锐必定理解了中国传统数学著作的特点及其中算法体系的结构。所以，他很可能不能同意徐光启在《句股义》序中的观点：对于勾股问题，《九章算术》“第能言其法，不能言其义”①。所以，李锐虽然只简单地称他写作《勾股算术细草》的目的是为了让他的学生能够理解传统的“随问立术”的著述方式，亦有其“一以贯之”的理论基础，但他著述的目的很可能是为了以勾股术为例揭示传统数学的理论体系，为了达到这一目的，他在全书中遵循完全一样的推理模式及写作方式，亦基于此，他构造出完备的勾股问题的体系及正文中不讨论的算题的求解方法及其证明。由此，他便可以展示给读者，中国传统勾股术自身有着一般的理论基础。这很可能正是他不愿使用西方的概念和理论进一步阐述勾股定理的证明或引用《几何原本》中的勾股定理证明的原因。

前面的两章中，我们已经看到，为了宣传西方学术知识的可信性，徐光启著成《句股义》，以证明只有在西方几何学传入之后，中国传统勾股术的理论基础才能得到阐明，西方几何学可以涵盖传统勾股术。入清之后，拒绝西方宗教的梅文鼎提倡“几何即勾股”说，试图反徐光启之道，以勾股术去诠释西方几何学。梅氏主张中、西会通，所以，他并不介意利用西方的几何概念和理论。李锐并没有表现出欲以传统方法去涵盖西方数学的意图。他只是以纯粹传统的方法和术语去阐述传统的数学理论。这既可以被解释成源于其拒绝西学的态度，亦可以说是受到了乾嘉学派考据方法的影响。②

但即便如《勾股算术细草》这样的一部属传统数学范畴的著作，我们还是可以看出西方数学影响的痕迹。一般来讲，中国传统数学著作中很少含有算法正确性的证明。对一部数学著作中的方法的检验通常是由后来的学者在注解中完成的，刘徽对《九章算术》中的算法的证明即是以注文的方式给出的。宋元数学家李冶的《益古演段》与《勾股算术细草》有着相似的结构，但李冶该书亦是在更早的一部《益古集》的基础上作的，他的证明也具有注释的性质。即便在西方数学传入之后，杜知耕等亦未完全理解《几何原

① 徐光启，句股义. 1b.

② 关于李锐对西方数学的态度及其态度的转化过程，详见本书第五章。

本》演绎体系的意义,他认为原书过于繁琐,故在其《几何论约》中删去部分证明及命题,破坏了原书的结构。李锐显然意识到了系统的、理论性的数学研究的重要性。所以,他才会颇费周折地构建出上述完备的勾股算术系统,并在全书中遵循同一推理、证明及表述形式,以证明中国传统数学方法有着统一的理论体系。但为了对抗欧洲的几何学,他为其著作特别设计了完备的、系统的及严谨的著作体系,因而使其带上了欧洲数学著作的特点。接受西方的数学思想亦为中国数学西化的一个重要方面。

乾嘉时期集天文、数学史研究之大成者为我国历史上第一部专为数学家和天文学家编撰的大型传记集《畴人传》。《畴人传》,共46卷,1810年出版。书中含中国历史上至当时的天文、数学家275人,欧洲天文、数学家及在华传播天文、数学知识的传教士41人的传记。各条传记通常包含传主的生平、天文数学方面主要著作的摘要介绍和评述、对传主工作的评论。该书不仅是一部传记集,也可以被看作是一部以人为纲的大型天文、数学史著作。书中征引的材料都注明了出处。该书署名为阮元所作,但史学家认为,其中绝大部分内容出自李锐。[①]《畴人传》的编撰很可能与当时学术史的研究有关。黄宗羲的《宋元学案》和《明儒学案》可说是这方面的首创性著作。但黄宗羲并没有为数学家立传,且二十四史中也从来未给数学家任何位置。乾嘉后期,数学开始被视为学术,与数学地位的提高相应,数学家也成为学术集团的当然成员。如此,为自古被史籍所忽视的一类学者立传便成为一件自然的事情。《畴人传》的编撰确实可以被视作数学家和天文学家学术地位提高的一个证据,但却并不能说明数学家已有"明确的科学家的特殊自我形象以及同属于一个知识团体的意识"[②]。实际上,当时的数学家是学者中的一部分,对于其他学者来说,他们很可能被视为是尤其精于一个特殊的学术分支的人[③]。随着考据学的深化,乾嘉学者的研究趋于专业化,博学的通儒虽然仍受到广泛的推崇,但专精一艺的学者并未受到其他学者的歧视。

---

① 阮元称,李锐及周治平均参与了《畴人传》的撰写。傅祚华认为,全书正文应出自李锐之手,而各条传记后面的论为阮元自定。见:傅祚华,畴人传研究. 219—224. 通过对《畴人传》与现存李锐的著作及相关文献的对照,严敦杰先生发现书中很多内容引自李锐著述及信函,从而认定"《畴人传》实为李锐编订,阮元略加删润,冠阮元名而为之刊行,周治平当仅校字而已"。严敦杰. 李尚之年谱. 455.

② 乔纳森·波特著. 中国近代早期的科学界. 王冰译. 科学史译丛. 1983. 第3期. 7.

③ 参见:詹嘉玲著. 清代初期与中期的数学教育. 田森译.

对于西方知识,《畴人传》的态度是,在强调"西学中源"的前提下,提倡"考证古法之误而存其是,取西学之所长而去其所短"①。本此宗旨,书中根据传教士所译书籍中介绍的内容对他们提到姓名的西方数学家和天文学家作了尽可能详细的介绍。书中亦立传介绍参与译介西方天文、数学书籍的来华传教士的工作。《畴人传》中并不讳言西方天文学和数学知识相对于明代中国数学和天文学知识的所具的优势,并对学习西方方法的徐光启、李之藻等给出很高的评价。②但同时,书中对贬低古学及过分赞誉西学的态度则取严厉的批评态度。利玛窦传的附论中曰:"自利玛窦入中国,西人接踵而至,其于天学皆有所得,采而用之,此礼失求野之义也。而徐光启至谓利氏为今日之羲和,是何其言之妄而敢耶?③"对于汤若望的《西法表异》,《畴人传》的作者表示出强烈的反感情绪,称"若望以四十二事表西法之异,证中术之疏。由是习于西说者,咸谓西人之学非中土之所能及。"在详论西方的天文方法亦是逐渐进步的,且不可能是永无差错之后,《畴人传》中继续称:"世有郭守敬其人,诚能遍通古今推步之法,亲验七政运行之故,精益求精,期于致当,则其造诣当必有出于西人之上者。使必曰西学非中土所能及,则我大清亿万年颁朔之法,必当问之于欧罗巴乎?此必不然也,精算之士当知所自立矣。④"《畴人传》中表现出来的对西方天文、数学的态度与乾嘉学派总体上对西学的态度是一致的。虽然他们大力提倡古学,但并不完全否认西学的优越性,亦对学习西学之长取积极态度。此亦与乾嘉时期数学研究的总体情况是一致的。⑤

1840年,罗士琳撰成《畴人传续编》6卷。《畴人传续编》的体例及书中表现出的对西方数学的态度均与《畴人传》相似。1884年,数学家华世芳著成《近代畴人著述记》,书中节要介绍了33名数学家和天文学家的著作。1886年,诸可宝编成《畴人传三编》7卷,记述了110名数学家的工作和生

---

① 阮元.王锡阐.畴人传.卷35.16b.

② 《畴人传》中称:"西人书器之行于中土也,之藻荐之于前,徐光启、李天经译之于后。是三家者,皆习于西人,亟欲明其术,而惟恐失之者也。当是时,《大统》之疏阔甚矣,数君子起而共正其失,其有功于授时布化之道,岂浅小哉?"见:阮元.李之藻.畴人传.卷32.5a—16b.

③ 阮元.利玛窦.畴人传.卷44.7b.

④ 阮元.汤若望.畴人传.卷45.13a.

⑤ 关于《畴人传》,详见:傅祚华.畴人传研究.

平。1898年，黄钟骏父子又编成《畴人传四编》12卷。①

乾嘉时期的数学研究亦并非仅限于古籍的整理及传统数学知识的深化。代数方法及三角学研究为乾嘉时期最为活跃的两个数学专题，在这两个课题中，传入的西方数学成果得到了较为全面的理解及深入的研究。我们将在第五章和第六章中分别讨论代数学和三角学在中国的传播问题。

到18世纪末，数学研究已经成为一种风尚。据《清儒学案》所载，嘉庆年间，受焦循器重的徐复在参加省试时与黄承吉(1771—1842)同寓，黄氏"诘以九章算法"，徐"不能答，以为耻。典衣购算书归，就郑堂相质问，未及一年，弧三角之正弧、垂弧、次形矢较诸法皆能言其所以然矣"②。

第三节　清中叶的数学研究

清代中叶，中国数学的研究沿两个方向发展。一方面，一些传统数学著作被重新发现，中算家们在校勘古代算经和复原传统算法方面取得了很大成果，并在研究上取得了一些新的进展。另一方面，明末清初传入的西方数学知识得到了深入的理解和进一步发展。史学家通常把从事两方面研究的数学家分别称为中法派和西法派。然而，数学方法的来源或者并不是清代中叶数学家选择他们研究方法的唯一标准，即便是同一个数学家，他们对中、西数学的态度也往往不是一成不变的。这给我们分析他们在中国数学西化历程中所扮演的角色带来很大困难。事实上，无论一位数学家是属于中法派还是西法派，他都处于中国数学西化历程的一个阶段并在这一历程中扮演了一定的角色，这一点则是确定无疑的。清代中期出现了一批在数学方面有着深入研究和出色成果的学者和数学专家，其中最著名，亦最为中算史家所乐道者，为史称"谈天三友"的焦循、李锐和汪莱。③

焦循(1763—1820)，字理堂，一字里堂，江苏甘泉人，为扬州派经学的主要代表人物之一。1801年中举，但终生未仕，主要靠课读、编写志书及担任幕僚为生。他一生大部分时间都在家乡读书著述。焦循是一位通儒，他"博

---

① 详见：傅祚华．畴人传研究．

② 徐世昌，徐复．清儒学案．海王屯古籍丛刊本．北京：中国书店．卷118．23a．

③ 关于"谈天三友"的构成，有三种说法。一为"焦循、李锐、汪莱"说，一为"焦循、李锐、凌廷勘"说，一为"李锐、汪莱、凌廷堪"说。关于这三种说法的来源与分析，详见：吴裕宾．"谈天三友"易为哪仨?．谈天三友．1—8．

闻强记，识力精卓，每遇一书，无论隐奥平衍必究其源，以故经、史、历、算、声音、训诂，无所不精”[①]。1787 年，焦循开始学习数学[②]。1788 年他研究《礼》。焦循的祖父和父亲都曾研究过《易》，他自己早年也学习过易学。自 1813 至 1818 年间，他先后完成出版了《易通释》、《易图略》、《易章句》、《周易补疏》、《易话》、《易广记》六部《易》学的著作。其前三种合成《雕菰楼易学》。从 1817 年至 1820 年间，焦循主要从事《孟子》的注释，撰写《孟子正义》，该书三十卷，未及完稿，焦循便已去世，书中最后的部分由其子焦廷琥及兄弟焦征代他完成。该书为清朝《孟子》研究的重要著作。1787 年，顾凤毛（1762—1788）赠送焦循一部《梅氏丛书辑要》，从此，焦循开始学习数学。焦循撰著数学著作的时间主要集中在 1794—1801 年间。这段时间又可以分成两段。1794—1796 年间，他的工作主要集中在平面三角学和弧三角学的阐释方面，撰成《释弧》（1795）、《释轮》（1796）、《释椭》（1796）。《释弧》是在梅文鼎的《弧三角举要》、《环中黍尺》及戴震《句股割圆记》的基础上，讨论球面三角形的解法；《释轮》分析传入的第谷天文体系中的均轮、次轮；《释椭》解释法国传教士传入的与卡西尼（Cassini，1625—1721）天文学说相关的椭圆问题。此间，焦循开始撰著其重要数学著作《加减乘除释》（1799）。自 1799 年至 1801 年间，他主要从事天元术和增乘开方法等代数方面的研究，撰成《天元一释》（1799）、《开方通释》（1801），分别阐释天元术和增乘开方法。此后，他潜心研究《易》学和《孟子》，仅于 1814 年著成一部数学著作《大衍求一术释》，解释秦九韶的大衍术。[③]该书与他当时正在进行的《易》学研究密切相关。

《加减乘除释》是 18 世纪最为重要的数学著作之一。他在书中称：

---

① 徐世昌．里堂学案．清儒学案．卷 120．1a．

② 焦循自称：“乾隆丁未，余始习九九之术”．《易图略》．

③ 大衍术为一次同余式的数值解法。现存中国关于同余式数值解法的最早记载是成书于约公元 5 世纪的《孙子算经》卷下 26 问“物不知数”问题。在南宋数学家秦九韶（1202—1261）所著《数书九章》（1247）中，一次同余问题得到了系统的整理，并形成一套完善的理论和算法，即，“大衍总数术”。一次同余问题可应用于历法的上元积年计算和《周易》中筮法的计算。“大衍”一词正源自《易·系词传上》中“大衍之数五十”一节。“大衍求一术”相当于根据给定的模计算乘率的方法。是“大衍总数术”中最关键的一步（秦九韶：《数书九章》，宜稼堂从书本，卷一）。关于“大衍术”，参见：钱宝琮，《求一术源流考》，《钱宝琮科学史论文选集》，22—36；钱宝琮，《秦九韶〈数书九章〉研究》，《钱宝琮科学史论文选集》，530—578；袁向东，李文林．《数书九章》中的大衍类问题及大衍总数术．关于清朝研究大衍术的情况，参见：王翼勋，清朝学者对“大衍总数术的探讨．明清数学史论文集．317—333．

嘉定钱溉亭先生塘谓，《说文》一部之中，声无统纪，因取许氏书，离析合并，重立部首，系之以声。其书虽未成，迄今讲《说文》者，颇宗其意以著书。循谓，古人之学，期于实用，以乂百工，察万品，而作书契，分别其事物之所在，俾学者案形而得声，若夫声音之间，义蕴精微，未可人人使悟其旨趣，此所以主形而不主声也。惟算亦然。既有少广、句股，又必指而别之曰方田、曰商功，既有衰分、盈不足、方程，又必明以示之曰粟米、曰均输，亦指其事物之所在，而使学者人人可以案名以知术也。然名起于立法之后，理存于立法之先。理者何？加、减、乘、除四者之错综变化也。而四者之杂于九章，则不啻六书之声杂于各部。故同一今有之术，用于衰分，复用于粟米；同一齐同之术，用于方田，复用于均输；同一弦矢之术，用于句股，复用于少广。而立方之上，不详三乘以上之方；四表之测，未尽三率相求之例。踵其后者，又截粟米为贵贱差分，移均输为叠代互徵，名目既繇，本原益晦，盖九章不能尽加减乘除之用，而加减乘除可以通九章之穷。①

焦循认为，《九章算术》中的算法名称，并非是依据各法的数学原理规定的，而是为了实用的目的，以其能解决的实际问题而被指定的。然而，算法是在其被命名之前就已经被发明了，算法的原理则更存在于算法被发明之先，而一切算理都是由加、减、乘、除四种运算错综变化而来。《九章算术》中的算法名称虽然使得不精于数学原理的人可以更方便地应用这些算法，但却掩盖了这些算法的本质。后世数学家们进一步分化《九章》中的算法，又给出一些新的名称，使得算法命名系统更为繁琐，也使得其中的数学原理更不易被人理解。焦循在《加减乘除释》中所做的，正是以最基本的加、减、乘、除四则运算来重新阐释和归纳《九章算术》及《缉古算经》等其它传统数学著作中的数学方法，以彰显这些算法的原理。不仅如此，焦循抛弃了传统数学著作以具体数目设题的编撰方式，在全书中利用抽象的甲、乙、丙、丁设题，这样，他所给出的命题都是一般性的，相当于现代数学中的定理。焦循对书中涉及的算法均给出定义性的解释，并一般性地给出加法的交换律、结合律，乘法的交换律、结合律及乘法对加法的分配律五条基本运算法则，利用这些基本法则及图示法等，焦循对书中的所有命题都给出了证明性的解释。虽然

---

① 焦循．加减乘除释．卷1．1a—2a。

这些解释并不都是严谨的证明，但焦循显然要验证并解释这些命题的正确性。由此，《加减乘除释》全书构成了一个以加、减、乘、除四则运算为基础的一般性的符号运算系统。焦循在其序言中称，他的工作与钱塘以声韵部首重新编辑和解释许慎《说文解字》的工作是一致的。这样，焦循之著《加减乘除释》是受到了经学研究方法的影响的。然而，从焦循这一段的数学工作来看，他研究的主要为西方数学内容，由此，他对传统数学方法的重新分类亦很可能是受到西方数学著述方式及梅文鼎等会通中、西的方式的影响。前文已述，法国传教士傅圣泽曾向康熙帝介绍西方符号代数方法，因康熙帝无法领会符号代数的优越性，遂使该法无缘在中国流传。焦循出于对一般性数学方法的追求而独立构造出符号算术系统和法则，由此可见，乾嘉时期的数学家完全有能力理解符号代数方法。

焦循是执清朝《易》学牛耳的学者之一，他对天文、数学的深入研究为其《易》学成就打下了基础。焦循自述：

> 循承祖、父之学，幼年好《易》。忆乾隆丙申(1776)夏，自塾中归，先子问曰："所课若何？"循举小畜彖辞，且诵所闻于师之解。先子曰："然所谓'密云不雨，自我西郊者'，何以复见于小过之六五？童子宜有会心，其思之也"。循于是反复其故，不可得。……，悒悒于胸腹中，不能自释。闻有善说《易》者，就而叩之，无以应也。乙巳(1785)，丁忧，辍举子业，乃遍求说《易》之书阅之，于所疑皆无发明。嘉庆九年甲子(1804)，授徒家塾，念先子之教，越几三十年，无以报命，不肖自弃之罪曷以逃免？……。循既学洞渊九容之术，乃以数之比例求《易》之比例，向来所疑渐能理解。初有所得，即就正于高邮王君伯申，伯申以为精锐，凿破混沌。用是愤勉，遂成《通释》一书。丙寅以质歙县汪君孝婴，南城王君实斋，均皆蒙许可。①

也就是说，焦循自幼好《易》，但由于无法解答其父的《易》学问题，他积思近30年，没有得到任何结果。其间，他开始学习和研究数学。1804年，他将数学应用到《易》学研究之中，终于得到突破性的进展。所以，对于他的《易》学研究来说，数学实在是起到了很大的作用。由此，我们便可以解释何以他虽家传《易》学，却直到50岁后才开始在这方面有所著述，而在此后的5年之内，他完成了6部相关著作。

---

① 焦循，易通释叙目．易通释．雕菰楼易学．

焦循之子焦廷琥亦研究经学及数学。李冶的著作《测圆海镜》和《益古演段》中未曾给出详细的开方方法，且开方结果与当时通行的开方法所得结果不完全相符。而焦循通过研究秦九韶的《数书九章》，理解了增乘开方法，并撰成《开方通释》。他便令其子焦廷琥用增乘开方法重新演算《益古演段》中的开方问题。廷琥据其演算结果著成《益古演段开方补》一卷。

汪莱(1768—1813)，字孝婴，号衡斋，安徽歙县人。15岁补博士弟子，1807年以优贡生考取八旗官学教习。后应御史徐国南奏荐，汪莱入国史馆，参与续修《天文志》和《时宪志》的工作。1809年书成，以本班教职选授石隶县训导，后卒于官。[①]汪莱是一位博学的经史学家，曾撰《十三经注疏正误》、《说文声类》等经学著作。他"长身玉立，须眉秀发，读书过目辄记忆，《十三经注疏》几于能口举其辞，而尤精于天文历算之学"[②]。汪莱青年时非常崇敬他的同乡先辈江永、戴震、金榜、程瑶田等。但"其学实自得。不由师授。弱冠后读书于吴葑门外，数年苦心冥索，尽得中西之秘。亦未尝与吴中师友相接"[③]。据汪莱自称，他是从1789年起开始研究数学的。1794年，汪莱与入省参加乡试的焦循相识，二人就此结为益友。[④]1798年，焦循在与李锐的信中推荐汪莱，曰："歙县汪孝婴，精思冥索，往往得未曾有。"[⑤]汪莱撰著的数学方面的书籍多成于1792至1804年间，这些书籍大都被收入《衡斋算学》七册之中。

《衡斋算学》第一册和第四册的前半部分是关于三角学的。在第二册中，汪莱针对《数理精蕴》及梅瑴成所著《增删算法统宗》中提出的一个已知勾股积与勾弦和求勾的三次方程解法，指出该方程有两解，进而设计了另一个算法。第三、六两册探讨割圆问题，书中，他讨论了梅瑴成《赤水遗珍》中记载的杜德美传入的3个三角函数幂级数展开式。《衡斋算学》第五、七册专论方程论。汪莱另有两部篇幅很短但在中算史上显得非常奇特的数学著作，《叁两算经》和《递兼数理》。

《叁两算经》是一部探讨进位制问题的著作，该书被录入《衡斋遗书》卷

---

① 罗士琳．汪莱．畴人传续编．卷50．18a—b．

② 夏炘．衡斋遗书跋．衡斋遗书．8a。

③ 焦循．石埭儒学训导汪君孝婴别传．雕菰楼集．卷21．15a．

④ 此据朱家生，吴裕宾《焦循年谱》(315—216)．汪宜楷在《汪莱年谱》中提出焦、汪始交于1791年，但并未给出证据。见：汪宜楷．汪莱年谱．谈天三友．336．

⑤ 焦循．致李锐．转引自：朱家声，吴裕宾．焦循年谱．谈天三友．319．

二，未注著作年代。《衡斋遗书》卷一成于1792，卷三成于1793，故，《叁两算经》很可能是1792—1793年间的作品。汪莱在书中《原始》部分称：

端居观物，情契先天。见象数之纷纭，其可断者不外乎参两，乃著之则以示来者①。

在《参两数说》中，汪莱又称：

一、三、五、七、九皆奇也，二、四、六、八、十皆偶也。奇皆天，偶皆地，而圣人曰参天两地而倚数，独举参、两言之，其理先儒备言焉。至其间妙用，又有不可不知者。盖古人之算，不若今日尽立数于十也，审其法与数之宜而已。②

汪莱认为，古代很可能多种进位制并用，其作《叁两算经》与《易》学有关。书中，汪莱指出，以任何数为基底的进位制都是遵循"逢身进位"的原则。汪莱给出了二至九进制的乘法表，他还讨论了非十进位制数字的除法问题。③此书是现存传统数学著作中惟一讨论进位制问题的作品。

《递兼数理》是讨论组合问题的著作。该书被列于《衡斋算学》第四册后半卷，未注著作年代。汪莱在第四册中称："已未(1799)之夏，吾宗岫云出游，欲构难题数端，往诘算博士，因为制此条目。旧著《递兼数理》亦设问之奇者也，合为一册，以广赠算师。"可见《递兼数理》成书于1799年之前④。书中，汪莱论述了组合的一些性质和计算方法。⑤通过图解的方法，汪莱将组合问题与传统垛积术结合起来。为此，他利用借根方的表述方法给出了三角堆，也即自然数列1，2，3，……，求和公式的一般表达式。⑥虽然传统垛积术已有很长的发展史，并取得过很多出色的成就，但这很可能是最早的有限级数求和方法的一般表达式的记载。⑦

汪莱在《衡斋算学》第二册讨论相当于形如，$x(p-x)^2=q$，$(p,q>0,0$

---

① 汪莱．原始．叁两算经．衡斋遗书．卷2．1a．

② 汪莱．叁两数说．叁两算经．衡斋遗书．卷2．2b—3b．

③ 汪莱．叁两算经．衡斋遗书．卷2。

④ 《衡斋算书》各册基本上是依著述年代编排的，其第二册和第三册均作于1798年，故，李兆华先生估计该书作于1798—1799年间，这一推断是合理的。李兆华．汪莱《递兼数理》、《参两算经》略论．谈天三友．228．

⑤ 关于汪莱的《参两算经》和《递兼数理》中的数学内容，详见：李兆华．汪莱《递兼数理》、《参两算经》略论．谈天三友．227—237．

⑥ 汪莱，递兼数理．衡斋算学．第四册．6b—12b．

⑦ 关于垛积术及其在清朝的发展情况，详见本书第七章．

$< x < p$)的方程正根的个数问题,其中涉及《数理精蕴》中“有句股形面积、有句弦和(或股弦和)求句股形”的问题。《数理精蕴》中将该问题总归结为一个特殊的三次方程的求解问题,但书中只给出了一个正根。汪莱指出,该题可有两个正根。这样,就有两个不同的勾股形满足上述条件。汪莱还进一步总结出两个勾股形勾弦差、勾弦和之间的一个关系式,该式实际上为一个高阶不定方程。[①] 19世纪以后,此类问题被发展成整数勾股形专题,成为清代末年的一个非常活跃的课题。汪莱另一项重要的数学贡献是他对方程论的研究。我们在下文中讨论汪莱和李锐的关系时会提到他的这项工作。本书第五章还会详细分析其研究的具体内容和研究基础。

汪莱留下的数学著作虽然不多,且各书篇幅亦不大,但他的每部著作都有着独特的成就。汪莱在数学研究方面的独特性很可能与他的性格有关。焦循曾论汪莱曰:“天资敏绝,性能攻坚,他人翻覆再三未能理其绪,而孝婴目一二过,默识静会,已洞悉其本原,而贯达其条目,是非间隙毫发莫遁。人所言不复言,所言皆人所未言,与人所不能言。故其著述无多卷,而简奥似周秦古书。”[②]同时,他恃才傲物,从前引《衡斋算学》第四册序中所述,他为了诘难算学博士而故意构造难题的作法便可见其性格之一斑。很可能由于这样的性格,使得汪莱并不能与当时的一些学者融洽相处。当时经学和数学研究的主要赞助人之一,对焦循、李锐的工作十分肯定和支持的阮元与汪莱似乎并不十分相得。

李锐(1765—1814),字尚之,号四香,元和县人。李锐“幼开敏,有过人之资,从书塾中检得《算法统宗》,心通其义,遂为九章八线之学”[③]。1788年,李锐成为元和县生员。1789年,钱大昕主讲紫阳书院,李锐在书院中向钱氏问学。钱大昕“生平未尝轻许人,独于锐则以为胜己”[④]。钱氏晚年“日以翻阅群书校仇为事,遇有疑义辄与锐商榷”。李锐也由此开始进行系统的经、史及数学研究,并成为当时颇有名气的学者。然而,李锐的经、史、数学才能并不能使他衣食无忧。李锐多次应试,但均落榜。平生都是依靠协助阮元、张敦仁等著、校书籍等维持贫困的生活。在紫阳书院中,钱大昕教授

---

① 李兆华. 中国数学史. 291—293。

② 焦循. 石埭儒学训导汪君孝婴别传. 雕菰楼集. 卷21. 15a—b.

③ 阮元,李尚之传. 研经室集. 45b-46a.

④ 罗士琳,续畴人传. 卷50. 2b。

李锐三角学及第谷和开普勒天文学中的有关均轮、次轮、椭圆轨道等知识，后又向李锐出示了其所著的《三统术钤》一书，并指示李锐，数学为儒者之学，不仅要习于数，还要明其理，不要囿于今而不通乎古。"运算如飞，下子不误"并不是儒家学者从事数学研究的目的①。李锐以后的数学研究正是按照钱大昕的这个指示进行的。

前文我们已经介绍了李锐在整理古籍及天文、数学的历史方面的研究。除上文中介绍的著作以外，他还撰有《方程新术草》、《开方说》等数学专著，在恢复天元术和开方术及方程理论研究方面取得了重要的成果。②

共同的学术兴趣及相似的学术水平使得焦循、汪莱、李锐三人结成"善相资，疑相析"的益友。③从他们之间的关系，我们也可以看出 18 世纪末至 19 世纪初中国数学家研究和生活的一个侧面。代数研究可以算是联系他们三人的纽带，同时，也是汪、李最终产生矛盾的原因，所以，我们对他们在这方面的工作也穿插着做一简单介绍。

1795 年，焦循将所著《释弧》初稿寄送钱大昕。钱大昕很快为焦循书写了序文，焦循致函钱大昕致谢，同时，焦循在撰写《释轮》的过程中觉得对梅文鼎和江永关于天文体系均轮、次轮的论述产生怀疑，他在信中将其疑问述诸钱大昕以求正。钱大昕将这封信转给李锐处理。1796 年二月十三日，李锐给焦循复信，并对焦循信中提出的问题给出自己的见解。④钱大昕另附一信致焦循，向他介绍李锐。焦循很快给李锐回信，1796 年三月二十五日，李锐给焦循写了第二封信，就是在这封信中，李锐向焦循叙述了他的"三大愿"。是为焦循与李锐定交之始。此后，二人鸿雁频传。五月初十日，李锐

---

① 李锐自称："忆自辛亥之冬，锐肄业紫阳书院，从先生受算学。"先生始教以三角、八线、小轮、椭圆诸法，复引而进之于古，手是书见授而诲之曰："数为六艺之一，由艺以明道，儒者之学也。自世之学者卑无高论，习于数而不知其理，囿于今而不通乎古，于是儒林之实学遂下同于方技，虽复运算如飞，下子不误，又曷足贵乎？刘歆三统术为步术最古之书，汉末大儒若郑康成辈咸通其学。是书衍说，词虽浅近，然循是而习之，一隅三反，则古今推步之原流不难一一会通其故也。"锐谨受教，识之不敢忘。十年以来，专力斯学，而材质驽钝，无所成就。上玷师门，私心恒窃窃自惧。今浙抚阮公，洞明象数，一见是书，叹为得未曾有。因广先生嘉惠来学之心，特开雕于武林节署。以锐于是书仰钻有素，命以校字之役。既卒业，辄举先生所以教锐之语，识于简末，愿与海内甄明九数，有志稽古之士，共寻究焉。嘉庆辛酉冬十二月癸卯朔，元和门人李锐谨跋．李锐．三统术钤跋．嘉定钱大昕全集．第 8 册．180—181．

② 详见本书第五章．

③ 黄承吉．加减乘除释序．加减乘除释．里堂学算记．1a—b．

④ 李锐．释轮序．释轮．1a—2b．

又给焦循写了第三封信,信中李锐表现出他对代数学的兴趣。李锐一面指出来自欧洲的借根方是超出传统方程术的成就,并指出,由于只有梅瑴成一人精通借根方,所以该术"犹未大显"。同时他急切地表示希望读到《数书九章》、《测圆海镜》和《益古演段》三部含传统代数方法的著作。然而,当时李锐还是认为借根方较天元术更为优越。他读上述三部著作,与他的三个愿望有关。第一,郭守敬的《授时历》中用到天元术;第二,李锐要对古代的算书和算法做整体上的研究。后焦循在阮元处得到这三部算书,"急寄尚之",李锐对此非常感激。此后,他帮助阮元校注了这些书籍。1800 年,李锐与焦循一起在阮元节署,二人一起研究天元术和增乘开方法。1801 年,焦循又向汪莱出示秦九韶及李冶的数学著作。汪莱与焦循于 1794 年"订交于秦淮旅舍",此后近二十年间,"虽远隔数千里,有所得必邮寄,相与论订"①。1798 年,焦循通过书信向李锐介绍汪莱。1800 年,汪莱赴南京参加恩科考试,初识李锐,结为至交②。但此后,由于二人关于天元和借根方孰优孰劣问题发生分歧,产生矛盾和争执。据称,汪莱为此发誓终生不见李锐。此后,汪、李二人分别以借根方和天元术立术进行方程论研究,汪莱以借根方法探讨根与系数关系,以证明西方借根方法优于传统天元术及增乘开方法,李锐充分意识到汪莱成果的重要性,并充分肯定汪氏的工作,但同时,他以天元术和增乘开方法重新阐释汪莱的成果,并进一步得出了与迪卡尔符号法则相当的成果。他们二人的工作均超出了当时传入的欧洲代数学及中国传统代数的水平。③ 汪、李二人的交往虽然很可能由他们之间的争论受到影响,但二人还是互相敬重的。焦循一直与二人维持着深厚的友谊。时人黄呈吉评论三人曰:

> 吴县李尚之锐,歙县汪孝婴莱,吾邑焦里堂循,三子者,善相资,疑相析。孝婴之学,主于约,在发古人之所未发而正其误,其得也精。尚之之学,主于博,在究诸法之所由立而求其故,其得也贯。理堂则以精贯之旨推之于平易,以为理本自然,取刘徽注九章算术之意,著《加减乘除释》八卷,凡弧矢之相求,正负之相得,方员凸凹之异形齐同,比例之殊制,靡不先列其纲次,疏其目,俾学者可穷源

① 焦循.石埭儒学训导汪君孝婴别传.15a.

② 焦循.石埭儒学训导汪君孝婴别传.15a.

③ 关于清朝代数方面的研究与欧洲代数学在中国的传播,详见本书第五章。

以知流，揣本而齐末，其于二子之学，盖相辅而实相成矣。①

由此可以概见当时学者们对三人数学水平的推崇。从焦循、汪莱、李锐的交往可以看出，作为当时最重要的三位数学家，数学是他们之间联系的主要纽带。同时，对同一问题有兴趣的学者通过信函及共同参加某一研究或编书项目进行合作研究及讨论辨难亦是乾嘉学派学者交流的普遍方式。从另一个角度来看，谈天三友的数学交流是在乾嘉时期儒家学术氛围下的学术交流的一个具体事例。②

焦循、汪莱、李锐对西方数学的态度亦值得我们进一步分析。焦循早期著作均是关于西方数学的，李锐早期也对西方代数方法有很高的评价。经过对传统数学著作的研究之后，他们均转而提倡传统方法。汪莱虽然也对传统数学著作做过研究，但他一直坚持西方数学方法具有优越性。在本书第五章中，我们将看到，焦循、李锐和汪莱的观点是建筑在对中、西代数方法的具体分析的基础之上的。汪莱因为西方代数方法在方程论方面的研究而推崇西方代数方法，李锐和焦循完全理解并高度赞扬了汪莱的工作。但他们并不认为西方代数方法是研究方程论的惟一方法，李锐归纳总结了汪莱的成果，并以中国传统方法解释汪莱的工作。此后，他又以传统方法继续方程论方面的研究，撰成《开方说》。汪莱在方程论方面的研究可以说是以西方数学方法进一步总结和发展了传入的西方数学知识，虽然他的成果无法与西方同期数学家的研究水平相比，但其工作还是在中国数学西化的进程中占有重要的地位。李锐以传统数学方法研究方程论问题，其成果可被归入传统数学的范畴。但从现存史料来看，此前的中国古代数学著作中从未探讨过方程论问题。李锐本人对方程论的研究实际上是为了应付汪莱对传统方法的挑战，是受了西方方法的启发而作的，并不是沿着传统数学思维方式自然发展的结果。

清代中期还有一些学者和数学家致力于复原古算书及传统算法。其中做出较重要贡献者有以下几位。

李潢（？—1812），字云门，钟祥人。1771 年进士，成翰林，任《四库全书》馆总目协纂官，后官至工部左侍郎。“博综群书，尤精算学。推步律吕，俱臻微妙”，与李锐并称“南李北李”，但他的数学水平较之李锐则有所不及。李

① 黄承吉，加减乘除释序．加减乘除释．1a—2a．

② 焦循采取了同样的方式与汪莱等共同探讨易学问题。

潢一心阐明古算，著有《九章算术细草图说》、《海岛算经细草图说》、《缉古算经考注》等。李潢与戴敦元相友善。据戴氏称，李潢曾言，"陈其数者，下学之言也，知其义者，上达之功也"①。可见，与钱大昕一样，他也认为数字计算方法并不是数学研究的主要目的。

张敦仁(1754—1834)，字古愚，阳城人，1775年成进士，官至江宁、扬州、南昌、吉安等地知府及云南盐法道。张敦仁"力求古籍，研究群书"，"尤嗜算学"。他以天元术重新解释《缉古算经》中的算题，完成《缉古算经细草》②，及阐述大衍求一术的《求一算术》和解释增乘开方法的《开方补记》。张敦仁与李潢及李锐交往较多，李锐对于他的诸部算书均有贡献。③

沈钦裴，字侠侯，号狎欧，元和人，1807年中举。授荆溪县学训导，"不节于饮，病偏枯者累年，藉扶掖以行，神明如常，课讲不辍"④。后被布政使参劾去官。沈钦裴"笃于学而邃于思，天文、地形无不通晓，尤洞精算术。宋秦九韶之《数书九章》，元朱松亭《四元玉鉴》，李冶之《测圆海镜》，世所谓绝学，皆能通之。⑤"沈钦裴曾撰《重差图说》，试图用相似三角形的原理解释重差术，并校注《数书九章》及为李潢《九章算术细草图说》校算。沈钦裴最重要的工作是他耗十年之力完成的《四元玉鉴细草》。书中，他为朱世杰《四元玉鉴》中的每一题撰有细草，虽然他的著作没有发表，未对清代四元术的研究产生很大影响，但数学史界普遍认为，沈钦裴对四元术的复原更符合朱世杰的原意。⑥

罗士琳，字次缪，号茗香，甘泉人。曾考取天文生，当时，阮元掌国子监算学，故罗士琳被称为出于阮元之门。后阮元于杭州开创诂经精舍，罗士琳入诂经精舍学习。罗士琳早年学习西方数学，撰《比例汇通》，试图以欧洲比例算法重新编排和解释《九章算术》中的成果。在学习《四元玉鉴》之后，他开始转向中国传统数学的研究，并大力提倡传统天元术和四元术。罗士琳撰成《演元九式》阐述四元术，并撰《四元玉鉴细草》。罗士琳的《四元玉鉴细

---

① 戴敦元．九章算术细草图说序．1a.

② 《缉古算经》，原名《缉古算术》(公元623年前后)，唐王孝通撰并注．全书20个问题，大都以高次方程求解，是现存最早的介绍开带从立方方法的书籍，书中在多面体求积方面亦有创新。

③ 罗士琳．张敦仁．畴人传续编．卷52．1a—6b.

④ 诸可宝．沈钦裴．畴人传三编．卷3．12a.

⑤ 诸可宝．沈钦裴．畴人传三编．卷3．12a.

⑥ 杜石然．朱世杰研究．宋元数学史论文集．北京：科学出版社，1966．259—273.

章》于1830年出版，对清朝四元术的研究产生了很大的影响。

骆滕凤(1770—1841)，字鸣岗，号春池，山阳(今江苏淮安)人。1801年中举，选授觉罗官学教习，大挑一等，例授知县，不愿仕，改授舒城县学训导，不足一年，告归教授里中[①]。骆腾凤曾随李潢学习数学，著《开方释例》四卷，讨论开方式之诸方廉和较、大小、加减之理，阐明正负开方术。又于衰分、方程、勾股等法及《九章》所未载与古今算书未能该洽者，溯其源，正其误，随所见而记之，作关于《九章算术》、《孙子算经》、《缉古算经》、《数书九章》、《测圆海镜》等书的研究札记22篇，10余万言，以《艺游录》为名出版于1815年。[②]

前文已经提到，沈钦裴在他的《重差图说》中利用西方相似三角学理论证明传统重差法。19世纪20年代之后中法派的主要代表人物罗士琳在他的《比例汇通》中高度赞扬西方借根方方法，指出西方比例算法为一切数学之基础，并欲以之重新阐述《九章算术》。[③] 从骆滕凤的《艺游录》可以看出，他对西方数学方法亦非常熟悉。由此可见，在西学传入200年后的中国，即便是中法派的数学家亦多对西方数学有所研究，无论他们对西方数学的态度如何，他们都必然会受到西方数学方法和思想的影响。

当时的数学家中，亦有专治西算者。张作楠即属此类学者。

张作楠，字丹邨，金华人。曾任处州府教授，历官阳湖县太仓州，后升至徐州府。“生平酷嗜西人历算之学，与婺源齐彦槐、全椒江临泰相友善，以两人皆同治西算也”。“居官不事酬应，尝曰，与其浪费无益之酬应，不若将薄俸养活工匠，制仪器，刻算书，俾绝学大昌”。张作楠曾著《翠薇山房算学丛书》，据罗士琳评价：书中“大率皆西人成法，推而演之”，“无有心得”。[④]齐彦槐为1809年进士，曾撰《天球浅说》、《中星仪说》等书。江临泰，“善用对数”。[⑤]

张作楠的《翠薇山房算学丛书》含《量仓通法》、《方田通法补例》、《仓田通法续编》、《八线类编》、《八线对数类编》、《弧角设如》、《弧三角举隅》、《揣籥小录》、《揣籥续录》、《高弧细草》、《交食细草》、《新测恒星图表》、《新测中

① 诸可宝．骆腾凤．畴人传三编．卷3．6a．

② 郭书春，艺游录提要．中国科学技术典籍通汇·数学卷．5—141．

③ 关于罗士琳对借根方与天元术的态度，详见本书第五章。

④ 罗士琳．张作楠，畴人传续编．卷52．17b—20a．

⑤ 诸可宝．齐彦怀．畴人传三编．卷2．7a—b．

星图表》、《新测更漏中星表》、《金华更漏中星表》等书。前两部为数学在实际中的应用,此后4部阐述三角学及对数,后8部主要是天文学内容。《翠薇山房算学丛书》的内容主要采自《数理精蕴》、《历象考成》及《钦定仪象考成》诸书,很少有新发明的成果。罗士琳对他的评语虽然有些苛刻,但亦大体符合事实。但张作楠的工作也有其自身的意义。在《揣籥小录》(1820)中,张作楠介绍了日晷的作法,并附三份算表以满足不同地点制作和使用日晷的需要。《新测中星图表》(1823)、《新测更漏中星表》(1823)是根据《历象考成》编辑的两种测时用表,该表较以前的同类测量表给出了更多的数据①,其中很多数据都是张作楠自己推算的。

罗士琳对张作楠的评价与乾嘉学派的学术评价标准有关。乾嘉学派学者在他们的研究中注重发明权及个人建树。乾嘉汉学研究有优先权的争论及学术进步的观念。从历史上来看,儒学研究是以阐述和解释儒家经典及传统为主要内容的,所以,对一个学者学术水平的评价的主要标准不在于他发明了什么新的理论,而在于他的著述和言论是否符合儒家传统,及其对儒学经典的诠释是否符合先圣先贤的本意。乾嘉学派致力于通过复原经典以恢复古代儒家传统的研究,似乎不应该以学者个人的发现为研究目的。但是,自18世纪之后,便经常有学者围绕着发现的优先权而产生争论。这亦是汉学派由儒家道德理论研究向学术性考据研究转变的一个标志。有学者认为,这表明知识进步的意识已进入考据领域。②乾嘉学派对知识进步的认识及对学术创新的追求很可能受到西方历算传入的影响。天文历法制订技术愈出愈精的观点在元、明文献中都曾出现,但这样的说法并不普遍,且亦未影响到一般学术研究。明末清初,人们大都承认传入的西方天文、数学及水利、工艺等方面知识的水平超过当时中国人在相应领域的水平。正基于此,相关的西方知识才引起了学者们的兴趣。清代初年以后,"西学中源"之说盛行。前文已经提到,清初提倡"西学中源"说的康熙帝及梅文鼎等并不排斥西学,通过"西学中源",他们赋予西学以合法的地位,以平息关于中、西之辨的"聚讼"。康熙帝还希望借此将其对西方方法的研究归入恢复儒家传统的行为范畴。梅文鼎等数学家亦在"西学中源"的口号下承认了西方方法的优势,以会通的方式引入西方数学的方法和概念。但这样的作法需要另

---

① 中国天文学史整理研究小组编. 中国天文学史.235—236.

② B. Elman, *Philosophy to Philology*, 228—229.

一个条件，即天文、数学是"越出越密"，也即是发展的，进步的。因为只有这样才能够解释何以源于"中"的西学能够超越中学。自西方数学传入以来，中国学者便不满足于仅仅向西方人学习，而是力图超胜。要超胜西方数学，便必然要进一步在传入的西方方法的基础之上有所创新。正是由于这样的原因，虽然同样一意研究和提倡西学，汪莱因其"所著论皆不欲苟同于人"而被罗士琳称为"超异绝伦"，"诚算家之最"[①]，而张作楠则因其无所创造受到了批评。

清代中期出色的数学家普遍以追求新的数学发明和创造为研究目的。在他们著作的序言中，他们多强调自己得出的新成果而不再像古代数学家那样强调数学在实践上的应用或对"通玄"、"明道"的启发性。这标志着中国数学家在向专业数学家过渡的过程中迈出了关键的一步。清代中叶数学家专业化思想的形成虽然并不一定是受了西方研究模式的影响产生的，但却与西学传播时所附带的对数学方法的优劣的比较密切相关，且与当时西方数学家的相关见解一致。

1879 年，汪曰桢评论《翠微山房数学》曰：

> 自乾隆、嘉庆以来，算学诸书，新撰愈多，精深巧捷进而益上。求其最切日用，为官曹民事所必需者，莫如《翠微山房数学》一书。书凡十五种，……。通贯中西，实事求是，志在启迪来学，示之轨式，俾得有所遵循而未尝矜新炫异，思与前人争胜。间有辩论，词气俱和平而不涉叫嚣。此儒者务实之学，所以别于噉名之流也。学算者寻其径涂可肄习而奉为师法。精算者度之座隅亦可适用而藉为佐助。[②]

在汪曰桢看来，张作楠的《翠微山房数学》是乾、嘉以来出版的最切实用的数学著作。该书可为学算者之师法。张作楠的不"与前人争胜"，亦即不追求新的数学知识和方法的研究方式亦被赞为"儒者务实"的体现。而汪莱、李锐等则被隐晦地说成是"矜新炫异"、"噉名之流"，亦即标新立异、沽名钓誉之人。从对张作楠的截然相反的评价中，我们可以看出清代学者对数学研究的态度的不同以及从 1840 至 1880 这 40 年间学术界治学取向的转变。

早在 19 世纪初，学术研究方式已发生了明显的变化，该变化与当时的

① 罗士琳，汪莱．畴人传续编．卷 50．24b．

② 汪曰桢．翠微山房数学序．翠微山房数学．1a．

社会背景有很大的关系。乾隆初期是清代的鼎盛时期,但乾隆末期,清王朝开始呈现衰落的态势,与历史上的王朝统治一样,随着一段时期的发展及稳定的局面之后,出现了官场腐败、人口激增等问题。这些问题通常是社会局势动荡及大规模起义的诱因。据统计,1796—1840年间,暴发了十余次规模较大的农民起义。与此同时,西方商人开始在中国贩卖鸦片。[①]这对中国的社会、经济、军事等造成了极为严重的危害,紧迫的社会危机唤醒了儒家学者的经世意识。实际上,虽然乾嘉时期的多数学者并不关注经世之学,但经世思想却从未真正消亡。乾嘉汉学派学者汪中、章学诚、洪亮吉等都很关心社会实际。在社会问题日益严重的情况下,清政府也放松了对学者思想的管制,不再大兴文字狱,这为士人议政提供了更大的空间。以经世为标帜的常州今文学派正是在这样的背景下崛起于晚清学术界的。所谓今文,即是汉代通行的隶书。以隶书撰写的经文被称为今文经,常州今文经学派以发挥《公羊传》为主,所以,该学派又由其地域特点及研究主旨被称为常州学派和公羊学派。常州学派的创始人为庄存与(1719—1789),庄氏力主公羊经学的"微言大义"。庄存与的外孙刘逢禄(1774—1829)继承了庄氏之学,并深入研究《春秋公羊传》。19世纪初,今文学派及早期今文学主要以《公羊传》研究为主,他们与理学派一起批评乾嘉学派注重章句、训诂等空疏无用之研究,考据派研究渐渐走入低谷。常州学派在当时的代表人物魏源与龚自珍起而呼吁社会变革及倡导经世致用之学。常州学派对清代末年的学术及社会有着很大的影响,其学友圈中包括林则徐、徐继畲等早期倡导学习西方知识的开明官员。清末康有为亦受到了今文学派的直接影响。

经世之学的复兴也影响了19世纪20年代之后的数学研究。当时的数学研究依然得到很多学者的重视,然而数学研究的取向却有所变化。汪莱、李锐在方程论方面的研究及焦循的数学符号化尝试均无人为继。汪、李二人的朋友包世臣称:

> 予故未习此(数学)。问之,初不解为何语。及二君(汪莱、李锐)相继物故,后来又言西法本出于中而加精密,或又谓中法胜于西而人不加察,然皆为微言,似妙道不可言传者。郑君元甫,予以世交相习数十年,闻其能通西法而已。道光辛丑同客豫章,过从既久,乃出示所著费隐与知二百余则。予受而读之,所说皆世人惊骇

---

① 参阅:冯天瑜,黄长义.晚清经世实学.46—64.

以为灾祥奇怪之事。而郑君推本说之，或以物性而殊，或以地形而变，或以目力而别，明白平易如指诸掌。当郑君之未说也，循其迹几于圣人所不知，及其既说而目验之，则夫妇之所与知也。郑君性沈默，不欲多上人，与汪君同里，李君亦所朝夕，而名则远逊。予既不习此，无以质君与二君之优劣。然予闻二君言如梦寐，而读君书则涣然冰释，则郑君远矣。是书也，不仅能穷物理之极，且使天下人嗣后见事之奇怪者，知物理自然之常而得免其惊骇。是至庸而至奇，真宇宙不可少之书。予幸遇之，故弁其首以告天下后世之善读书者。①

包世臣认为李锐和汪莱的研究偏重“微言”、“妙道”，他们的工作很难为人所理解。相比而言，他对郑复光在《费隐与知录》中介绍的与日用实际及自然现象相关的内容更为推崇。19 世纪 20 年代之后，数学研究的主要课题由天元术、借根方代数等相对理论性强的研究变为三角函数、对数幂级数展开式的探讨。众所周知，利用相关方面的成果可以大大简化运算。以三角函数幂级数展开式研究为纽带，1820 年左右形成了另一个数学学友圈，其成员主要有董祐诚、项名达、徐有壬、戴煦、夏鸾翔、李善兰等。

董祐诚(1791—1823)，字方立，1818 年中举，为衣食足迹半天下，而终至早逝。董祐诚将其主要精力从事数学研究。他的主要著作被编成《董方立遗书》9 种 16 卷，其中数学著作有 4 种 6 卷，计为《割圆连比例术图解》(1819)三卷、《椭圆求周术》(1821)一卷、《斜弧三边求角补述》一卷、《堆垛求积术》(1821)一卷②。其中以《割圆连比例术图解》(1819)三卷为董氏的代表作。他以连比例四率法和垛积术给出四个三角函数的幂级数展开式，以此四术，可以容易地得到明安图的九术。揭示了明氏的立法之原，又为其后的项名达、徐有壬等人的工作奠定了基础。③

项名达(1789—1850)，原名万准，字步莱，号梅侣，浙江钱塘(今杭州)人。1816 年中举，教授国子监学正，1826 年成进士，改官知县，不就职，退而专攻算学 30 年④。著作有《下学庵算学》3 种，包括《句股六术》(1825)一卷、

① 包世臣．费隐与知录序．1a—b．

② 董祐成．董方立遗书．1830．

③ 李兆华．董方立遗书提要．中国科学技术典籍通汇·数学卷．5—435．

④ 诸可宝．畴人传三编．卷 3．19b．

《三角和较术》(1843)一卷、《开诸乘方捷术》(约1845)一卷及《象数一原》六卷[①]。《象数一原》为项名达的代表作。项氏在三角函数幂级数展开式和椭圆求周方面均有深入研究。

徐有壬(1800—1860),字君青,一字钧青,浙江乌程人,1829年成进士。授户部主事,后历任四川按察使、云南布政使、湖南布政使,官至江苏巡抚,在与太平天国作战中战死。徐有壬任京职时开始与吴嘉善一起研究数学。与数学家沈钦裴、董祐诚、吴嘉善、戴煦、丁取忠、李善兰等都有学术交往。1822年,他读到《四元玉鉴》,"积思三昼夜,以意步为细草"。[②]从现存史料分析,徐有壬很可能是清朝第一个读懂四元术的数学家。[③]徐有壬著有数学著作9种16卷,在他去世后由吴嘉善整理成《务民义斋算学》出版。其中包括:《测圆密率》三卷、《垛积招差》一卷、《椭圆正术》一卷、《椭圆求周术》一卷、《截球解义》一卷、《弧三角拾遗》一卷、《割圆八线缀术》四卷。其中《割圆八线缀术》为其代表作。书中对三角函数互求及一般情形的大小三角函数互求作了系统研究,利用幂级数回求法和变换法给出正弦、正切、正割、正矢等四个函数的"互求"公式12式,"大小八线互求"公式18式。[④]

戴煦(1805—1860),初名邦棣,字鄂士,号鹤墅,浙江钱塘人。以商籍第一入杭州府学,绝意进取,循例为贡生,与谢家禾一同学习,谢氏去世后,戴煦为他出版遗书《谢穀堂算学三种》。戴与项名达友善,项名达去世后,他又助项完成《象数一原》。戴煦与罗士琳、徐有壬、张福禧、李善兰等均有学术交往。1860年,太平天国围攻杭州,戴煦与其兄戴熙先后投水自尽。[⑤] 戴煦10岁后即好数学,年少时曾撰《重差图说》、《句股和较集成》、《四元玉鉴细草》。中年以后著成《求表捷术》4种九卷、《对数简法》(1845)二卷、《续对数简法》(1846)一卷、《外切密率》(1852)四卷、《假数测圆》(1852)二卷。在二项式展开式、对数展开式和三角函数的对数展开式方面都有重要成果,通过他的工作可以大大简化对数造表法并可藉之检验三角函数对数表的准确性。

夏鸾翔(1823—1864),字紫笙,道光十九年补博士弟子,后得詹事府主

---

① 项名达并未完成《象数一原》全稿,现传稿是由戴煦于1857年校补完成的。

② 徐有壬.演元九式序.演元九式.

③ 田淼.《四元玉鉴》的清朝版本及清代学者对《假令四草》的校勘研究.

④ 李兆华.中国数学史.275—277.

⑤ 诸可宝.戴煦.畴人传三编.卷4.16b—17a。

簿。曾随项名达学习数学，并与戴煦友善。撰有《少广缒凿》一卷、《洞方述图解》二卷、《致曲术》一卷、《致曲图解》一卷及《万象一原》九卷。在《洞方述图解》中，他创设利用如差法造正弦正矢表的方法，可以大大简化造三角函数表的计算量。《万象一原》阐述各种曲线弧长、面积及其旋转面面积和所包的体积的计算方法。《致曲术》则进一步利用项名达、戴煦及李善兰等人的工作得出一些相当于椭圆积分问题的解。其《致曲图解》是关于圆锥曲线的综合研究。①

邹伯奇(1819—1869)，字特夫，广东南海人。邹伯奇博通经史，以其掌握的数学知识解释儒家经籍中的有关部分，撰有《学计一得》二卷，《补小尔雅释度量衡》一卷。他在戴煦《续对数简法》的基础上，进一步探讨二项式展开式问题。并撰《乘方捷法》三卷。他还撰有《对数尺记》一卷，阐述计算尺的构造和它在数学计算中所起的作用。②

李善兰(1811—1882)，原名心兰，字竟芳，号秋纫，别号壬叔，浙江海宁人③。李善兰在《则古昔斋算学》自序中叙述其学算经历时称："年十龄读书，家塾架上有古《九章》，窃取阅之，以为可不学而能，从此遂好算。"李善兰少时曾受过吴兆圻的指导，但他的数学知识主要是靠自学而得。此后，"应试武林，得《测圆海镜》、《句股割圆记》以归，其学始进。因思割圆法非自然，深思得其理，从此，时有心得，辄复著书。久之得若干种"④。李善兰自此开始进行数学研究与著述。他的算学著作除《群经算学考》一部因毁于战火失传外，尚有《方圆阐幽》(1845)一卷、《弧矢启秘》(1845)二卷、《对数探源》(1846)二卷、《垛积比类》(约1859)四卷、《四元解》(1845)二卷、《麟德术解》(1848)三卷、《椭圆正术解》二卷、《椭圆新术》一卷、《椭圆拾遗》三卷、《火器真诀》(1856)一卷、《尖锥变法解》一卷、《级数回求》一卷、《天算或问》一卷及《考数根法》四卷，《九容图表》七页、《测圆海镜解》一卷、《造整数句股级数法》二卷，共计17种。前13种于1864年由曾国藩资助出版为《则古昔斋算学》丛书。他的《考数根法》于1872年9月起于《中西闻见录》第二、三、四号连载。《九容图表》收入刘铎编《古今算学丛书》。《造整数句股级数法》一书

---

① 钱宝琮．中国数学史．330—333。

② 关于邹伯奇，参见：李迪，白尚恕．我国近代科学先驱邹柏奇．

③ 王渝生．李善兰研究．明清数学史论文集．334。

④ 李善兰．则古昔斋算学序．则古昔斋算学．1867．1a.

为席淦及崔敬昌等提及，但未见流传。在李善兰的诸部著作中，《群经算学考》虽失传，但从书名上来看，应为解释传统经典中的数学内容之作。收入《则古昔斋算学》的著作中，《四元解》为对四元术的研究。《方圆阐幽》、《弧矢启秘》、《对数探源》三书完成于 1845—1846 年间，书中首创尖锥术，该术是以中国传统垛积术为基础，以无穷尖锥面积来逼近方圆较之面积，进而得到对数函数、三角函数幂级数及二项式展开式公式。该成果与西方微积分学理论有相通之处，为中算史上的重要成果。《垛积比类》完成得较晚，该书为第一部系统研究垛积术的专著，其中含李氏发现的三角自乘垛求积公式，该式可被整理成李壬叔恒等式，李氏潜心于垛积术的研究很可能与尖锥术有关。《椭圆正术解》、《椭圆新术》和《椭圆拾遗》三书探讨圆锥曲线问题，与当时历法的欧洲天文学体系中用到的椭圆轨道有关，《麟德术解》探讨唐李淳风《麟德历》术中的二次内插法。《火器真诀》则是研究火器的数学原理的著作①。其《尖锥变法解》和《级数回求》二书完成于李善兰译《代数学》和《代微积拾级》之后，他在书中说明西方微积分学内容与他自己所创的尖锥术之间的关系，书中还以新译西方著作中的代数符号表达幂级数展开式，为第二次西方数学知识传入之后的成果。本节不做详述。

除《尖锥变法解》和《级数回求》以及受鸦片战争等影响而成的《火器真诀》外，《则古昔斋算学》中收入的多数数学著作都是在康熙禁教前传入的欧洲数学成果和乾嘉学派所发掘整理的古代数学方法的基础上完成的。李善兰的主要工作多与幂级数展开式相关，为项名达等人工作的继续。

算学以外，李善兰亦工于诗文，且于辞章训诂之学均有涉猎，但他对于八股时文却极为反感。王韬日记中称："壬叔谓今之士子，贬气节，慕势利，一无实用可裨于世者，皆由时文之弊。""夫时文仅优孟衣冠耳，其能代圣贤立言者，谬也。诂经不能究其精深，言理不能阐其奥妙，自少至长，精神全注于是，而无暇旁及于用世之学，以为无足重轻，略焉不讲。一旦有事，岂复可用。""不废时文而天下之弊岂可骤除哉？"②数学应该即是李善兰认为有裨于世，而亟应讲求的学问之一。正是基于上述论点，李善兰对于数学教育非常重视。咸丰年间，徐有壬任江苏巡抚，李善兰曾希望通过徐的支持在江苏

---

① 本节中所讨论的关于三角学、三角函数及对数幂级数展开式及垛积术的内容，均于本书第四、五章中有详细论述。

② 王韬．王韬日记．87—91．

各书院教授算学。王韬日记中亦有相关记述:"壬叔谓江南多英俊之士,今君青先生开府吴中,其算学为海内宗师,可于各县书院中别设历算一科,悉心指授,则西学不难大明,而绝绪可继。此亦千载一时不少失之机也"①。1860年,太平天国进攻苏州,徐有壬死于是役,李善兰的设想未能实现。

李善兰在1850年之后与伟烈亚力合译《代数学》和《代微积拾级》,从此,西方符号代数学和微积分学被传入中国。西方数学从此在中国完全扎下根来,并逐步取代了中国传统数学。这是本书下一章的主要内容。

乾嘉时期的数学发展一直是数学史界的重要研究课题。但由于多数数学史家偏重于对当时数学研究成果及恢复校勘古算书方面的工作的整理,这样,很自然地得出了乾嘉时期的数学研究以古学复兴为标识。亦有学者认为乾嘉学派的泥古倾向影响了欧洲数学在中国的传播。上述观点当然有其合理性。但却在两个方面有所忽略。其一,乾嘉学派的学者们在其治经的过程中并不只用到传统天文数学成果,欧洲天文学从一开始就是他们的重要工具。正因如此,他们几乎都对欧洲历法及与之相关的平面、球面三角学等作过研究,此为这些方面的研究一直是当时数学研究的最重要课题的一个原因。另一方面,人们大多忽略了对乾嘉时期数学家研究方法的分析。被视为数学"中学"派代表的李锐总是试图完备地、严谨地、一般性地解决他所探讨的数学问题。焦循则发明了符号法,并也像李锐一样坚持一般性的研究方法,虽然他们的证明方法大多来自传统数学,他们对严谨性的追求也肯定受到考据学及易学治学方法的影响,但同时,这亦都与传入的欧洲数学的方法和特点若合符节。可以说,传入的欧洲数学在这两方面的影响不容忽视,同时这也影响了后世欧洲数学在中国的传播。从前者来说,很可能正是传教士及其中国学生徐光启等对欧几里得数学的可证明性的赞扬,及欧洲宇宙论的引入,使得乾嘉学者意识到数学的精确性和可验性,这很可能对他们将数学用于对儒学经典及史籍的辨伪及对历史史实的断代有启发作用。同时,又使得他们致力于对传入的数学知识的证明和深化研究,这正是清代学者在三角学和三角函数展开式方面所进行的主要工作。而徐光启等对中国数学没有体系、没有证明的批评也刺激了乾嘉时期的学者如李锐等,他们对传统数学的各个专题做了系统的整理,并对传统算法进行证明。通过这样的工作,中国数学研究从算法研究转化为纯粹的学术研究,其研究方

① 王韬. 王韬日记. 88.

法也从对数字运算术的阐述及其应用方法的解释转向理论性的研究,这无疑使得此后传入的符号代数学和微积分学更易被接受和理解。李善兰等清末数学家能够如此顺利地完成《代数学》和《代微积拾级》的翻译,不能不说是基于他们先前的研究基础及清代中叶其他数学家的工作的。所以说,乾嘉时期的数学研究确实是中国数学西化历程中的重要一环。

第四章 中国数学西化的基本完成

自康熙帝禁教之时起,中国与西方的交通几近断绝。此后的百余年间,少有新的西方数学知识输入中国。中国算学家在复原传统数学及深入理解和继续发展西方数学方面做了一些工作。如果说清代初年中国传统数学还在算法领域有某些领先西方的方法,但到19世纪中叶,中国数学几乎在所有领域都不能再与西方数学抗衡。正在此时,西方数学再次大规模地传入。由于两种数学完全不在一个水平之上,中国数学甚至连会通的余地都没有了。到19世纪末20世纪初,中国传统数学终于被西方数学所取代,中国数学的西化亦基本完成。

第一节 西方数学的第二次输入

一、1860年以前传入的西方数学知识

禁教禁海之后,西方人仍可以在澳门自由居住,中、西间仍可以广东口岸进行定期贸易。被派往中国的传教士多在澳门、南洋等地活动。19世纪之后,新教传教士积极从事传教、教育及出版等活动,成为在中国传播西方知识的主力。当时传教士所办的学校中,最为著名的是英华学塾和马礼逊学堂。1815年8月,伦敦会传教士米怜(W. Miline,1785—1822)于马六甲开办米怜学塾,1818年,马礼逊(Robert Morrison,? —1834)在该学塾的基础上建成英华书院(The Anglo—Chinese College)。英华书院办学宗旨,一则造就欧洲人学习中国语言及中国文字,二则举凡恒河外方各族,皆能以英语接受西欧文学及科学之造就。其所设的课程,有英文、中文、数学、天文、地理、伦理哲学等。马礼逊去世后,应澳门传教士的建议,成立了马礼逊教育协会,1839年11月于澳门成立了马礼逊学堂。其开设的课程中有天文、地理、历

史、算术、代数、几何、初等机械学、生理学、化学、音乐、作文及中文《四书》和中国古代经典等科目。数学为这两所学校的教学内容,但当时的传教士主要传播的是教义,数学在其中并不占很高地位。熊月之曾根据伟烈亚力的《基督教在华传教士回忆录》编成《早期基督教传教士出版的中文书刊目录(1811—1842)》,其中没有专门介绍西方数学或科学的书籍。①

历史上,对于中国朝廷来说,西方人与琉球人、高丽人一样,都是可"抚"可"剿"的夷人。19世纪中叶以前,可能只有康熙帝一人意识到西方世界对中华帝国的威胁。他曾于1716年12月称:"海外如西洋等国,千百年后中国恐受其累。"②120余年之后,康熙的"逆料"变成了现实。1840年,鸦片战争的失败成为中国近代史上的一个转折点。1842年,缔结《南京条约》,割让香港。1843年6月至1845年6月间,广州、厦门、上海、宁波、福州五口相继开埠。

鸦片战争时期,林则徐等在广东与西方人有一定接触的官员和学者已开始收集有关西方的资料,林则徐还曾购买过英国船炮。鸦片战争失败后,以经世为治学目标的常州今文学派代表魏源等起而提倡"师夷之长技以制夷"。1843年,两广总督祁埙(1777—1844)上奏请变通科举,希望能以博通史鉴、精熟韬略、制器通算、洞知阴阳占候、熟谙舆图情形五门课士。③祁埙亲身经历鸦片战争并对西方先进的军事科技有所了解。所以他认为应该以与军事技术相关的制器通算及有关战争的韬略、舆图课读士子,并变通科举以资鼓励。但他的奏折被礼部驳回,在当时并未引起很大反响。魏源等的倡议在当时也是应者了了,并未激发出学习西方科学技术的热潮。

按照《南京条约》,传教士可以在五个港口自由传教,设立学校等。传教士们很快来到这五个口岸从事传教。可能是认为凭借西洋枪炮的保护,已不再像16、17世纪的传教士们那样需要科学作为路引,早期进入内地的传教士并未耗费太大精力于西方科学技术的传播。1843—1860年间,香港及各开埠城市传教士印行的中文书刊中只有蒙克利的《算法全书》(1852)、湛约翰的《设数求真》(1856)两部数学著作及罗存德的《地理新志》、合信的《天

---

① 熊月之,西学东渐与晚清社会.134—141。

② 康熙帝,谕九卿.清史编年.第三卷.468.

③ 祁埙,1841年以刑部尚书被派往广东,后改任两广总督,"防夷筹海,呕血酸辛",三年后去世缪荃孙。祁埙.续碑传集.卷24.

文略论》、《博物新编》，卢公明的《天文问答》，玛高温的《航海金针》、《日食图说》等几部含科学、技术内容的书籍。理雅各编辑的杂志《遐迩贯珍》中也含有一些科学内容。但不久传教士即发现，中国人对于宗教并不甚感兴趣。他们开始在科学事务上投入更多的精力①。

1860年以前，在翻译西方科学技术书籍方面贡献最大的是上海墨海书馆。1843年12月23日，英国伦敦会传教士麦都斯(Walter Henry Medhurst, 1796—1857)在上海东门外居住下来，并将他早先在巴达维亚开办的印刷所迁到上海，是为墨海书馆(London Missionary Society Press)之始。1846—1848年间，传教士美魏茶(William Charles Milne, 1815—1863)、施敦力约翰、伟烈亚力、慕维廉(William Muirhead, 1822—1900)、艾约瑟(Joseph Edkins, 1823—1905)等先后在墨海书馆工作。除传教布道之外，这批传教士亦多在引入西方世俗知识方面作了很多工作。其中，对西方数学传播影响最大的是伟烈亚力②。

伟烈亚力(Alexander Wylie, 1815—1887)，英国人，伦敦会传教士。于1847年8月26日抵达上海。他在英国时并未接受过系统的科学教育，早期曾在法学校学习，离开学校后，他成为一个木匠，曾参与过修复遭火灾的哈特菲尔德(Hartfield)议院大楼的修复工作。后借助于马若瑟的《汉学启蒙》和一本汉文《新约全书》，他开始学习汉语，并着手自己编写英汉词典。1846年，他被伦敦会传教士理雅各(J. Legge, 1817—1890)选中，被委派去负责经营墨海书馆。伟烈亚力是一位虔诚的新教传教士。他自称，其"来中国，以传耶稣之道为本"，但由于他亦"兼习艺能"，所以，他也参与一些传播西方"艺能"，也即科学技术的工作。伟烈亚力到中国不久，便开始致力于传播数学知识，1852年，他结识了李善兰。大约在该年6—7月份，李善兰来到麦都斯布道的教堂，向他出示了《对数探原》等其自著的数学著作，询问西方是否有同样的研究。伟烈亚力由此请李善兰翻译西方的数学和天文学书籍。1853年，他撰成《数学启蒙》二卷，该书讲解数字运算及对数方法。书中介绍了霍纳(Horner)数值开方法，并将之与秦九韶的增乘开方法做了比较，得

---

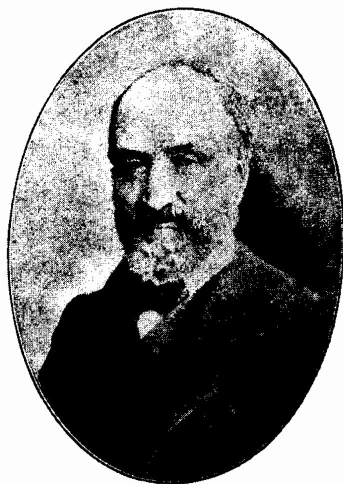
① 1840年，《澳门新闻纸》发表的一篇文章中称："中国之人民，平常尽皆恨恶我等，不欲与我等往来……在我等各样事业之中，只有医学乃系中国之人颇肯信之。"(澳门新闻纸. 1840年7月11日. 转引自：熊月之. 西学东渐与晚清社会. 133.)

② 关于墨海书馆，详见：胡道静. 印刷术反馈与西方科学第二次东传的头一个据点：上海墨海书馆. 出版史料. 1987. 第4期；1988. 第1期.

出二法实质相同的结论，称："开诸乘方又捷法：无论若干乘方，且无论带纵不带纵，俱以一法通之，故曰捷法。此法在中土为古法，在西土为新法。上下数千年，东西数万里，所造之法若合符节，信乎此心同此理同也。"①伟烈亚力关于增乘开方法和西方高次方程近似数值解法的关系的见解基本上是正确的。据艾约瑟称，李善兰曾帮助伟烈亚力学习宋元数学，前述伟烈亚力对宋元增乘开方法的理解应该就是在李善兰的帮助下完成的②。伟烈亚力称他撰《数学启蒙》的目的是"授塾中学徒"，所以，该书"由浅及深，则其知之也易。"伟氏称："譬诸小儿，始而匍匐，继而扶墙，后乃能疾走。兹书之成，姑教之匍匐耳，扶墙徐行耳。若能疾走，则有《代数》、《微分》诸书在，余将续梓之，俾鉴其全者知中、西二法虽疏密详简之不同，要之名异而实同，术异而理同也"。③即，《数学启蒙》只是他为了在学塾中教授学童数学所用的，他会继续翻译代数、微分方面的书籍以应有一定数学水平的数学家之需。伟烈亚力并未食言。数年后，他开始与李善兰合译棣么甘的《代数学》和《代微积拾级》。



李善兰　采自《格致汇编》



伟烈亚力　采自 *Chinese Researches*

① 伟烈亚力. 数学启蒙. 上海：墨海书馆，1853.

② Joseph Edkins. Preface. in "Jottings on the Science of Chinese Arithmetic", in: Wylie. Chines Researches.

③ 伟烈亚力. 数学启蒙自序. 数学启蒙.

1852年,李善兰开始与伟烈亚力合译《几何原本》后9卷[①],"以六月朔为始,日译一题,中间因应试、避兵诸役,屡作屡辍,凡四历寒暑始卒业"。[②]《几何原本》后9卷译成后,韩应阶出资刊刻《几何原本》后9卷,由张文虎、顾观光二人任校算,1857年印成。1865年曾国藩将其与利玛窦、徐光启合译的前6卷一起刊刻,《几何原本》终于有了完整的中译本。[③]翻译《几何原本》后9卷应该是李善兰的建议。据李善兰称:

> 泰西欧几里得撰《几何原本》十三卷,后人续增二卷,共十五卷。明徐(光启)、利(玛窦)二公所译其前六卷也,未译者九卷。……自明万历迄今,中国天算家愿见全书久矣。道光壬寅(1842),国家许息兵,与泰西各国定约,此后西士愿习中国经史,中士愿习西国天文算法者听之。心窃喜。岁壬子(1852),来上海与西士伟烈亚力约续徐、利二公未完之业……忆善兰年十五时读旧译六卷,通其义,窃思后九卷必更深微,欲见不可得,辄恨徐、利二公之不尽译全书也,又妄冀好事者或航海译归,庶几异日得见之。不意昔所冀者,今自为之,其欣嘉当何如耶?[④]

可见,研究《几何原本》后9卷是李善兰的宿愿。上海开埠之后,西方传教士们可以自由在上海居住,并传授宗教和各类知识。李善兰借此机会与伟烈亚力相约完成《几何原本》的翻译。中国数学家终于可以完整地看到这部在数学史上具有重要地位的数学著作了。但全本《几何原本》的译成并未对后来的中国数学发展起到太大的作用。很少有数学著作利用其中的证明方法或引用其中的数学知识。相反,伟烈亚力和李善兰合译的《代数学》和《代微积拾级》引起了清末数学家的极大兴趣。

《代数学》根据英国数学家棣么甘(Augustus De Morgan,1806—1871)所著《代数学基础》,*Elements of Algebra*(1835年,第一版),翻译而成[⑤]。棣么甘原著全名

---

① 钱宝琮据伟烈亚力《几何原本·序》推断,伟烈亚力与李善兰所译后9卷《几何原本》的底本应为巴罗(Issac Barrow, 1630—1677)于1660年译自希腊文的英译本。见:钱宝琮. 中国数学史. 323—324.

② 李善兰. 几何原本序. 几何原本. 1865年刊本. 1b.

③ 李善兰. 几何原本序. 几何原本. 1865年刊本. 1b—2a.

④ 李善兰,几何原本序. 几何原本. 1865年. 1a—2a.

⑤ 参见:Wann-Sheng Horng. Li Shanlan: The Impact of Western Mathematics in China During the Late 19th Century, A dissertation submitted to the Graduate Faculty in History in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy, The City University of New York, 1991. 312—315.

为：*Elements of Algebra: Preliminary to the Differential calculus, and fit for the higher class of Schools in which the principles of Arithmetic are taught*，意为：《代数基础：微分学初步适合于教授过算术原理的高级班》。从名称上可以看出，该书即是一部代数学原理性著作，同时，也包括微积分初级知识，棣么根所设计的读者群是已经掌握了算术原理的高级班的学生。在《代数学》的 13 章中，有 6 章中含无穷小的概念与运算、极限的概念与运算，以及无穷级数和连续函数等微积分内容。从具体内容上来看，《代数学》中所介绍的与微积分相关的概念比与其同时译成的《代微积拾级》更为严谨。《代数学》中还介绍了负数和虚数。

《代微积拾级》是根据美国数学家罗密士（Elias Loomis，1811—1899）所著《解析几何与微积分基础》（*Elements of Analytical geometry and of differential and Integral calculus*，1851）翻译而成的。罗密士，于 1830 年毕业于耶鲁大学，1836 年成为美国西预备役学院（Western Reserve College）数学与自然哲学教授。1844—1860 年任纽约市立大学数学教授。1860 年以后他回到耶鲁大学任自然哲学和天文学教授。他在当时以出版大量的数学、天文学及气象学方面的教材而非常著名。罗密士的研究偏重于应用科学，其最重要的贡献主要在气象学领域。罗密士并不以他的科学研究闻名于时，但他出版了很多数学、天文学和气象学方面的教科书，并以此成为当时著名的科学家①。罗密士的《代微积拾级》“并非为数学家，或有特殊数学才能或数学爱好的人，而是为有着一般能力的大学生”所写的②。全书 18 卷，分为三部分，代数几何 9 卷；微分 7 卷；积分 2 卷。“代数几何”主要为平面解析几何知识，讲解如何利用坐标系建立直线、圆、椭圆、双曲线、抛物线、摆线及其它曲线的代数方程式及其解法。利用代数方法解几何问题是中国传统数学中常用的方法。李善兰研究过传统数学在这方面最为重要的两部著作《测圆海镜》及《四元玉鉴》，所以，他可以很容易地理解《代微积拾级》中解析几何学的内容。

《代微积拾级》卷一开篇称：

几何题中用代数之位，觉甚便，准之作图，能显题之全。所设

---

① Gisela Kutzbach. Loomis, Elias. Dictionary of Scientific Biography, Vol. VIII. 487.

② E. Loomis, Preface, Elements of Analytical geometry and of differential and Integral calculus，引自：Wann - Sheng Horng, Li Shanlan: The Impact of Western Mathematics in China During the Late 19th Century. 330。

所求诸数俱包其内，法用代数已知、未知诸元，代题已知、未知诸数，视图中诸段有连属之理者，依几何诸题理推之，本题有若干未知数，须推得若干代数式。

在这段之后，李善兰加按语曰：

此即四元法，立天、地二元则必有二式，立天、地、人三元，则必用三式也①。

他立即把解析几何中利用代数方程解决几何问题的方法与传统数学中的四元术联系起来，并以其熟悉的四元术解释《代微积拾级》中的内容。李善兰曾称，以天元术基本方法构造出直角三角形及其内切正方形和圆的计算系统的"《测圆海镜》，每题皆有法有草。法者本题之法也，草者用立天元一，曲折以求本题之法，乃造法之法，法之源也。且算术大至躔离、交食，细至米盐、琐屑，法甚繁已，以立天元一演之，莫不能得其法。故立天元一者，算学中之一贯也。……善兰少习九章，以为浅近无味。及得读此书，然后知算学之精深，遂好之至今。后译西国代数、微分、积分诸书，信笔直书，了无疑义者，此书之力焉"②。可见，李善兰先前对传统天元术的研究使得他能够很容易地理解新传入的符号代数和微积分内容。虽然如此，传统数学中没有利用坐标系建立几何图形的方程式的系统方法，同时，传统半符号化的代数表达法亦无法与符号代数法的简单性和一般性相比。所以，深谙传统数学的李善兰自然亦能很快发现解析几何方法对于传统数学的优越性。③《代微积拾级》中的微分部分以"函数及自变数两变比例相与之比例"来阐述微分概念。值得注意的是，《代微积拾级》中虽然提到极限的概念，但其给出的极限定义并不严谨④，且所介绍的微积分原理并非是严格建立在极限理

① 李善兰. 善兰案. 代微积拾级. 卷 1.1b.

② 李善兰. 测圆海镜序. 测圆海镜. 京师同文馆聚珍版.

③ 从数学原理上来说，四元术与多元高次方程组并没有本质的区别。但传统代数学中的方程式采用半符号化的表达法，此法无法表述多于四个未知数的高次方程组，且对于三元、四元高次方程，有些交叉项亦不能得到明确的表达。李善兰在研究《四元玉鉴》时曾试图解决这个问题，创造出一套新的高次方程表达法，但他的表述方法非常复杂，且亦不具一般性。经过这样的尝试，李善兰应该能够立即发现可以简单地表述一般多元高次方程组的符号代数方法的优越性。详见本书第五章。

④ 《代微积拾级》中将极限译为"限"。其中对极限的定义为："凡变数有限，限者其数为变数所渐近而永不能到，或必不能过. 古谓之限。"(见：代微积拾级. 卷 10,1a)这并不是极限的严格定义。《代数学》中引入了严格的"$\epsilon-\delta$"方式的极限定义，但其叙述方式非常繁琐，不易被读者理解。

论基础上的。书中对函数的连续性、可导性、级数的收敛性等问题均不讨论，直接引入马克劳林(Maclurian)及泰勒(Taylor)级数阐释和推导超越函数及曲线弧长、曲线内所包的面积及旋转体表面积和体积等其他微分公式，以及函数极值的判定等问题，同样，在解释及利用泰勒展开式时，书中亦未提到函数的收敛性问题。积分部分有两卷，卷十七介绍了积分的概念、性质，幂函数及多项式的积分、用级数求积分法及一些特殊函数的积分。卷十八为积分之应用，主要是如何利用积分求曲线的长、曲面面体、旋转体的表面积及旋转体的体积等。由于没有介绍自高斯以来西方数学家对微积分学基础研究的成果，所以，从纯粹数学的立场上来说，《代微积拾级》并不能算是一部理论性很强的微积分著作。然而，该书比相对理论性较强的《代数学》引起了中国数学家更大的兴趣，也更易为中算家所接受和理解。

1712 年英国数学家泰勒(Brook Taylor, 1685—1731)给出的泰勒展开式是现代有限差分的理论基础，利用此公式使得任意单变量函数展为幂级数成为可能。《代微积拾级》中介绍的另一个重要展开式公式马克劳林公式可被视作泰勒公式的特殊形式。中国传统数学在有限差分方面有着突出的成果，差分法在中国古代被应用于制订历法。18 世纪以来，包括李善兰在内的中国数学家对于三角函数、对数函数的幂级数展开式的研究倾注了很多心血。所以，《代微积拾级》中的相关内容可以较为容易地为他们所理解。同时，一个一般性的可以将任何函数化为幂级数的公式也自然会引起他们的重视，清末中国数学家自著的微积分方面的著作多与泰勒展开式和麦克劳林公式有关。此外，《代微积拾级》具有程序性和算法性的特点，这也使得它很容易被李善兰等中国数学家所接受①。

总之，译自棣么甘著作的《代数学》保持了棣么甘注重数学细节的分析和理论性的特色，《代微积拾级》则明显带有罗密士并不注重对基本理论问题的阐述的痕迹。伟烈亚力选择了两个完全不同类型的数学家的两部风格迥异的著作作为其翻译的底本，从中可以看出，伟烈亚力自己可能在此之前对这两部著作以及西方当时代数学和微积分教材出版的总体情况并不完全了解。至于他为什么选择这两部著作，据笔者推测，棣么甘是当时英国最著

---

① 关于《代微积拾级》的特点，参见：Wann - Sheng Horng, Li Shanlan: The Impact of Western Mathematics in China During the Late 19th Century, 330；汪晓勤，伟烈亚力与中西数学交流．中国科学院自然科学史研究所博士论文，1999.

名的数学家之一，同时，他还以其虔诚的基督教信仰而闻名，伟烈亚力选择翻译他的著作并不值得奇怪。罗密士以出版大批教材而著名，伟烈亚力很可能是因此选择了他的著作。李善兰对《代数学》和《代微积拾级》二书评价极高。称"此书为算学中上乘功夫，此书一出，非特中法几可尽废，即西法之古者亦无所用之矣"①。

《代微积拾级》一经译成便引起了中国数学家的重视。1859年，冯桂芬与徐有壬一起研究《代微积拾级》，徐有壬认为"是法(《代微积拾级》中的数学方法)壬叔外鲜能通晓，书中文义语气多仍西人之旧，奥涩不可读，惟图式皆可授，宜以意紬绎图式，其理自见"。②徐有壬不久去世，冯桂芬与陈暘合著《西算新法直解》阐释《代微积拾级》中的数学方法。华蘅芳亦是由《代微积拾级》和《代数学》学习代数和微积分的，此后，他也是受这两部著作的影响而与傅兰雅合译《代数术》和《微分溯源》的。

除上述三部数学著作外，李善兰在墨海书馆还分别与伟烈亚力合译了《谈天》18卷，与艾约瑟(J. Edkins, 1823—1903)合译了《重学》20卷，附《圆锥曲线说》3卷；与韦廉臣(A. Williamson, 1829—1890)合译了《植物学》(8卷)，并与伟烈亚力合译《数理格致》(即牛顿的《自然哲学的数学原理》)4册。③《圆锥曲线说》主要解释《重学》中的数学方法，各卷依次介绍椭圆、双曲线和抛物线的性质。除李善兰外，王韬、管嗣复、张福禧等也被聘入墨海书馆与西人合译书籍。

二、自强运动期间西方数学知识的引进

在传教士们为了扩大其传教影响，决定再次使用耶稣会士的以传播科学知识作为传教之助的策略的同时，中国的社会局势发生了天翻地覆的变化。1850年11月4日，洪秀全于广西金田起义，1853年3月20日，太平军攻陷并定都南京，同年10月，一度围攻北京的门户天津。三年之内，太平军势如破竹，锐不可挡，以满族八旗兵为主体的清军江南、江北大营则节节败退，毫无战斗力。1853年1月8日，当时丁忧在籍的礼部侍郎曾国藩应旨帮

① 华蘅芳，论加减乘除开方之用．学算笔谈．卷5.1a.

② 冯桂芬．西算新法直解序．西算新法直解．吴县冯氏校邠庐刊本．1a—b.

③ 关于《数理格致》的翻译、流传及内容，参见：韩琦．《数理格致》的发现－兼论18世纪牛顿相关著作在中国的传播．78—85.

办湖南团练乡民,保护地方。此后,湘军日益壮大,与其后起的李鸿章之淮军一起成为清代末年的主要军事力量。湘军、淮军领袖及一批与之相关的人物曾国藩、左宗棠、李鸿章、胡林翼、沈宝桢、郭嵩焘等成为一股重要的政治势力。在与太平天国作战的过程中,他们充分认识到西方武器的威力,开始谋求建立自己的军工企业。早在与太平天国激战正酣之际,曾国藩聘请徐寿、华蘅芳等试造轮船,并派容闳赴美购买用于军事制造的机器。

正在此时,爆发了第二次鸦片战争。1860年,英法联军攻占北京,咸丰帝逃往热河。恭亲王奕䜣受命与英法联军和谈。在此过程中,奕䜣也体会到西方船炮在战争中起到的作用。1861年,奕䜣奏请购买法国船炮,并聘请西洋匠师制造西洋军械。曾国藩上折支持奕䜣,称其"购买外洋船炮"的建议"为今日救时之第一要务"。并分析曰:

> 凡恃己之所有,夸人以所无者,世之常情也,忽其所习见,震于所罕见者,亦世之常情也。轮船之速,洋炮之远,在英、法则夸其独有,在中华则罕于所见。若能陆续购买,据为己物,在中华则见惯而不惊,在英法亦渐失其所恃。康熙雍正年间,云南铜未曾解京之时,皆给照会商人采买海外之洋铜,以资京局之鼓铸,行之数十年,并无流弊,况今日和议既成,中外贸易,有无交通,购买外洋器物,尤属名正言顺,购成之后,访募殚思之士,智巧之匠,始而演习,继而试造,不过一二年,火轮船必为中外官民通行之物,可以剿发逆,可以勤远略,谕旨期于必行,不得畏难苟安。①

1862年,咸丰帝病逝于热河避暑山庄,年少的同治帝继位,慈安、慈禧两太后垂帘听政,奕䜣任摄政王。当时年轻的慈禧尚未有能力独揽朝政,奕䜣在处理国家事务方面拥有特权,可以自上推行其购买西方军械及学习西方兵器制造技术的策略。此时,太平天国的势力亦基本被控制,曾国藩、李鸿章、左宗棠等亦有余力着手开创军工企业,聘请西方人制造轮船、枪炮。曾国藩率先在安庆创办军械所,聘请徐寿、华蘅芳等仿造西洋小轮船等。1865年,曾国藩会同李鸿章在上海创江南机器制造总局(以下简称江南制造局),进口美国的机器设备,聘"洋匠"制造西式枪炮和轮船。1866年,左宗棠于福建马尾设立福州船政局,聘请法国人指导制造轮船。他们与奕䜣上下呼应,倡导学习西方的先进技术以图自强御侮,是为历时30年的自强

---

① 曾国藩,奏摺.筹办夷务始末(同治朝).卷1.22—26.

运动,亦称洋务运动之始。

学习西方先进的科学技术的途径不外数条,派遣学生出国留学、请西方人及通西方科学技术的国人传授制造技术、科学知识,翻译西方科技书籍以及开办学习西方技术的学校等。自强派官员在这几个方面均做了尝试。本节主要关注自强运动期间所译介的西方数学著作。上海江南制造局的翻译馆是自强运动期间最重要的西方书籍翻译和出版机构,很多数学著作和其它科学技术著作都是在江南制造局出版的。曾、李奏设该局的主要目的是为了仿造西方轮船以及军事和民用的机械及武器。①这样一个企业何以要翻译西方数学书籍呢?这与当时人们对数学与技术的关系的认识有关。自强运动中,数学普遍被认为与机械制造等民用、军用技术有关。李善兰曾称:“今欧罗巴各国日益强盛,为中国边患,推原其故,制器精也。推原制器之精,算术明也。”②冯桂芬(1809—1874)③ 在《校邠庐抗议·采西学议》中进一步称:

> 一切西学皆从算学出,西人十岁外无不习算。今欲采西学,自不可不学算。或师西人,或师内地人之知算者俱可。
>
> 由是而历算之术,而格致之理,而制器尚象之法,兼综条贯,轮船火器之外,正非一端④。

即,数学是西方一切学术的基础,学习数学知识之后,就可以进而理解格致之理并掌握“制器尚象之法”。由此,中国人便可以学得西人以“小夷”而能制“广运万里地球中第一大国”的长技⑤。1867 年,徐寿向江南制造局总办

---

① 李鸿章. 李鸿章会同曾国藩奏开办情形. 洋务运动. 第 4 册. 74—78.

② 李善兰. 重学序. 重学.

③ 冯桂芬,字林一,号景亭,江苏吴县人。曾随李锐学习过数学,随李兆洛学习经学,并成为林则徐的得意弟子。1841 年一甲第二名进士。1860 年,太平天国军队攻占苏州,冯桂芬逃至上海,参与了城防事宜,并向曾国藩、李鸿章等献上“用兵机宜数千言”,对李鸿章率军解上海之围及恢复苏州起到了很大的作用。在上海期间,冯桂芬与西人及在墨海书馆译书的李善兰、管嗣复等都有来往。李善兰译成《代数学》和《代微积拾级》之后,冯桂芬很快读到这两部书,并与徐有壬一起研究了《代微积拾级》。故他对当时传入的西方数学知识有所了解。(见:诸可宝. 冯桂芬. 畴人传三编. 卷 5. 7b—10a)《校邠庐抗议》为冯桂芬于 1861 年撰成的一部著作,书中,他对当时与治国相关的吏制、家桑、水利、漕运、财政、军备等各方面都发表了意见。1861 年,冯桂芬应邀入李鸿章幕府。李鸿章在自强运动期间的很多奏折都与《校邠庐抗议》中的内容一致。

④ 冯桂芬. 采西学议. 校邠庐抗议. 210.

⑤ 冯桂芬. 制洋器议. 校邠庐抗议. 197.

沈宝靖、冯焌光[①]建议，设立翻译局，翻译西方有关书籍。应沈、冯之请，曾国藩对译书之议表示支持。1868年，江南制造局添设翻译馆。曾国藩上折称：

> 翻译一事，系制造之根本。洋人制器出于算学，其中奥妙，皆有图说可寻。特以彼此文义扞格不通，故虽日习其器，究不明夫用器与制器之所以然。本年局中委员于翻译甚为究心，先后订请英国伟烈亚力、美国傅兰雅、玛高温三名，专择有俾制造之书，详细翻出[②]。

当时在馆中参与译书的除上述三位传教士及徐寿以外，还有华蘅芳和徐建寅等。江南制造局出版的西方数学著作主要是由傅兰雅和华蘅芳二人译成的。



华蘅芳 采自《锡金四哲》



傅兰雅 采自《格致汇编》

傅兰雅(John Fryer，1839—1928)，出生于英国肯特郡。1861年他毕业于伦敦海伯里师范学院，同年，被选中到香港圣保罗书院教书[③]。1863年，傅

---

① 冯焌光青年时曾随邹伯奇学习数学，1864年为李善兰《则古昔斋算学》校算《方圆阐幽》。1864年，他因素习数学及机械制造被李鸿章奏调至上海协办江南制造局，见：邹达泉．邹徵君遗集序．邹徵君遗集．1873；故宫博物院编．筹办夷务始末(同治朝)．卷35．

② 曾国藩，奏陈办理情形．洋务运动．第4册．79．

③ Ferdinand Dagenais，John Fryer's Calendar．1．

兰雅至北京,担任京师同文馆① 英文教习。1865 年,他至上海任英华学塾校长。1866 年起,他兼任《上海新报》的编辑。1868 年 5 月 31 日,傅兰雅受聘至江南制造局任翻译。此后,他与其中国同事翻译了大量书籍,内容涉及数学、物理、华学、矿冶、机械等多方面内容。②

华蘅芳(1833—1902),字若汀,江苏常州金匮县人。华蘅芳少习举业,颇费力,"读大学章句,日不过四行,非百遍不能背诵。十四岁从师习时文,竟日仅作一讲,师阅之,涂抹殆尽"③。"十五六岁时,偶于故书中检得坊本算法,心窃喜之,日夕展玩,不数月而尽通其义"④,此后,他"案头所置者,惟百廿名家制艺及古今算学之书,日夕流览,舍此则取彼,舍彼则取此,所以新耳目而免厌倦也"。其父华翼纶"见其癖嗜"算学,于是为他购置了多种传统数学书籍。通过大量阅读,华蘅芳于中国传统算学方面打下了坚实的基础。于 20 岁时,他购得《数理精蕴》,开始接触西方数学。1859 年,华蘅芳在上海墨海书馆见到李善兰,当时李正与伟烈亚力对译《代数学》及《代微积拾级》。李善兰告诉华蘅芳,《代微积拾级》"为算学中上乘功夫"。华蘅芳自此始知代数、微分、积分之术。他从李的"译稿中录得数条",但"视之迄不得其用意之处"。《代数学》与《代微积拾级》出版后,李善兰送给华蘅芳各一部。华"披阅数页外,已不知其所语云何也"。经过长时间的思考和研究,华蘅芳终于理解了代数方法。"从此以后无时不究心于代数"。很可能是基于他早先学习《代数学》和《代微积拾级》的经历,他认为《代数学》和《代微积拾级》不适合于初学者学习。所以,他与傅兰雅合译了《代数术》、《微积溯源》、《三角数理》、《代数难题解法》。⑤从华蘅芳的叙述猜测,《代数术》和《微积溯源》诸书很可能是应他的要求翻译的。

《代数术》与《微积溯源》两书确实较《代数学》和《代微积拾级》更为浅显易读。两书均译自英国数学家华里斯(William Wallace, 1768—1843)于 19

① 关于京师同文馆,详见本章下节。

② 关于傅兰雅翻译书籍的目录,详见:王扬宗. 傅兰雅与近代中国的科学启蒙. 北京:科学出版社, 2000. 126—133.

③ 华蘅芳. 行素轩时文序. 行素轩时文存.

④ 华蘅芳. 学算笔谈. 卷 5. 2a—b.

⑤ 华蘅芳. 学算笔谈, 卷 5.

世纪初为《大英百科全书》第四版写的辞条。[①]

《代数术》(1872),译自《大英百科全书》词条 Algebra,25 卷。前 10 卷讲解代数多项式、一次和二次方程。卷十一与卷十二讨论三次、四次方程的解法,卷十三至卷十六内容为方程论。卷十七、卷十八、卷十九讨论对数与指数函数的幂级数展开式,卷二十论连分数,卷二十一论不定方程,卷二十二主要讲解以代数法解几何问题的方法,卷二十三为二元方程的图象,卷二十四论三角函数关系式。卷二十五讲解棣美弗定理及三角函数的幂级数展开式等。

《微积溯源》(1874),8 卷,为《大英百科全书》中的"流数"(Fluxions)。前 4 卷论微分,卷一介绍了一些微积分的基本概念,如函数、变量、极限等,多项式求微分的方法以及微积分的一些性质。卷二讲解高阶导数及利用泰勒公式和麦克劳林公式求函数展开式的方法。卷三为求函数极大极小值,卷四为求曲线相切。卷五讲解积分的概念及性质。卷六求虚函数之积分,卷七求曲线面积,卷八讲解含两个未知数的函数的积分。[②]书中以微分的反函数定义积分,且未对定义微分的基本概念极限给予严格的定义。

从内容上来看,《代数术》没有像《代数学》那样纠缠于极限理论,全书的结构更为清晰有条理,《微积溯源》则较《代微积拾级》更为系统。二书确实较《代数学》和《代微积拾级》更易于被读者理解,故出版后,成为学习代数和微积分的主要教材。

傅兰雅和华蘅芳还译成《代数难题解法》(16 卷,1879),该书译自伦德(T. Lund)的《伍德代数指南》(A Companion to Wood's Algebra, 1878)。前 12 卷为初等代数习题解,后 4 卷为剑桥大学的代数试题及其解[③]。

除上述代数和微积分著作外,华蘅芳还和傅兰雅合译了《三角数理》与《决疑数学》。

《三角数理》(1877)12 卷,译自海麻士(J. Hymers, 1830—1887)所编的《平面和球面三角》(*Treatise on Plane and Spherical Trigonometry*)。该书前 8 卷为平面三角学,后 4 卷为球面三角学。明代末年,三角学已被引入中国。此

---

① 傅兰雅和华蘅芳是根据《大英百科全书》第 8 版译成两书的。见:王扬宗.傅兰雅与近代中国的科学启蒙.

② 华里司著. 微积溯源. 傅兰雅, 华蘅芳译.

③ 李兆华. 中国数学史. 333.

后，中算家在三角公式的证明及三角函数幂级数展开式方面做了很多工作。当时引入的三角学是基于几何学理论及方法的。《代数术》首次引入三角函数的代数解法，《三角数理》中则进一步系统地论述了以代数法表述及解决三角函数的方法及理论。

《决疑数学》(1880)10卷，译自伽洛瓦(Thomas Galloway，1796—1851)为《大英百科全书》写的词条"概率"(Probability)，并补以安德生(R. E. Anderson)为《钱伯斯百科全书》(*Chamber's Encyclopaedia*)撰写的《概率论，或然性，或平均理论》(*Probatilities, Chances, or the Theory of Averages*)。[①]该书卷首为概率学简史，前5卷介绍古典概率，卷6、卷7论人寿和诉讼之概率计算，卷8论大数各题算法，卷9论正态分布，卷10论最小二乘法[②]。此为西方概率论知识第一次系统传入中国。

1898年，江衡与傅兰雅合译了《算式解法》14卷，该书以美国好司敦(Houston)和开奈利(Kennelly)合著的《简易代数》(*Algebra Made Easy*, 1898)为底本，讲解初等数学及简单微积分内容。书中还介绍了行列式计算。通过这些著作，符号代数、微积分、解析几何、三角学及概率论等知识被系统地引入中国。[③]

除江南制造局以外，当时还有传教士翻译或撰著一些数学著作，其中较为重要的有狄考文(Calvin Wilson Mateer，1836—1908)与邹立夫合译的《形学备旨》(10卷，1885)、《代数备旨》(13卷，1891)、《笔算数学》(3册，1892)，及潘慎文(Alvin Pierson Parker，1850—1924)和谢洪赉合译的《代形合参》(3卷，1893)和《八线备旨》(4卷，1894)，这些书籍大都译自罗密士撰写的数学教科书。书中的内容并未超过伟烈亚力、李善兰及傅兰雅和华蘅芳所译的著作。这些新传入的数学知识随着自强运动期间开始兴起的数学研究和教育高潮得到了较为广泛的流传。

---

① 该条最早刊于《大英百科全书》第7版。傅兰雅和华蘅芳是据第8版译出的。关于《决疑数学》的版本，见：严敦杰．跋《决疑数学》．明清数学史论文集．421—444；王扬宗．傅兰雅与近代中国的科学启蒙．52．

② 参见：李兆华．中国数学史．333．

③ 关于江南制造局翻译馆译成的科学技术书籍，参见：王扬宗．江南制造局翻译书目新考．中国科技史料．16(2)．1995．3—18．

第二节 清末数学教育[①]

数学作为六艺之一，自周代起就被列入国学教育范围之内。自隋以后，中国传统教育模式已定型，数学成为历代国子监及钦天监的教学内容之一。唐、宋两代科举考试中还间开明算科。[②]从表面上来看，数学教育成为一种制度，成为传统教育的一个重要组成部分。其实则不尽然，它没有被真正重视。中国传统教育基本上是一种以儒家经典作为主要教学内容的伦理道德教育。中国传统受教育者的目的是修身、齐家、治国、平天下，故有学而优则仕之说。因此，很多学者读书的首务在于科举应试，专注于学问的亦只称："学者，学为儒而已；为儒无他，治经而已。[③]"钦天监等中央教学机构多以培养钦天监观测计算人员为重，很少有具创造性成就的数学专家出乎其间。

---

① 本节主要讨论官办新式学堂及民间书院中的数学教育。在清代末年，另有两类含数学课程的教育形式，即，教会学校和留学教育。清代末年，新教传教士成为中国教会教育的主力。据统计：1877年，新教传教士在中国开办各类学校247所，在校学生近6千人。至1912年，新教教会学校增至：小学堂3 708所，中学、大学堂553所，在校学生分别为：86 241人和31 384。传播宗教教义为教会学校教育的主旨，但这些学校一般亦都教授西方数学知识。从清代末年教会学校数目及在学人数的激增，亦可看到西方知识在中国传播的发展情况。关于教会教育，参见：史静寰．狄考文和司徒雷登在华的教育活动．台北：文津出版社，1991；章开源，林蔚．中西文化与教会大学．湖南教育出版社，1991；王立新．美国传教士与晚清中国现代化．天津人民出版社，1997；杰西·格·卢茨．中国教会大学史(1850—1950)．浙江教育出版社，1988．中国官派留学始于1872年。在曾随传教士出国留学的容闳的倡仪及曾国藩、李鸿章等的努力下，清朝选择120名幼童，分四批派往美国留学。由于留学监督吴嘉善及驻美大使陈兰彬等对学生在美的表现不满，1881年，大多数学生未及学成便被撤回。此后，天津北洋海军、福州船政局等派遣一些留学生赴欧洲学习，一些驻外使节亦带领少数学生至外洋学习。在这些学生中，以福州船政局派遣的学生最为出色。但留学生回国后须接受清廷为他们安排的工作，故，其中虽然有一部分数学水平非常出色，但却不能从事数学研究和教育工作。在20世纪以前，留学生对中国数学发展的影响很小。关于清末的留学教育，参见：舒新城．中国近代教育史资料．人民教育出版社，1981．161—192．

② 中国古代数学教育起源很早。《礼记·内则》中称："六岁教之数与方名，十年出就外傅，居宿于外，学书计。"《礼记》中记载西周教学内容为："教之六艺：一曰五礼，二曰六乐，三曰五射，四曰五驭，五曰六书，六曰九数。"(周礼．十三经．中州古籍出版社，1992．37．)此后各代均有数学教育。唐、宋两代还特设明算科，将数学列入科举取士内容之一。然而，唐代明算科所取之士"于从九品下叙排"，可见其所得官职之低。所以说，从本质上，数学教育并没有真正受到重视。参见：李俨．唐宋元明数学教育制度．中算史论丛．第四集．李俨钱宝琮科学史全集．第8册．223—266．

③ 裕祥．经正书院课艺序．经正书院课艺．1898年刊本．

地方教育中虽偶有将数学纳入教育范围的,如北宋胡瑗(933—1059)于湖州府学中立经义、治事二斋,其中治事斋中有“算历以明数”一门。胡瑗规定,“经义则选择其心性疏通有器局可任大事者,使之讲明六经;治事则一人各治一事,又兼摄一事”①。从中亦可见数学在其教育中的地位。一些出色的数学家也曾从事数学教育。13 世纪数学四大家中的李冶(1192—1279)、朱世杰等都曾教授过数学。但数学研究既不能为数学家带来固定的经济来源和社会地位②,又不能为他们赢得广泛的社会尊重,所以无法保证朱、李二氏的学生能够继承他们的事业。现在史料中也未见到官私教育中培养出在数学方面有突出成果的学生。明代无人能够理解李冶、朱世杰的数学教学工作便反映了他们教育的效果。

清代数学教育得到了一定程度的发展。由于康熙帝对数学的重视,清代中央数学教育有所加强。钦天监及国子监天文生中培养出一批重要的数学家,如明安图、罗士琳、陈杰等。但国子监中实际接受数学教育的人数很可能达不到国子监规定的数目。据张百熙记载,1888—1897 年间,只有 6 人于国子监治算学。③一些民间书院和私塾中也有一些数学教育。清代初年,黄宗羲在甬上证人书院,颜元在漳南书院都曾讲授过数学。梅文鼎在北京及河北坐馆期间亦专讲数学。④ 乾嘉时期,汉学一派学者在其创办及主讲的一些书院内开设数学课程,如钱大昕所主的紫阳书院,王昶(1724—1894)所主的友教书院,阮元所创诂经精舍,钱仪吉(1783—1850)所主大良书院及吴荣光所创湘水校经堂,李兆洛(1769—1841)所主暨阳书院等。此外,焦循曾为其所主家塾撰写《加减乘除释》作为教材。但这些教学机构的数学教育多是以培养通儒为目的,除紫阳书院外,其他教学机构很少培养出数学专家。且这样的教育在全国的教育中所占的比例很小。咸丰末年,刘光蕡欲学习算学,而其时“西北算失传,无从问津”⑤。可见,当时陕西实无数学教育可言。而此种情况在当时并不限于陕西一省。

可以说,清末以前,中国虽有数学教育制度,但绝大多数数学家是通过自学或私相授受两个途径学习数学的。

---

① 黄宗羲. 安定学案. 宋元学案. 浙江古籍出版社. 1990. 卷 1.56.
② 李冶是经学家,中了进士,曾做过官,但主要以教书为业。
③ 张百熙. 成钧课士录. 国子监刊本. 1897.
④ 详见本书第二章。
⑤ 刘瑞骄. 刘光蕡行状. 烟霞草堂文集. 民国间刊本.

清代末年的数学教育较以往有了质的发展。前文已述，自强的重要举措为学习西方先进的军事科技，而技术的背后却有数学、天文等理论知识。冯桂芬的说法有一定代表性："一切西学皆从算学出，西人十岁外无人不学算。今欲采西学，自不可不学算。①"于是加强数学教育便成为早期自强派领袖的共识。

清末数学教育的发展主要有两个主要方向，其一是科举制度的改革，其二是开办数学课程的教学机构的普及。首先，让我们来看看清末开设数学课程的教学机构的情况。

一、围绕京师同文馆开设天算馆的争论

清末开办的最著名的含数学课程的新式学校为京师同文馆。该馆创办于1862年，初期仅为一所语言学校。② 4年后，应奕䜣所请，京师同文馆添设天算馆。围绕着添设天算馆一事，清代高级官员间发生了激烈的争论。在中国近代史上，此事经常被表述成改革派与顽固派关于是否应该学习西方科技的一次交锋，代表改革派的奕䜣取得了最终的胜利。但仔细分析双方争论的具体内容，我们发现，这一描述很可能不能概括这场争论的主要焦点。对该争论的全面了解有助于我们看清清代末年数学教育的社会与文化背景，故本节将花些笔墨分析其过程、内容及其对西方数学在中国传播的影响。

1866年12月11日，奕䜣奏请于同文馆开设天算馆。此外，鉴于同文馆所收八旗学生"于洋文洋语，尚能领略，惟年幼学浅，于汉文文义，尚难贯串……若再令讲求天文算学等事，转恐博而不专"。奕䜣奏请"添设一馆，招取满汉举人及恩、拔、岁、副、优贡，汉文业已通顺，年在二十以外者……赴臣衙门考试，并准令前项正途出身五品以下满汉京外各官，少年聪慧，愿入馆学习者……一体与考。由臣等录取后，即延聘西人在馆教习，务期天文算学，均能洞彻根源"。③1867年1月28日，奕䜣再次上奏，解释其开办天算馆之

---

① 冯桂芬. 校邠庐抗议. 210.

② 咸丰末年，奕䜣在主持对外交涉的过程中，意识到翻译人才的重要性。1860年，广东、上海督抚派通解外国语言文字之人，携带各国书籍到京，选八旗中资质聪慧，年在十三四以下者学习外文。但当时，广东称无人可派，上海虽有其人，而艺不甚精，价则过巨。1862年，恭亲王奕䜣奏请开同文馆学习西方语言文字。同年五月，同文馆成立，开设英、法、俄三馆。招收八旗学生30名，由包尔腾、司默灵、柏林三人分别讲授英、法、俄国语言。

③ 奕䜣. 同文馆开办算学馆摺. 筹备夷务始末(同治朝). 卷46.3b—4a.

初衷,并奏上同文馆学习天文算学章程六条。其第一条称:"请专取正途人员,以资肄习也。查天文算术,义蕴精深,非夙知勤学用心之人,难以渐窥底蕴。与专习外洋语言文字之学生不同。前议专取举人、恩、拔、副、岁、优贡及由此项出身人员,今拟推广,凡翰林院庶吉士编修检讨,并五品以下由进士出身之京外各官,俾充其选。"其第六条则是要求对同文馆天算馆的学生,"优加奖叙,以资鼓励也"。对同文馆毕业人员,"均准各按升阶格外优保班次,以示鼓舞而广招徕"。[①]御批:依议。然而此折一出,即掀起轩然大波。

1867年3月5日,山东道监察御史张盛藻以"令正途科甲人员习为机巧之事"为由,首先发难[②]。3月20日,大学士倭仁(1804—1871)再奏,奏文称:"天文算学,为益甚微;西人教习正途,所损甚大。"而"古今来未闻有恃术数而能起衰振弱者也……今复举聪明俊秀,国家所培养而储以有用者,变而从夷,正气为之不伸,邪氛因而弥炽。数年以后,不尽驱中国之众咸归于夷不止"。[③]请求立罢同文馆之议。更有甚者,同年6月,候选直隶州知州杨廷熙罗举"自春及夏,久旱不雨,屡见阴霾蔽天,御河之水源竭,都中之疫疠行。本月初十日,大风昼晦两时之久"等非同寻常之灾异,称这些灾难皆由"同文馆之设,强词夺理,师敌忘仇,御夷失策所致"[④],并对奕䜣所奏拟开同文馆之理由逐条反驳。在今天看来,倭仁等反对同文馆设天算馆的理由似乎可笑,但考虑到他们所在的时代背景,他们的一些论点亦代表了当时士大夫阶层的自然反应。

仔细分析奕䜣与倭仁等关于同文馆天算馆之设的争论可以看出,其焦点并不在是否设天算一馆,而在于是否应由正途出身之人去随西人学习天算。此中包含关键的两点,其一为是否要正途出身的人学习算学,其二为是否应由西洋人任算学教习。张盛藻奏折中虽称天文算法及制造枪炮等为"机巧之事",但所反对的不过是"正途科甲"人员学习该学,张氏甚至还提出建议,"责成钦天监衙门考取年少颖悟之天文生、算学生,送馆学习,俾西法与中法,互相考验。至轮船洋枪,则宜工部遴选精巧工匠,或军营武弁之有心计者,令其专心演习,传授其法"。这样,则一来制器、天算等学学习有人,二来不令"读孔孟之书,学尧舜之道"的正途人员为同文馆高额廪饩所吸引

① 奕䜣. 酌拟同文馆学习天文算学章程六条. 筹办夷务始末(同治朝). 卷46. 26b—48b.
② 倭仁. 反对同文馆算学馆摺. 筹办夷务始末(同治朝). 卷47. 16a.
③ 倭仁. 同治六年四月奏. 筹办夷务始末(同治朝. 卷47. 24b—25a.
④ 杨廷熙. 反对同文馆算学馆摺. 筹办夷务始末(同治朝). 卷49. 13b—14a.

而丧失“气节”。杨廷熙亦称可“招取曾经学过天文算数者考录送馆，与西人互相印证”。倭仁最为反对的也是“举聪明俊秀，国家所培养而储以有用者，变而从夷”。从而他也提出自己的建议：“天下之大，不患无才。如以天文算学必须讲习，博采旁求，必有精其术者，何必夷人。何必师事夷人。[①]”

奕䜣在其第二次奏折之首称：“查此次招考天文算学之议，并非矜奇好异，震于西人术数之学也。盖以西人制器之法，无不由度数而生，今中国议欲讲求制造轮船、机器诸法，苟不藉西士为先导，俾讲明机巧之原，制作之本，窃恐师心自用，枉费钱粮，仍无裨于实际。是以臣等衡量再三而有此奏。论者不察，必有以臣等此举为不急之务者，必有以舍中法而从西人为非者，甚且有以中国之人师法西人为深可耻者。此皆不识时务也。”[②]可见，其同月第一折一出，已招非议，但奕䜣此时不仅没有退缩，反而在其第二折中将同文馆招考人员扩大到翰林院，由此招致漫天非议。

细察奕䜣坚持招收正途人员，除其奏折中所提出的同文馆现有八旗学生汉文尚不通顺，难期其成，而科甲出身人员资质较高，学习较易之外，应还有更深一层的理由。奕䜣是通过与曾国藩、李鸿章、左宗棠等往返函商后，决定于同文馆加设天算馆的，则他肯定受到了这些地方实力派对西方军事科技的认识的影响，并接受了他们有关数学为西方科技基础的观点。但奕䜣于同文馆天算馆学生的期许应该并不是机器制造专家那样简单。翰林院虽属清闲衙门，却集中着科举考试成功者中的精华，是最近天子，也是极有希望成为未来朝廷重臣的一部分。奕䜣似乎也虑及“该馆止有洋人讲贯，而中国无师表之人，恐来学者竟疑专以洋人为师，俾修弟子之礼，未免因此裹足”[③]，而于同文馆设管学大臣一名，但他所荐举的管学大臣则是在其《瀛环志略》中盛赞西方政治、文化的徐继畬。奕䜣在同治五年十一月的奏折中称：“中国之宜谋自强，至今日而已亟矣。识时务者莫不以采西学、制洋器为自强之道”，并直称“中国所当学者，固不止轮船枪炮一事”。则奕䜣在天算馆中所要讲求的西学应该不仅是西艺一端了。针对倭仁等的反对意见，同治六年三月，奕䜣称：

> 今日之局，又学士、大夫所痛心疾首者，必能卧薪尝胆，共深刻

---

① 倭仁．同治六年四月奏．筹办夷务始末(同治朝)．卷47．24b．

② 奕䜣，酌拟同文馆学习天文算学章程六条．筹办夷务始末(同治朝)．卷46．26b—48b．

③ 奕䜣．同治二年正月丙子摺．筹办夷务始末(同治朝)．卷47．7b．

励，以求自强实际，与泛泛悠悠漠不相关者不同。倭仁谓夷为吾仇，自必亦有卧薪尝胆之志，然试问所为卧薪尝胆者，姑为其名乎？抑将求其实乎？如谓当求其实，试问当求之愚贱之人乎？抑当求之士大夫乎？①

这一连串问题从表面上来讲虽说是提高士大夫阶层于国家政治中的所起的作用，其隐台词则是直斥当时空谈救国的士大夫在国家处于危急时刻的一无所用，而要培养出一批通西学的新型士大夫，即是这批正途出身，尤其是出身于翰林院的同文馆毕业生。对这批人才的优加提升，暗示了奕䜣对未来国政方向的选择。倭仁等对此应该是洞彻机关的，这也正是他们认为奕䜣此举将“驱中国之众咸归于夷”的最为深切的理由。

此外，在中国传统中，教师一向有着崇高的地位。按“天地君亲师”的排位来看，教师的地位次于“忠”、“孝”的直接对象君、亲。在师生的交往中，学生需要遵守一定的礼仪并要承担一定的道义上的义务。从礼仪上来讲，熟悉清代历史的人都清楚，自康熙朝以后，清政府屡与罗马教廷及西洋各国因礼仪问题发生冲突，清政府于此问题所坚持的原则实可谓“千金可失，寸礼必争”。如今主动让翰林出身的中国传统文化的“精英分子”去以师礼见洋人，对于传统文化熏陶出来的士大夫阶层来说显然是无法接受的。其二，师生之间的关系在中国传统文化中有着非同寻常的含义，它往往要比上司和下属之间的关系更为密切而持久，实际上政府中的派系关系很多即是以师生关系为纽带的。姑且不论奕䜣是否确实欲令在同文馆中学过西方科学文化的学生取代当时的士大夫，从而实现清代政治等的改革，令正途出身的学生拜西洋人为师，从客观上即潜伏着在未来的政府管理层形成一个亲西洋派的危险。这显然是不可不虑的。考虑到翰林院官员对全国士子的示范作用，则这不仅关系到清政府未来统治阶层的构成成分，还关系到中国文化的未来趋向。如果说过分重视礼仪问题完全是士大夫阶层目光短浅所致，对后一种危险，中国传统文人则是无法漠视的。所以，虽然他们对开办同文馆无异议，对广方言馆、福州船政学堂等不表态，却对同文馆的新章程忍无可忍，挥戈上阵了。

在与倭仁等的争辩中，奕䜣时而条分缕析，时而言辞激烈，表面上占尽上风，实际上一败涂地。首先是“自倭仁倡议以来，京师各省士大夫，聚党私

---

① 奕䜣. 同治六年三月丙辰摺. 筹办夷务始末(同治朝). 卷48. 2a—3b.

议，约法阻拦，甚且以无稽谣言，煽惑人心"，同文馆"遂无复有投考者"。至同治六年五月二十日考试时"共计投考正杂各项人员九十八名"，"到者七十二名"。而"投考诸人，流品不一"。"勉强考试，取录三十人，开馆肄业"。同治七年五月十二日对这批学生进行考核，"其中尚堪造就者，不过数人"。没有招收到奕䜣所期望的翰林、进士。天算馆开馆之初，馆中的学生并没有学习数学知识，而是随原八旗俊秀馆英国教习额布廉(M.J.O' Brien)、法国教习李弼谐(E.Lepissier)分班学习英语和法语，应招入中国的同文馆数学教授德国人方根拔(Johannes von Gumpach，？—1875)由于和总税务司赫德因对聘任合同的理解不同及其他相关事情上的矛盾，未参与同文馆的教学活动。1868年，应郭嵩焘保奏，同文馆改聘李善兰为天算馆算学教习。从表面上来讲，同文馆天算馆开馆成功，但实际上，奕䜣还是做出了最后的让步。分析倭仁之"天下之大，不患无才。如以天文算学必须讲习，博采旁求，必有精其术者，何必夷人，何必师事夷人"一语，其本质不仅在于可以求得精通算学之人才，而且尤在于可以求得可充算学教习的中国数学家。针对此点奕䜣敦请倭仁另创一馆，专用中算家任教，与同文馆共同研究。倭仁没有如奕䜣所请去搜求数学专家，而奕䜣却真地请了一位中国专家作为同文馆算学教习。至此，奕䜣于同文馆添设天算馆之争的两处关键问题上均败下阵来①。

在围绕同文馆开设算学馆的争论中，奕䜣显然低估了以倭仁、张盛藻等为代表，以翁同龢等为后盾的士大夫阶层的力量。此外，对于二千余年来闭关锁国、惟我独尊的中华帝国及历史同样久远的儒家文化及其所培养出来的传统文人来说，奕䜣的思想在当时都可谓过于革命了。此事后果则不仅影响到同文馆的数学学习，也在一定程度上影响到中国以后数十年的命运。同治十一年，瑞麟奏请于广东同文馆裁撤汉族学生并降低毕业生官阶，这与奕䜣所筹办京师同文馆天算馆原意背道而弛。但当慈禧问及奕䜣的意见时，他仅称此举"系为整顿馆务，期收实效起见，应如所请办理"。已失去了他先期的锐气。而更为重要的是，在同文馆添设天算馆之争的过程中，奕䜣必然会失去一批士大夫的支持。这很可能影响了奕䜣与慈禧的斗争中的权力天平的倾斜，从而，"自强运动"失去了一个可以在宫廷上与慈禧分庭抗礼的领袖。这一点被善于观察政治局势的曾国藩、李鸿章看得一清二楚，在后来奏请幼童留学时，曾、李绕开奕䜣及总理各国事务衙门直接上奏慈禧。则

① 张盛藻.同治六年四月奏.筹办夷务始末(同治朝).卷47.16a—b.

奕䜣于"自强运动"中的中心地位亦自此动摇。

关于京师同文馆开设天算馆的争论实际上涉及治国应该依赖仁政及儒学传统还是机器等技术、中学和西学的取舍、传统与西学的关系等等问题。关于这些问题的思考及争论贯穿于自强运动及维新运动的始终。通过对同文馆开设天算馆之争的相关文献的研究,我们可以更深刻地理解当时数学教育的文化和社会背景。

然而关于京师同文馆开办天算馆的争论对西方数学的传播的影响并非全是负面的。身为摄政王的奕䜣对西方军事技术及数学知识的重要性的反复强调清晰地传达出他对西方科学技术的态度,这无疑促使一些意在跻身仕途的学者留心西方数学及科学技术。在关于同文馆添设天算馆的争论中,数学作为西方科技的基础而亟需讲求却几成定论。除奕䜣于其奏章一再强调数学的重要性外,倭仁、张盛藻等对此亦未全盘否定。张盛藻认为"宜责成钦天监衙门考取年少颖悟之天文生、算学生,送馆学习,俾西法与中法,互相考验,至轮船洋枪,则宜工部遴选精巧工匠,或军营武弁之有心计者,令其专心演习,传授其法,不必用科甲正途官员肄习其事"[①]。倭仁称:"数为六艺之一,诚如圣谕,为儒者所当知,非歧途可比[②]"。他又称:"总之夷人教习算学一事,若王大臣等果有把握,使算法必能精通,机器必能巧制,中国读书之人必不为该夷所用。该夷丑类,必为中国所歼。则上可纾宵旰之忧劳,下可伸臣民之义愤,岂不甚善?[③]"可见,二人对数学应该讲求是认可的,且对于数学为西方军事技术基础这一点也并未反驳。而杨廷熙称:

> 历代之言天文者,中国为精;言数学者,中国为最;言方技艺术者,中国为备,如浑天仪、乾凿度、太玄、洞极、潜虚、星纪、《九章》、《三率》、《周髀》、《皇极》诸书相继而起,恐西学之轮船机器未必有如此幽深微妙矣。又况中国为人材渊薮,数理载国朝精蕴,二百余年时宪无失闰之讥,天象无昏迷之诮,是此时之天文算数较历代为尤精也。夫以中国之大,养士之久,岂无一二知天文数学之士,足以驾西人而上之者哉……
>
> 原奏称西人制器之法,无不由度数而生,又称其法本中国之

① 张盛藻. 同治六年四月奏. 筹办夷务始末(同治朝). 卷47. 16a—b.
② 倭仁. 同治六年四月奏. 筹办夷务始末(同治朝). 卷47. 24a.
③ 倭仁. 奏摺. 筹办夷务始末(同治朝). 卷48. 11b—12a.

法,特西人慎密善于运思,意以为深明天文数学无过西人。此以所见之不广也。①

他亦并不反对研究数学。通过正反两方面的论述,数学亟应讲求这一点似乎达成了共识。这便使得有志于振兴国家的学子开始学习数学。而以前无关于仕途的数学现亦可成为升官之阶,对于有些一心想博取功名的士子亦有一定的劝荐作用。所以说,同文馆天算馆的开办对于促进中国数学教育还是产生了一定的积极影响。

二、清末官办学堂的数学教育

自强运动中开设最早的传授数学知识的官办机构是上海同文馆(后改称上海广方言馆和广乐同文馆。

1863 年 3 月 11 日,李鸿章奏请在上海及广东开办同文馆。奏文中称:

京师同文馆之设,实为良法,行之既久,必有正人君子,奇尤异敏之士,出乎其中。然后尽得西人之要领,而思所以驾驭之。绥靖边陲之原本,实在于此。惟是洋人总汇之地,以上海、广东两口为最,种类较多,书籍较富,见闻较广。语言文字之粗者,一教习已足,其精者务在博采周咨,集思广益,非求之上海、广东不可。故行之他处,犹一齐人傅之之说也,行之上海、广东,更置之庄岳之间之说也。臣愚拟请仿照同文馆之例,于上海添设外国语言文字学馆。

更进一步,李鸿章奏折中还称:

彼西人所擅长者推算之学,格物之理,制器尚象之法,无不专精务实,著有成书,经译者十才一二,必能尽阅其未译之书,方可探赜索隐,由粗显而入精微,我中华智巧聪明,岂出西人之下,果有精熟西文者,转相传习,一节轮船火器等巧技,当可由渐通晓,于中国自强之道,似有裨助。②

同年,上海同文馆开课,成为自强运动领袖创办的最早的将数学列为专课的学校。1867 年该馆改名上海广方言馆,1869 年移入江南制造局③。

上海同文馆最初章程规定选取“年十四岁以下,资禀颖悟,根器端静之

---

① 杨廷熙.反对同文馆算学馆摺.筹办夷务始末(同治朝).卷 49.16b—17a.

② 李鸿章.奏办广方言馆摺.筹办夷务始末(同治朝).卷 14.故宫博物院影印本.3b—4b.

③ 熊月之.西学东渐与晚清社会.336.

文童","择时文之通顺者"四十名为肄业生。延请"英国学问通贯者二人为西教习","品学兼优绅士一人为总教习,举、贡、生员四人为分教习,分经学、史学、算学、词章为四类,而以讲明性理、敦行立品为之纲"。此外,鉴于"西人制器尚象之法,皆从算学出。若不通算学,即精熟西文,亦难施之实用。凡肄业者,算学与西文并须逐日讲习,其余经史各类,随其资禀所近分习之。专习算学者,听从其便"①。数学与外语一样,从一开始就被列为广方言馆的必修课,且馆中允许学生专习算学,从而赋予数学教学以特殊地位。1869年,广方言馆搬入江南机器局。冯焌光、郑藻如等又重新拟定了课程10条,其中第6条为习算学,称"孔门六艺,不废书数。况西人制造日新月异,俱从算学而出……兹拟每日西学之暇,午后即学习算术,无论笔算、珠算,先从加、减、乘、除、开方入手。中学则熟习算经十书,前贤代有著述,皆可流览;西学则几何、重学、代数诸书,循序而渐进焉……如性质所近,径免课文,专习算学亦可。至测量、制造之法,如学有端绪,即可引与考究"。其第9、10两条称"学生分为上、下班。初进馆者先在下班,学习外国公理公法,如算学、代数学、几何学、重学、天文、地理、绘图等事,皆用初学浅书教习"②。广方言馆应该是以教授初等算术、代数学和几何学等与西方数学知识为主的。广方言馆算学教习计有陈旸(1806—1863)、时曰醇(1807—1880)席淦、刘彝程、沈善蒸(副教习)等③。

---

① 李鸿章. 上海初次议立学习外国语言文字同文馆试办章程十二条. 朱有瓛编. 中国近代学制史料. 第一辑. 上册. 216—218.

② 冯焌光,郑藻如. 计呈酌拟广方言馆课程十条. 中国近代学制史料. 221—224.

③ 陈旸,字子璠,江宁人。"有异禀,读书数过,终身不忘"。"经学、史学、小学、天文、舆地、诗、古文词,旁及词曲、武备、方术,靡所不习,而尤精于算学.惟不工制艺试帖、楷书。屡踬大小试,年二十有七始受知于廖公鸿荃入江宁学"。后应课惜阴书舍,为冯桂芬所赏识,延其绘苏州地图。冯桂芬曾与陈瑒共同研究《代微积拾级》,并合著《西算新法直解》。冯氏自称,该书以陈氏出力为多。1863,冯桂芬助李鸿章创办上海同文馆,陈瑒被聘为首任算学教习。(见:冯桂芬. 陈君传. 1519;冯桂芬. 西算新法直解序.)时曰醇,字清甫,嘉定人。少时入监,专治九数。食贫志学,不坚其志。为李兆洛所赏识。时氏著有《百鸡术衍》二卷、《今有术申》一卷、《求一术指》一卷等书。其中以《百鸡术衍》影响较大。该书28题,主要内容为三色差分,也即三元不定方程组的解法。(见:诸可宝. 时曰淳. 畴人传三编. 卷5. 16b—18a;李兆华. 时曰醇《百鸡术衍》. 数学史研究文集. 第二辑. 123—132.).沈善蒸,字粒民,浙江桐乡县人。清监生,袭职云骑尉. 1890任上海广方言馆副教习,1898年任求志书院算学斋长。沈善蒸编著有《广方言馆课艺》、《造句股术无零数法》、《火器真诀解证》、《解代数》等。(见:贾步纬. 上海广方言馆算学课艺序. 上海广方言馆算学课艺. 上海著易堂刊本).

广东同文馆于1864年6月25日正式开馆。1864年7月13日，两广总督毛鸿宾奏上广东同文馆章程15条，规定广东同文馆“肄业生额设20名，内旗人16名，汉人4名”。择“二十岁以下，十四岁以上”的世家子弟之聪慧者入学。聘请“能通算学，有裨西学之实用”的西洋教习、汉人教习各1名，“于省城大北门内朝天街，租赁场屋二所”作为校舍。[①]广东同文馆最早汉文总教习为吴嘉善，英文教习为美国人谭顺(Theos Sampsom)，早期规定学生选八旗子弟16人，汉族世家子弟才堪造就者4人，同治七年汉文总教习由刘彦扬接任。

广东同文馆总教习吴嘉善为清代末年非常活跃的数学家。吴嘉善，字子登，江西南丰人，1852年中进士，改庶吉士，散馆授编修，其间与徐有壬共治算学。1860年至上海，与李善兰、王韬等交游，并学习西方照相等技术。[②]咸丰末年，吴嘉善至长沙，结交丁取忠，后又至广东，交邹伯奇、董祐诚等人。1864年，吴嘉善成为广东同文馆首任汉文总教习。1867年离任。《南丰县志》称吴嘉善“为学深思刻苦，于书无所不读，而独能见其大。尤好习外洋文字，潜心玩学，虽不通其语言竟能翻译。其余化学、算术、机械皆得之文字中，不假指导，比验无弗合”。吴嘉善著有“《算书廿一种》，《翻译小补》梓行于世”[③]。从吴嘉善的著作可以看出，他对中国传统数学方法及传入的平面三角、球面三角、几何测量及代数方法均很熟悉。[④]1872年李善兰序华蘅芳《开方别术》称：“余所译所著各种算书，自谓远胜古人，当今之世，能读而尽解之者，惟吴太史子登及华君尔”。[⑤]李善兰在为华氏所著书的序中盛赞吴嘉善，足见其对吴氏数学水平之推崇。

京师同文馆天算馆的数学教育是从1868年李善兰任数学教习后才正式开始的。当时，适值上海同文馆及广东同文馆开办已满3年，各自将馆中较为出色的学生咨送北京。这些学生与原在京招收的学生一起成为京师同文馆天算馆的早期学生。

1876年，京师同文馆总教习丁韪良(W.A.Martin，1727—1916)会同各馆教习，拟就两种同文馆课程。其一为由“洋文而及诸学”者，即兼习外语及汉

---

① 毛鸿宾．广东同文馆章程．筹办夷务始末(同治朝)．故宫博物院影印本．

② 王韬．王韬日记．中国近代人物日记丛书．中华书局，1987．134—156．

③ 赵惟仁纂．黎广润辑．吴嘉善传．南丰县志．1924年刊本．

④ 吴嘉善．吴氏算书二十一种．白芙堂算学丛书本．

⑤ 李善兰．开方别术序．开方别术．

文、算学、格致各科的，学期 8 年。

首年：认字写字，浅解辞句，讲解浅书。

二年：讲解浅书，练习文法，翻译条子。

三年：讲各国地图，读各国史略，翻译选编。

四年：数理启蒙，代数学，翻译公文。

五年：讲求格物，几何原本，平三角，弧三角，练习译书。

六年：讲机器，微分积分，航海测算，练习译书。

七年：讲求化学，天文测算，万国公法，练习译书。

八年：天文测算，地理金石，富国策，练习译书。

其年齿稍长者，不习外语，仅藉译本而求诸学者，学期 5 年。

首年：数理启蒙，九章算法，代数学。

二年：学四元解，几何原本，平三角，弧三角。

三年：格物入门，兼讲化学，重学，测算。

四年：微分积分，航海测算，天文测算，讲求机器。

五年：万国公法，富国策，天文测算，地理金石。①

此外尚有经学为贯穿始终的课程。从功课表中所见，同文馆的数学教学以西法为主，包括当时传入的代数学、几何学、微积分学等内容。李善兰任同文馆算学教习长达 15 年，李善兰去世后，同文馆培养出来的学生席淦接任同文馆算学教习。

京师同文馆和上海广方言馆都出版过算学课艺集。从这两部试题集解中，我们可以看出两所学校的教学内容。

京师同文馆《算学课艺》4 卷，收入馆中早期 56 名学生的课艺。卷一有 44 题，其中天文学问题 18 题、物理学及测量等问题 26 题。其天文学题多为预测日食及计算各星经纬度及北极去日度数等内容。物理学问题中含测曲线及曲面重心、杠杆原理应用问题、运动速度及加速度问题、浮力问题、动静滑轮问题等，几乎涉及李善兰所译《重学》中包含的全部内容。此外还有部分测量问题，其中包括了一些有关炮弹射程、轮船航海等为当时所重视的实际应用问题。卷二为几何类问题，主要有解三角形及其它平面及立体几何问题，并含部分传统垛积问题。虽然部分算题的题目还保留中国传统算学中实际问题的形式，但其解题方法通常是以符号代数方法得出一般结论后，

---

① 丁韪良．同文馆课程表．转引自：朱有瓛．中国近代学制史料．第一辑．上册．71—72.

再代入具体数字得出针对原题的答案。书中垛积术10题,多数为三角垛问题,其程度较浅。本卷有的问题涉及解不定方程,书中选入课艺均以《代数学》中介绍的方法解不定方程。《算学课艺》卷三中的40题均为《测圆海镜》类问题。然而,《算学课艺》中选入的课作都是以代数方法解决这些问题的①。卷四为勾股问题及各类应用杂题,其解题方法也是多采用符号代数方法,且有些题目不是引用传统数学中已经有的勾股恒等式,而是引用了西方数学中的边角关系及三角函数解题。书中所含涉及多元高次方程组的问题也多是以《代数学》中介绍的符号代数方法表述,并以代数恒等变换进行消元的。只有王文秀于第28题完全使用筹算表示法,并利用李善兰于《四元解》中所使用的四元消元法。②

虽然同文馆《算学课艺》中的多数题目保存了中国传统算学中应用问题或《测圆海镜》内问题的形式,但在其设题内容及所选用方法上多以西方数学为主。从书中内容可以看出,京师同文馆学生应学习过《重学》、《代数学》或《代数术》、《垛积比类》、《测圆海镜》、《四元解》以及一些有关几何学、天文学、平面三角学、弧三角学等内容的书籍③。

同文馆1876年课程表中含有微积分内容,但同文馆《算学课艺》并无微积分方面的算题。1883年,同文馆出版了《格物测算》。该书很可能是根据在格物测算课程上丁韪良和他的学生的问答及学生课艺编辑而成。《格物测算》中涉及求微分、求积分、求高重微分及利用微积分求曲线长度、曲面面积、旋转体体积等等,丁韪良在书中直接应用求微分公式,可以证明上述7名同文馆算学学生都是学过微积分的。书中涉及微积分内容并未超出《代微积拾级》水平,书中多次引用《代微积拾级》中的定理,如卷一第六章有"依《微分》十四卷十一款例"一语,引用《代微积拾级》第十四卷"第十一款,曲线体积之微分等于底面乘母曲线横线之微分"④,求旋转体体积。等等,可以证明,《代微积拾级》即是同文馆天算馆教材。

---

① 从这一点亦可看出清代末年数学西化的倾向。关于代数方法在清末的传播及传统代数方法消融过程,详见本书第五章。

② 席淦,贵荣.算学课艺.

③ 笔者曾于天津图书馆阅得一抄本《数学本原》,从书中可知为同文馆算学生学习笔记。其中大段抄录《数理精蕴》中的原文,可见《数理精蕴》应该也是馆中学生的重要学习参考书。佚名著者.数学本原.清末抄本.天津图书馆藏.

④ 丁韪良.格物测算.京师同文馆刊本.

综上所述，虽然同文馆课程表中还保留着一些传统数学的科目，但同文馆的数学教学主要是以传入的西方数学知识和方法为主的。同文馆早期毕业的学生中，席淦、贵荣、陈寿田、杜法孟、汪凤藻、熊方柏及后来算学生萧开泰等均曾从事过数学教育工作，并各有数学文章、课艺及著作传世。通过他们，西方数学知识得到更为广泛的传播。

除三所同文馆之外，曾国藩、李鸿章、左宗棠、丁宝桢等亦于各地建起各类军事学堂及实业学堂。1866 年，闽浙总督左宗棠奏请于福建船政局附设船政学堂。1874 年，上海江南制造局设立了操炮学堂。1876 年，两广总督刘坤一倡议建立广东西学馆，聘请方恺任算学教习，1881 年张之洞奏请将其扩建为广东水陆师学堂。1880 年，直隶总督李鸿章奏请在天津机器局建设水师学堂，1881 年学堂正式落成。1885 年，李鸿章奏请设立天津武备学堂，华蘅芳、卢靖等先后任教于此。1889 年，丁汝昌在山东威海卫创设水师学堂。1890 年，北洋水师于旅顺口鱼雷营内设立鱼雷学堂。1890 年，两江总督曾国藩奏请在南京设立江南水师学堂。1895 年，张之洞于南京设立湖南陆师学堂。1896 年，袁世凯奏请于天津设立新建陆军行营武备学堂（又名直隶武备学堂）。1897 年，张之洞奏请在湖北武昌设立湖北武备学堂。在这些学堂中，数学，主要为西方数学知识，均被列为教学内容。

三、清末书院的数学教育

除自强运动领袖开办多所有数学教育的新式学堂，培养出一批通西方数学的学生之外，清末一些书院中也从事数学教育。

书院是中国传统教育机构之一种，其名称最早见于唐代，但当时的书院多为私人藏书或读书之用，一般不具有教学职能。至南宋时期，书院在数量上和教学制度的完备上都有很大的发展。朱熹（1130—1200）的考亭学派、张栻（1133—1180）等人的湖湘学派、陆九渊（1139—1193）的象山学派、吕祖谦（1137—1181）的金华学派的哲学思想及理论均是借书院为基地得以广泛传播的。元代及明代初年的书院教育皆以程朱理学为主。正德四年（1509），王守仁（1472—1528）就讲于贵州文明书院，提出并讲授了他著名的“知行合一”理论。王氏后来分别于江西白鹿洞、浙江稽山、广东敷文等书院讲学，宣传其哲学思想。其弟子亦纷纷以书院为阵地进行讲学活动。至明代末年，书院讲学中讨论辩难，指陈时事，东林书院即为其代表。明末清初，政府明令禁止新创书院，但在恢复旧有书院等方式下，书院教育仍较活跃。

是时黄宗羲、顾亭林、颜元、陆世仪等皆于书院讲学。由于对晚明空谈心性的讲学产生反动，他们强调读经、致用两个方向，在书院中兼讲数学。黄宗羲的甬上证人书院及颜元(1635—1704)的漳南书院都曾有过数学教育。但此后书院教育多转以举业为重，政府亦对书院表现出一定的宽容。1733，雍正帝彻底解除了对于书院建设的禁令，并谕令各督抚于省会设立书院。清代的府、县官员及学政等亦往往捐资创办书院或亲至书院讲学，出现了书院发展的高峰。“然当时所设立书院，率为士子课习制艺之所，兼设古学，或为师儒讲习理学之地，其治经史考证之学者盖寡”，[①]而书院自由学术之风亦渐趋没落。所以清代虽书院林立，但其中大多数已由补官学之不足沦为官学附庸。乾嘉期间，阮元等汉学一派学者及官员创办诂经精舍、学海堂等不以举业为重，专注于经史考据的书院，这些书院在沉寂的书院教育中独树一帜，对清后期书院的发展有一定的影响。钱大昕于紫阳书院，阮元等于诂经精舍及李兆洛于暨阳书院等均讲授过数学知识。

历史上，书院教育内容及方式常常会异于官办教育，如宋儒以“道德、仁义、圣人、体用为政教之本”，“以异于进士场屋之声律”；王阳明倡“良知之学”“针对当时章句训诂功利之见”，[②]从而带动学术风气的转变。但书院教育与中国其他传统教育并无本质上的区别。历史上教授过数学的书院亦仅占书院数目的极少数。清代末年，出现了一批讲授数学课程的书院。早期开设数学课程的书院中，数学教育最为突出的是求志书院。

1878 年，上海道冯焌光筹库银 2 万两创建求志书院。该书院分经、史、掌故、词章、地舆、算学六斋，经学斋斋长钟文蒸、俞樾，词章斋斋长俞樾，掌故斋斋长高骖麟、杨泗孙、孙锵铭、宋存礼，算学斋斋长刘彝程，舆地斋斋长张焕纶，史学斋斋长孙锵铭、宋存礼，均为一时之选。其“课规”规定：“六斋每季各命题四，听人备卷投交。以教谕为监院，由学署收卷发奖，奖由巡道捐廉”。[③]求志书院办学之初，曾为新学表帅，上海县续志称“远近闻风兴起”，[④]宁波辨志文会即仿求志书院所办。甲午以后，求志书院转形陈旧，于 1901 年停办。

---

① 卢湘父.万木草堂忆旧.

② 钱穆.引论.中国三百年学术史.北京:中华书局.1984.2—7.

③ 俞樾.求志书院课规.上海县续志.民国间刊本.

④ 俞樾.求志书院.上海县续志.民国间刊本.

求志书院算学斋斋长刘彝程,字省庵,江苏兴化人,太学生。其父刘熙载为清末重要经学家。刘熙载博学多才,"上自六经、子、史、天文、算法,字学、韵学","下至词曲及仙释家言"靡不通晓。在天文数学方面,刘熙载曾撰有"天元正负歌"四首及《星野辨》一篇。[①] 刘彝程,"性沈静善思,尝务以实学致用于世。熙载因其材,弱冠示以《加减乘除歌》"。[②]1864 年,刘彝程随侍其父赴任广东,途中于长沙结识了著名数学家丁取忠,并读到董祐诚、项名达、徐有壬、戴煦等人著作,"惊为得未曾有"。后又于广东结识了邹伯奇。同治五年,熙载引病至沪,刘彝程又结识了李善兰,后李善兰在致华蘅芳信中称刘为"后生可畏者"[③]。此后,刘彝程"悉心于弧矢之学,不数年,自撰著《割圆阐率》(一卷)、《开方阐率》、《对数问答》(一卷)"。[④]刘彝程为傅兰雅与华蘅芳合译《代数术》、《微积溯源》和《三角数理》任校算。华蘅芳在《微分溯源》序中称:"书中代数之式甚繁,校算不易,则刘君省庵之力居多"。[⑤]由此他对当时传入的西方数学知识有了较为全面的了解。1873 年,冯焌光慕名邀刘彝程任上海广方言馆算学教习。1876 起,刘彝程兼任求志书院算学斋斋长。1898 年,刘彝程以老病辞去求志书院数学斋斋长之职,但还继续于上海广方言馆任教。此外,1881 年,刘熙载去世,龙门书院学生公建融斋书院,刘彝程曾为该书院评阅算学课卷。刘彝程著有《上海求志书院算学课艺》一卷,并与沈善蒸合编《广方言馆算学课艺》一卷。1898 年,刘氏收集历年课题及自演之稿编为《简易庵算稿》四卷。他还另有三部著作,《亥加人开立方解证》,《元程九章算略》(与沈善蒸合编)及《简易庵九章实义》(1901)。

作为上海广方言馆、求志书院和融斋书院的数学教习及斋长,刘彝程培养出一批学生。他的教学内容及对中、西数学的态度必然会对他的学生产生很大的影响。下面,我们来看一下刘彝程的教学内容。《简易庵算稿》是刘彝程编辑的他于求志书院任教 22 年所出的季考试题及其自撰的解答。从该书的内容可以看出求志书院数学教育的内容。《简易庵算稿》四卷,全

---

① 李恭简修.魏俊.任乃庚撰,刘熙载传.续修兴化县志.1943 年铅印本;萧穆.刘融斋别传.续碑传集.清代碑传全集.上海:上海古籍出版社.1987.887—888.

② 李恭简修.魏俊.任乃庚撰,刘彝程传.续修兴化县志.1943 年铅印本.

③ 李善兰.致华蘅芳.转引自:严敦杰,李善兰年谱订正及补遗.明清数学史论文集.江苏教育出版社.1990.478.

④ 刘彝程.简易庵算稿序.简易庵算稿.江南制造局刊本.1900.

⑤ 华蘅芳.微积溯源序.微积溯源.江南制造局刊本.1874.

书245题,内含存题39,余206题有题、有解、有证。《简易庵算稿》涉及数学内容很广,计有:三角,76题;测圆,30题;方程,29题;整数勾股及二次不定方程,28题;垛积,25题;平面及立体几何,23题;幂级数,10题;对数,9题;连比例,5题;勾股术,5题;代数杂题,3题;衰分,1题;排列组合,1题;物理,1题。[①]其中三角、方程、平面及立体几何、幂级数、对数、连比例、代数等均是西方数学内容。与同文馆《算学课艺》中的"测圆"类问题类似,《简易庵算稿》中的此类问题也是以符号代数方法求解的。

清中叶以来,整数勾股形问题引起了包括李善兰在内的一些数学家的重视。[②]刘彝程在这方面的工作尤为突出,得出了一些新的成果。他还将整数勾股形及勾股术的方法用于解高次不定方程组,同时,他又以《代数术》中介绍的西方不定方程解法用于解整数勾股形。[③]《简易庵算稿》中的垛积类课题大都保存了传统垛积类题目的形式,刘彝程的解题方法应属传统数学方法范畴。[④]但1890年后,刘彝程开始以符号代数表达垛积公式。刘彝程的学生崔朝庆、张爔进一步利用符号代数法证明和推导垛积公式,使得这一传统数学课题被代数化。[⑤]《简易庵算稿》中还含有复数开方等在当时很少有人论及的数学内容。从《简易庵算稿》的内容可以看出,求志书院的教学中虽然还有一部分传统数学知识,但其主要教学内容为传入的西方数学知识[⑥]。

求志书院的算学教育培养出一批数学家,刘彝程学生徐谦称"方今能算之士半出先生门下",[⑦]此语虽有夸张之虞,但亦可见其确有出众的教学成果。刘彝程在《简易庵算稿》序中称:"历年课艺佳作綦多,其尤可称推许而素识者,如支雯甫(宝枬)、沈粒民(善蒸)、陈仲周(维祺)、崔聘臣(朝庆)、华若溪(世芳)、缪秋澄(朝铨),其未识面而知名者如汤子寿(金铸),其素识而

---

① 刘彝程.简易庵算稿序.简易庵算稿.江南制造局刊本.1900年.

② 参见:钱宝琮.中国数学中之整数勾股形研究.

③ 田森.清末数学家与数学教育家刘彝程.数学史研究文集(李迪主编).第三辑.117—122.

④ 关于《简易庵算稿》,详见:田森.刘彝程〈简易庵算稿〉研究.天津师范大学硕士论文.1992.关于刘彝程的垛积术成果,见:田森.刘彝程垛积术研究.数学史论文集(李迪主编).第五辑.70—81.

⑤ 详见本书第七章。

⑥ 关于求志书院及其数学教育,详见:田森,《简易庵算稿》研究.关于刘彝程,详见:田森,清末数学家与数学教育家刘彝程.

⑦ 徐谦.简易庵算稿跋.简易庵算稿.江南制造局刊本,1900。

已逝者如廖子忠(嘉绶)。”①上述诸人后均为清末数学专家并皆有著述传世,其中支、沈、崔、华、汤、廖后亦任数学教师。由于求志书院课试为面向大众,所以我们不能肯定以上诸人是否均曾肄业于该书院。刘彝程称汤金铸素未谋面,显然非其入室弟子。沈善蒸为上海广方言馆算学副教习,不应算作求志书院正式肄业生。缪朝铨自称:“余之习数也无师,皆从暗中摸索而得,”②应不是求志书院及刘彝程的学生。但华世芳、陈维祺及崔朝庆等都曾在求志书院学习。

华世芳(1854—1905),字若溪,江苏无锡人,华蘅芳之弟。1885年拔贡生,就职直隶州判。举业之暇,披览华蘅芳早年所读算书,渐通算学。后应求志书院算学课试,“题有艰深奥赜猝不易解者,”“悉能洞晓其理”③,由是“善算之名遍播士林”。江苏学政黄体芳闻其名,调入南菁书院肄业。后应张之洞之聘,任湖北自强书院算学教习。1896年主讲龙城书院,以经、史、舆地、算学四门课士。1897年起兼主南菁书院、马洲书院算学。龙城书院改为高等小学堂后,华世芳成为首任校长。1904年“正月就上海南洋公学总教习,四月入都充商部高等实业学堂算学教员,口讲指画,不辞劳悴,日课之外复编译讲义,务以详明晓畅,启发后来。乃书未及竣,遽患肺疾殁于学舍。”华世芳著有《恒河沙馆算草》,其中《答数界限》专论解不定方程问题。此外尚有数种算稿存于家。④

陈维祺于1889年编成《中西算法大成》。该书仿“《数理精蕴》之例,取新旧著译各种汇成一编,删繁订误”而成。共收入数学书籍26种100卷。包括了当时中国传统数学及传入的西方数学知识的主要内容。《中西算法大成》由刘彝程鉴定,求志书院其他肄业生“叶君子成,朱君吉臣鹤汀,李君煜廷”及“海盐于君衡南”均参与了该书的编缉、校订、绘图等工作。可以说该书是求志书院师生集体工作的成果。1889—1898九年间,“各书坊私用原本缩小翻印,三次行销至七千部之多。”⑤该书于光绪1901年重印。由其印数我们即可以看出该书在清末的流传情况。

求志书院尚有其他算学学生,其中叶耀元(即上述的叶子成),吴县人,

① 刘彝程.简易庵算稿序.简易庵算稿.江南制造局刊本,1900年.

② 缪朝铨.秋澄算稿自序.秋澄算稿.1892年刊本.

③ 华蘅芳.恒河沙馆算草序.恒河沙馆算草.1885年华氏刊本.

④ 杨模.锡金四哲事实汇存.1910.

⑤ 闵廷德.中西算法大成禁止私自翻刻启示.中西算法大成.1901年铅印本.

著有《形学补编》、《测圆海镜图解》二卷，[①]《勾股》两本，并编有《新学报》，报中刊有很多数学内容。冯澂著有《强自力斋算学丛书》，并曾任南菁高等学堂西学课长。

前文中介绍的京师同文馆、上海广方言馆、广东同文馆及求志书院均是由自强派官员兴办新式学堂或书院，任教于这些教学机构的教师均对当时传入中国的西方数学知识有很好的了解。正因为如此，这些学校培养出一批通西方数学的学生。这些学生毕业后，或者任官，或者任教，或者著书立说，通过他们的提倡和工作，西方数学得到了进一步普及。

清代末年，除洋务派官员开创了一些教授数学课程的书院外，一些学者亦在传统书院中教授数学知识。南菁书院就属此类。

南菁书院，1884 年由江苏学政黄体芳[②] 捐廉倡议，左宗棠捐集公款二万两白银建成。该书院的教学宗旨为“专课经学、古学，以补救时艺之偏”。书院亦讲解性理之学及天文、算学、舆地、史论诸科，这些科目都是别附于经学、史学之中的。黄体芳在江苏境内选择一些出色的学生入南菁书院学习。曾就学于求志书院的华世芳和崔朝庆以精通算学被其选入。但南菁书院的历任山长多不精于数学，所以，书院中的数学教育水平并不高。[③]

1889 年，南菁书院山长黄以周刊成《南菁讲舍文集》，书中收录南菁书院课作中“深训诂，精考据，明义理之作”若干篇，及部分赋诗杂作。黄氏于

---

① 叶耀元．形学补编．古今算学丛书．1898 年．算学书局石印本．

② 黄体芳（1832—1899），清浙江瑞安人，字漱兰，1863 年会元，选庶吉士。光绪六年以詹事府少詹任江苏学政。黄体芳频频上书言时政得失，曾弹劾使俄大臣崇厚误国，洪钧所译地图舛谬，英大臣赴赛会有失体统，并在中法战争时上疏弹劾李鸿章。黄体芳开办南菁书院的目的是因为“帖括取士，上求下应，士鲜明经”，所以南菁书院虽开算学等科，但与自强运动中所办新式书院有明显不同。

③ 南菁书院历任山长有张文虎、黄以周、缪荃孙、林颐山、王亦曾、陈昌伸。改设高等学堂后历任校长有丁立钧、丁立瀛、刘奉璋、宋育人。其中仅首任山长张文虎以数学著名。张文虎（1808—1885），字孟彪，又字啸山，南汇周浦人。“雅不喜帖括，颇肆力于诗古文辞。”道光六年补邑诸生。壬辰（1832）大比，“题诗号舍而出，自是不复应试。”（诸可宝．张文虎．畴人传三编，卷 6．13—16b．）。张文虎与李善兰、顾观光等相友善，曾共同研究数学。1863，经李善兰引荐，他以精通算学入曾国藩幕。（曾国藩．曾国藩日记．曾国藩全集．岳麓书社）。张文虎曾参与校订《守山阁丛书》、《小万卷楼丛书》等，并校过多种算书，具有一定数学水平。但其数学方面的著述多为数学史或数学名词训诂类内容（张文虎．舒艺室随笔．1874 年刊本）。黄体芳创办南菁书院时，延请张文虎主讲席。张“再三辞不获，秋七月赴江阴，冬十一月旋里”。（闵萃详．张先生行状．舒艺室随笔．1874 年刊本）由于他主持南菁书院的时间很短，他对书院中的数学教育起到的作用应该非常有限。

其序言中对编缉是书标准作出如下阐述:“凡文之不关经、传、子、史者黜不庸论,之不关世道人心者黜不庸好,以新奇之说苛刻之见自炫而有乖经史本文事实者黜不庸在。”①《南菁讲舍文集》六卷,共收入62个学生的136篇课作,多为经史方面内容,无一篇涉及时事及西学内容。仅崔朝庆所撰的两篇为数学内容,且这两篇讨论的问题亦属中国传统数学范畴②。1894年,黄以周又编成《南菁文集》二集六卷,皆释经论史之作,无算学题。

1894年,龙湛霖选择学生中最优者为正、副斋长。③崔朝庆被选为数学斋长。同年,政府命各省大小书院一律改为中西兼习之学堂,当时江苏学政瞿鸿禨以南菁虽在江阴县治,而入院肄业者乃全省人才所萃,奏请照省城书院例改办高等学堂。④1896年,南菁书院“加课西学”。原求志书院肄业生冯澂任西学课长。

1894年,溥良选南菁书院1891—1894年间学生札记,刊成《南菁书院札记》。其中与数学内容相关的有崔朝庆的《读〈四元玉鉴〉记》一卷、《读〈代数术〉记》一卷,及韩保徵的《盈朒细草》一卷、张东烈《代数盈朒细草》一卷。数学内容所占比例已明显增大,且其中两种为介绍西方数学方法之作⑤。1901年,丁立钧编刻《南菁文钞》3集,收录自1899—1901年南菁大学堂学生课作160篇。丁氏于其序言中称:此集文钞“文多指陈世务,辞气激宕,视前刻稍不侔意”。此集中录有:“书盐钱论后”、“西国国债考”、“沿海形势今昔异宜论”、“西国听讼用律师论”、“论日本变法”等多篇与当时政治、时事等密切相关,与黄以周所定书院文集的编辑方针明显不符。作为南菁书院早期肄业生,丁立钧对此集的内容亦并不满意,叹曰:“言者心声,文章之事关世变之迁流欤?虽然,何其速也。世运之隆也,其文多高简,又音节和雅可诵。及既衰,每辞繁数而意危苦,有历历不爽者。然南菁文之初刻也,岁己丑距今十二年,再刻岁甲午,距今七年,不应先后歧异若此。”但他亦称:“人世是非理乱之故,本至难言,草野之夫抒所闻见,冀一效其款款之愚者,大都意有所激,未必尽中事理,然蒙以为削之不若存之。何也,人子于父母之疾无不愿得良药以疗之,然三世之医不可得,则虽告有良药终亦迟回疑虑,而莫敢

① 黄以周.南菁讲舍文集序.南菁讲舍文集.1889年刊本。

② 黄以周辑.南菁讲舍文集.1889年刊本。

③ 陈思,等修.缪荃孙,等纂.南菁书院.江阴县续志.中国方志丛书.成文出版社影印.卷6.1920.

④ 陈思,等修.缪荃孙,等纂.南菁高等文科第一类学堂.江阴县续志.卷6.1920.

⑤ 傅良主编.南菁札记.江阴使署刊本.1894.

以轻试。及疾之既亟则不暇顾矣,故慎药孝也,疾既亟,则皇皇焉,博求方药以冀夫疗之,或得一当,又人子之至情,不得苛其骛乱者也。"算是对其未能遵守其师黄以周之初衷的一个解释。此集十六卷,其中数学内容占四卷,内容涉及中国算学的发展,微积分、代数学、方程术、圆锥曲线、整数勾股形、尖锥术、对数、平面三角、勾股术、圆问题等数学内容。其学习数学之学生已明显增多,所涉及数学内容亦更为广泛,且多为西方数学内容。①

由南菁书院的数学教育可见,至1896年,像南菁书院这类保守的传统书院也已经以西方数学为主要的教育内容了。这意味着西方数学已经成为中国数学教育的主要内容。② 数学教育的广泛普及以及数学教育内容的西化标志着中国数学西化已由数学家的个人行为变成全社会的普遍行为。

除上述两所书院外,还有一批书院或书院性质的教学机构开设了数学课程,尤其是甲午海战之后,很多传统书院开始开设数学课程,如杭州求是书院、上海融斋书院、上海格致书院、广东佛山书院、常州龙城书院、武昌两湖书院、泾阳味经书院、长沙湘水校经堂、浙江上虞算学堂、广东西学馆、石鲸书院、西安游艺学塾、江西友教书院、宁波辨志文会、广东学海堂等等。③

1898年6月,光绪帝谕内阁"将各省府厅州县现有之大小书院,一律改为兼习中学西学之学校"④。此后,湖北创设自强学堂,湖南设立长沙时务学堂,直隶先后设立保定畿辅学堂,天津集贤书院改为北洋高等学堂,江苏南京储材学堂改为江南学堂,江西南昌友教书院改为算学堂,贵州改学古、经世二书院为学堂,浙江湖州、绍兴、温州成立崇实学堂和中西学堂,广东成立时艺学堂,四川成都和奉天均成立中西学堂,山西太原成立储材馆等等。同年,京师大学堂正式成立。戊戌变法失败,慈禧以书院学堂名异实同为由,取消书院改学堂之令,各地书院还继续授课,但已多有所改革。1898年四川学政吴庆坻通饬全省曰:"拟大为变通所属各书院官师月课,一律改课时务策论,如大沿革、中外交涉以及天文、舆地、兵谋、制造、测算,分门命题,

---

① 丁立钧主编.南菁文钞.三集.1901年刊本.

② 虽然南菁书院一直鼓励数学学习和研究,但相对于仅习举业的官方和民间学校来说,像南菁书院这样由著名学者创办、主持,有着明确的教育和研究目标的传统书院更难在教学方向有所变革。正因如此,该书院对西方数学知识的取舍更能反映当时学者对西方知识的态度。

③ 关于清末书院的数学教育,详见:田淼.清末书院的数学教育;Tian Miao. Eductaion of Mathematics of traditional Academies in Late Qing China.251—267.

④ 光绪帝.诏定国是.光绪朝东华录.第四册.4093.

不得再课时文帖试”。[1]1901 年，慈禧太后于西安颁发兴学诏书，“著各省所有书院，于省城均改设大学堂，各省及直隶州均改设中学堂，各州县均改设小学堂，并多设蒙养学堂”。为解决师资问题，各地还纷纷办起师范学堂。数学成为这些大、中、小学堂及师范学堂的必修课程。此前翻译的《代数备旨》、《笔算数学》、《代形合参》、《八线备旨》等书成为这些学堂的通用教科书。《笔算数学》重印了 30 余次，《代数备旨》等亦被印了 10 余次。至 20 世纪 20 年代，留学日本及欧美归国的学生开始独立翻译西方数学著作及教材。一批新的初、中、高级教材出版，中国也开始有了通用的数学教材。

1902 年 8 月 25 日，清政府颁布《钦定学堂章程》，史称壬寅学制。由于清政府认为张百熙“喜用新进”，此学制未及施行即被废止。1904 年 1 月 13 日，清政府批准了张百熙、荣庆、张之洞重订的学堂章程，癸卯学制。此学制包括《大学堂章程（附通儒院章程）》、《高等学堂章程》、《中学堂章程》、《高等小学堂章程》、《初等学堂章程》、《蒙养院章程及家庭教育法》、《优级师范学堂章程》、《初级师范学堂章程》、《实业教员讲习所章程》、《高等工商实业学堂章程》、《中等工商实业学堂章程》、《译学馆章程》、《进仕馆章程》、《各学堂奖励章程》、《各学堂管理通则》、《任用教员章程》等 17 件。同时还颁布了该学制的总纲《学务纲要》。学制规定了各级各类学堂的宗旨、修业年限、入学条件、课程设置及相互衔接关系。规定“无论何等学堂，均以忠孝为本，以中国经史之学为基，俾学生心术壹归于纯正，而后以西学谕其知识，练其艺能，务期他日成材，各适实用”为宗旨。此为中国近代第一个施行了的学制，它标制着传统教育体制的结束。

四、科举制度的改革

清代末年，数学教育虽较前代有很大的发展，但只要科举制度存在，数学就不可能在全国得到很好的普及。清末学者及数学家凌步芳（？—1902）多年任私塾教师，凌氏称：

> 晨昏书舍曼声长吟琅琅入听者，八比而已矣；时登讲堂，咳声咿唔，与生徒语者亦八比而已矣。曾无一语及算。非有所吝惜而不语也，盖不暇语也。且世之登巍科享荣名者众矣，皆无所用算。

---

① 吴庆坻．通饬各府厅州县变通书院章程札．皇朝蓄艾文编．卷 16．转引自：朱有瓛．中国近代学制史料．华东师范大学出版社．1986．第一辑．下册．163．

> 而通算者又不利试，则亦不必语也。君子之学也，专而后精，精于经史者必不肯分力于八比，精于八比者必不肯分力于算，精于算者亦必不肯分力于经史与八比。力分焉则不专，而欲所学之精也，难矣。①

正是当时情况的写照。

清末很多学者和士大夫都清楚，倡导学习西方科技便自然要对传统的教育制度，尤其是科举制进行改革。科举制度产生于隋大业年间（605—618），至唐代得到进一步发展，这一制度成为中国此后近 1 300 年中所实行的主要选官制度。从历史上讲，科举制较诸隋前所实行的荐举制、察举制及九品中正制更为公正，它的产生是中国官僚体制达到完善的一个象征。科举制度于明末以后传入西方，直接影响了西方文官考试制度的建立。科举考试方法代有不同，至明代，科举"专取四子书及《易》、《书》、《诗》、《春秋》、《礼记》五经命题试士"，"其文略仿宋经义，然代古人语气为之，体用排偶"。此即所谓八股取士之法。清延明制，数百年来，考试方法日趋僵化。清一代也曾议及改革科举考试，乾隆年间，舒赫德曾提出废除八股，被鄂尔泰所驳。1843 年，两广总督祁塨上奏请变通科举，要求以博通史鉴、精熟韬略、制器通算、洞知阴阳占候、熟谙舆图情形五门课士。祁塨折中所提五门，除阴阳占候一门之外，其他四门均是当时所亟应讲求的实用之学。此折被礼部驳回，在当时并未引起很大反响。咸丰末年，冯桂芬于其《校邠庐抗议》中呼吁变通科举制度。冯氏设想了一套新的科举考试方法，建议考试分三场，第一场为经解，以经学为主，以小学、算学为附；第二场策论，以史学为主；第三场古学，散文骈体文赋各体诗各一。分三优、两优、一优酌给出身。冯氏建议："凡国学、天下学校、书院皆用三事并试"。②

同治九年（1870），闽浙总督英桂、船政大臣沈葆桢等附片奏称："水师之强弱，以炮船为宗，炮船之巧拙，以算学为本"，因请"特开算学一科。"③同治十三年，李鸿章奏请特开洋务一科。光绪十年国子监司业潘衍桐请"另开艺学科，凡精工制造、通知算学、熟悉舆图者，均准与考。④"于此同时，一些学

---

① 凌廷芳．百砚斋算稿序．百砚斋算稿．1906．

② 冯桂芬．变科举议．校邠庐抗议．179．

③ 英桂．沈葆桢，请考试算学折．转引自：礼部考试算学折．中国近代学制史料．上海：华东师大出版社，1986．第二册．18—19．

④ 潘衍桐．请开艺学科折．转引自：中国近代学制史料．第 2 册．21．

者也纷纷著书立说,倡导改革科举制度。

1887 年,江南道监察御史陈琇莹奏称:“西法虽名目繁多,要权舆于算学。洋务从算学入,于泰西诸学,虽不必有兼数器之能,而测算既明,自不难按图以索。”请求朝廷“饬下各该学政,于岁科试报习算学之卷面,试其实在通晓者,即正场文字稍逊,亦宽予录取”。[①]同年十月,总理衙门会议算学取士。其取法为“报考算学者,除正场仍试以《四书》经文、诗、策外,其考试经古场内另出算学题目,果能通晓算法,即将原卷咨送总理各国事务衙门复勘注册。俟乡试之年,按册咨取赴总理衙门,试以格物测算及机器制造、水陆军法、船炮水雷,或公法条约、各国史事诸题,择其明通者录送顺天乡试”。“如人数在二十名以上,统于卷面加印‘算学’字样,与通场士子一同试以诗、文、策问,无庸另出算学题目”。“每于二十名额外取中一名”。“卷数最多亦不得过三名,以示限制”。“凡由算学中式之举人,应仍归大号,与各省士子合试,凭文取中”。“此项人员,若于会试中式后,得用京职,恭候点派数员作为同文馆纂修,俾专讲习。嗣后或游历外洋,或充出使等差,均可随时奏派,因材器使”。[②]1888 年,“乡试,总理各国事务衙门将各省送到生监及同文馆学生试以算学题目,共录送三十二人”,“取中一名”举人。[③]然而,一来考试范围太大,既要与其他举子一样参加八股策论考试,又要试及各种西方科技知识;二来取额太少,“天姿英敏之人,制艺之外,力能兼通西学。一经编入算学,虽有佳文,反致限于额不能取中”,遂至报考乏人。“此后历科乡试均以不满二十名,散入大号”。[④]几经努力,算学科终于得以开办,但由于考试方法及录取制度的缺陷,并没有达到广取人材的目的。

甲午失败之痛,使得国人无法再因循传统教育的模式。要求变更甚至取缔科举制度的呼声更为强烈。光绪二十七年六月二十七日,刘坤一、张之洞奏请改革科举制度,并拟措施四条:“一曰设文武学堂、二曰酌改文科、三曰停罢武科、四曰奖劝游学。”[⑤]光绪二十七年(1901)七月,诏停八股,以中国政治、史事及各国政治、艺学命题取士。同月,谕各省书院改设学堂。此后,各地书院纷纷改办学堂,但在 1904 年制以前,尚有一些旧有书院继续授

① 陈琇莹.请开算学科摺.洋务运动.第 2 册.207—208.
② 奕譞,等.议开算学科摺.洋务运动.第 2 册.209—211.
③ 奕劻.光绪十五年七月二十九日奏.洋务运动.第 2 册.211—212.
④ 奕劻.光绪十五年七月二十九日奏.洋务运动.第 2 册.211—212.
⑤ 刘坤一,张之洞.光绪二十七年六月二十七日奏摺.江楚会奏.刊本.

课,且新办学堂亦多具有早先书院的很多性质。光绪三十一年八月初四(1904 年 9 月 2 日),应袁世凯、张之洞、赵尔巽、周馥、岑春煊、端方等所请,废除科举。中国的数学教育开始纳入现代教育范畴之中。

第三节　清末数学家的职业化及其研究的专业化①

本章最后一节,我们将探讨清末数学家的职业化问题。清代末年,随着数学教育的发展,中国数学家们终于可以凭借自己的专业知识维生。这是中国数学家职业化的关键性一步。由此,他们可以专心致力于数学研究的深化及数学真理的追求。如果说通过西方数学进入教育系统完成了全社会对西方数学的接受,而数学家的职业化及其研究的专业化,则使得中国数学研究融入了世界数学研究之中。至 20 世纪 30 年代,中国数学家已经可以在国际学术杂志发表学术论文,他们的部分工作被载入世界数学史。这正是中国数学家职业化及其研究专业化的结果。由此,清末数学家的职业化亦为中国数学西化的一个标志。

一、清代末年数学家的经济地位和社会地位

时至 1860 年,中国数学家的经济和社会地位与其前辈的境遇并无太大区别。他们多幼习举业,并仍有进士、举人或生员等功名,并在担任其他社会工作的同时对数学抱有兴趣。

中国历史上,能够以其掌握的数学知识为生的数学家很少。② 乾嘉时期,汉学派学者虽倡导数学的研究与学习,并开设了一些兼学数学的教学机构,但这些书院并未聘请数学专家执教,也即没有为当时的数学家提供必要的经济保障。当时的数学家大多有着其他的职业。焦循、汪莱、沈钦裴、项名达、张作楠等任教职,张敦仁、徐有壬等为官,李锐的数学水平虽然在当时得到普遍承认,但他靠协助阮元、张郭仁等校订古书、批阅课卷等为生,但这通常不是长期的工作,他的生活仍然不能得到保障,不得不有赖于阮元、张

① 本节为依据笔者两篇旧文改写而成。参见:田森.清末数学教育对中国数学家的职业化的影响.自然科学史研究,1998,17(2):119—128;田森.清末数学教师的构成特点.中国科技史料,1998,19(4):19—24.

② 钦天监人员虽然可以算是掌握天文学和数学知识的专业人才,但他们的主要工作是负责预报、观测天象以及治订历法,所以,他们并不能算作是职业数学家。

敦仁等的接济。董祐诚为谋生足迹半天下,终于早亡。如果我们把数学家定义为专心从事数学研究并以数学知识的进步为追求的人,那么乾嘉时期自然不乏称得上真正数学家的学者,但当时的中国尚不存在使他们职业化的社会条件。随着清末数学研究和教育的发展,当时数学家的经济地位和社会地位得到了很大改善。

19世纪60年代之后,陡兴的数学教育需要大批数学教师,一些专心于数学研究或热心于数学传播的学者应聘成为数学教习或书院山长,其中包括李善兰、华蘅芳、邹伯奇、刘彝程、吴嘉善、华世芳、沈善蒸、席淦、时曰醇、张文虎、陈旸、刘光蕡等前文提到过的数学家。据有关资料显示,上海广方言馆算学正教习每月薪金约白银二十五两,副教习十八两①;广东同文馆汉学教习月薪四十两,京师同文馆的报酬则更为丰厚。其他有数学课程的书院山长或斋长的月薪虽不如上述三所新式学堂高,但却亦足可维持生活。不仅如此,各学堂和书院的学生亦有一定数额的廪饩可以维持家用。上海广方言馆学生每月膏火四、五、六两不等,广东同文馆学生每日膏火一钱②,京师同文馆学生视入学年限和学习情况分为每月三两、六两、十两不等③,广东实学馆学生每月可得膏火四两。不仅数学教师有着相当的薪水,学习数学的学生亦可得到必要的生活保障和安心学习的环境。早期学习数学的学生席淦、贵荣、杨兆鋆、华世芳、崔朝庆、曹汝英等后来成为清末活跃的数学家,其中一部分还成为数学教师。

可以说,清末数学教育使数学专家逐步成为一个具有独立社会角色的群体,其中部分成员获得了经济上的独立。通过对清末数学课艺、数学著作、地方志及笔记、札记等资料统计,1860—1905年间,有近50位数学家曾担任过数学教师。④由此,中国数学家终于能够完全凭借数学知识谋生,脱离了作为经学家助手或官僚幕友而不能自主的地位。此为中国数学家的职业化及其研究的专业化提供了必要条件。

随着自强运动的深化,数学作为西方科技的基础日益受到部分当权者和整个社会的重视,这自然会促进数学家地位的提高。随着数学日益为社

① 聂辑槼.上海广方言馆经费数目.中国近代学制史料.第一册.上.242.

② 毛鸿宾.广东同文馆章程.同治三年六月初十日摺.中国近代学制史料.第一册.上.261.

③ 席淦、贵荣、汪凤藻、杜法孟、胡玉麟等曾次第担任京师同文馆算学副教习,其薪金为每月十五两。

④ 详见:田淼.清末数学教师的构成特点.

会所重视及数学教育的发展,清末数学家的社会地位亦有很大提高。《汪康年师友书札》中收录邹道济至汪康年的一封信。信中,邹氏称其自幼喜好数学,但并未得到适当的职位。某年,"行至关中,资釜断绝,丐食于途,夜宿关帝庙"。偶逢陕西储宪姚馨辅进庙上香。姚氏将其招入署中,供酒扫役。偶然的机会,姚馨辅发现邹道济懂得数学,于是,即聘邹氏为关中书院校阅数学课艺。[①]邹氏由一名有一定数学水平的学者沦为乞丐、杂役,而后又一变为国内著名书院的教师,戏剧性地展现了清末数学家社会地位的突变。

尊师为中国传统文化的美德,《世载堂杂忆》中记载了两湖书院的开学典礼,"梁节庵(梁鼎芬)为东监督,与诸分校南面上立,谭(谭继恂,湖北巡抚)率诸生北面行拜跪礼,梁与诸分校率诸生转下,请谭上立,行答拜礼"[②]。身为一省巡抚而向书院监督及教师行跪拜礼,足见清末尊师之风尚。两湖书院受礼的分校之中,便有算学分校华蘅芳。其他书院的山长或斋长邹伯奇、刘彝程、华世芳等应该也得到同样的礼遇。

从整体上来说,清末数学家在当时的数学教育界占据了一席之地,得到了与经、史学家相当的地位。姑且不论在同文馆等新式学堂中数学教师的地位,没有科举功名,仅对经、史及程朱理学不感兴趣的数学家刘彝程能够被聘为求志书院山长,与清末重要经学家、理学家俞樾、孙诒让、孙铿鸣(孙为李鸿章、沈葆桢的会考房师)等拥有相同的地位,这本身即说明当时社会对数学家的地位的认可。由此可见,清末数学家的社会地位得到了很大提高。

二、清末数学研究的专业化

对于中国传统文人来说,"算术不言身心,不知品行",虽是儒者所当知,但只"可以兼明,不可以专业"[③]。所以,除钦天监人员外,只有对数学抱有特殊兴趣的极少数学者具有专业化的数学思想。而钦天监人员以治历观象为主要任务,并不能算作是专业的数学家。

乾嘉时期,汉学派学者中形成了一个数学专家分支,较诸前代,他们具有更强的专业化思想。但乾嘉数学家多数首先是经学家,在张之洞的《书目

---

① 邹道济.致汪康年.上海图书馆编.汪康年师友书札.上海古籍出版社,1986.2803.

② 刘禺生.张之洞罢除宾师.世载堂杂忆.中华书局,1960.48.

③ 刘瑞骄.刘光蕡行状.烟霞草堂文集.民国间刊本.

答问》中，焦循、汪莱、李锐不仅是数学家，也是经学专门家，并承担着其它教学或社会工作。正如乔纳森·波特(Jonathan Porter)所称："19世纪中叶以前，无论在中国还是在西方，对于个人来说，把科学专业化与人文主义兴趣或仕途结合起来，仍然是一种常见现象"，而"科学家是一些业余爱好者，都有着其它方面的兴趣"。"许多对科学作出重要贡献的人是一些活跃于不同领域受过广泛教育的学者、人文主义者和'科学家'"①。

时至19世纪60年代，这样的情况在中国仍很普遍。当时的数学家可分为经、史学家类，对数学感兴趣的经世派学者及数学专家类。

前文提到的南菁书院山长张文虎即为经、史学家类学者。张文虎虽然参与了很多数学书籍的校订与出版，且以数学专家的身份被李善兰荐入曾国藩幕府，但他本人在数学方面的著述多为对数学名词的训诂，如其"旁要夕桀解"及解"筭"等。②对于沈钦裴和罗士琳的《四元玉鉴细草》，张文虎评论曰：罗士琳"推阐详至，纠谬拾遗，有功于算学甚巨。匪特为汉卿诤臣而已"。而沈钦裴"所著固与罗君大同小异，实不如罗之详。然四象朝元第三、第五两问，罗君细草方、廉、隅诸数皆不符原术，""学博(沈钦裴)所演独与术吻合，此则胜于罗君者"③。所论唯在沈、罗二人校勘之功过，对二者的数学方法则无一语道及。由此亦可见张氏数学研究之侧重。④著名经学家陈澧亦以算学著名。据说，他"九岁能为诗文，及长，凡天文、地理、乐律、算术、小学无不研究"，为传统文化所推崇之通儒。陈澧著述甚丰，其数学著作有《弧三角平视法》一卷。陈氏曾长期任教于学海堂，其教学的主要内容为"经史实学"，"勉诸生笃行立品，成就甚众。"⑤他于学海堂应主要负责经学方面的教学。其学生廖廷相熟经、史、小学、古音切韵、舆图、算术。张文虎和陈澧作为一代名学者能够提倡和研究数学，这对于数学的传播是非常有益的，但他们本人并不能算是数学专家。

对数学感兴趣的经世派学者的代表人物有刘光蕡、卢靖等。刘光蕡幼

---

① 乔纳森·波特.中国近代早期的科学界.林贻纹，王冰译.科学史译丛.第一辑.中国科学院自然科学史研究所.1983.

② 张文虎.舒艺室随笔.1874年刊本.

③ 张文虎.与马远林书.舒艺室杂著.卷上.24—26.

④ 关于张文虎，参见：洪万生.张文虎的舒艺世界：一个数学社会史的取向.汉学研究.台北：汉学中心，1999.11(2).163—184.

⑤ 徐世昌.东塾学案.清儒学案(4).卷174.北京：中国书店.1990.217—218.

习举业，1865年，他在应童子试时得知西方列强之所以能够入侵中国，均由其制器精，而制器诸艺均以算学为基础。他从此立志学习数学。当时陕西很少有人习算，刘氏无法得到适当的入门用书。偶获《四元玉鉴》，苦心探索，初识门径。但不久即累得咯血，以至中辍。此后，刘氏开始大力提倡数学教育。1885年，刘光蕡与柏景伟合办求友斋，以8门课士，其中包括天文、算学。1887年，他主讲味经书院，并于书院中开设算学课。他还创办味经书院刊书处，印行味经丛书，其中包括多种算书。1895年，他于味经书院开设时务斋，1897年，刘氏任崇实书院山长。[①] 但刘光蕡学习数学并非出于自己的兴趣，而是完全出于一腔爱国热诚。所以，他提倡数学教育的目的与专业数学家和经学家有着本质的区别。在国家处于千古未遇的危急时刻，刘光蕡希望尽自己之力来挽救国家，他设想的求国之策即是引进西方先进的军事及民用技术，所以，他在教学之外亦创办实业，撰有“泰西机器必行于中国说”，以宣传西方技术。并参与筹建纺织厂等实业机构，派遣其弟子赴上海购买及仿造西方机器。对于刘光蕡来说，数学是作为西方技术之基础而受其重视的。他在谕崇实书院学生时称：“中国之患，故非人人习算所能救，然我辈所能为者仅在是。”[②]所以，虽然其数学水平相对于当时大多数数学家为低，但其提倡数学则比其他数学家尤力。由于他的努力，陕西省多处开办学习算学的书院。但当陕西学算之人渐多之时，他又告诫这些学生曰：“习八股，诚无用，学算而不能制器亦画饼也。且八股尚言仁义道德，算术不言身心，不知品行。沈溺无用，乌足为士人乎？”[③]从这些言论即可看出，刘光蕡并不能算作是数学专家。

卢靖（1856—1948），字木斋，湖北光化县人。早年于举业之暇留意数学等经世之学，1883年著《火器真诀释例》。同年，由于预见到湖北省兵营一场爆炸而为当地臬司黄子寿所重，黄氏设算学书院，聘卢主讲。1885年，卢靖“以天算对策举于乡”。次年，任天津武备学堂算学总教习，得与华蘅芳、姚锡光等朝夕讨论。1887年，卢靖任赞皇县知县。此后，他辗转任职于南宫县、定兴县等处。并曾任多伦诺尔厅同知、保定大学堂督学等职。1905年，卢靖负责办理直隶学务处，“率直隶官绅，东游日本，考查学务”。卢靖虽

---

① 刘瑞骄．刘光蕡行状．烟霞草堂文集．民国间刊本．

② 刘光蕡．训味经时务斋诸生．烟霞草堂文集．民国间刊本．

③ 刘光蕡．训味经时务斋诸生．烟霞草堂文集．民国间刊本．

自早年就开始学习数学,但他并不以深化数学研究为目的,而是以治世为主要宗旨。其早期著术《火器真诀释例》即是有关军事技术的著作。卢氏虽有多部数学著作,但大多只是对他人著述的阐述,而无进一步研究。所以,并不能算是数学专家。

本章中提到的多位数学家,如李善兰、华蘅芳、刘彝程、沈善蒸、崔朝庆、华世芳等均可以被归入数学专家类型。但经过认真分析可以发现,他们的情况又有所不同。李善兰虽然很早便在数学上取得了超出同侪的成果,但他曾著《火器真诀》等军事著作,并先后入徐有壬、曾国藩幕府,参加试制兵器。1862 年 12 月 28 日,李鸿章致函曾国藩:"李善兰制成开花炮二尊,连炮子解上,其雇觅善装军器之西人一名,请试用之。[①]"此外,他曾有意让徐有壬为其捐一个县官的职位,可见尚有入仕之愿。[②]他早年还撰有一部《群经数学考》。这样,李善兰身兼经学家、经世派学者及数学家三重角色。华蘅芳虽为数学名家,但亦曾称:"夫算学,不过为六艺中之一艺耳,则究心此学者不必以生平之全力赴之,只须于正务之暇当作游艺之事,斯可矣。"[③]可见他并不认同于单纯的数学专家角色。

然而,清末自强运动领袖对数学的重视及清末数学教育的发展使李善兰、华蘅芳等的生活脱离了它们预定的轨道。自强运动领袖提倡数学及发展数学教育是希望利用数学的普及来学习西方先进的军事和民用技术,以期最终达到富国强兵,抵御外侮的目的。故,他们提倡数学教育的目的带着明显的实用性色彩。但这却并没有限制住清末数学家的治学方向。实际上,由于有了必要的生活保障,清末数学家开始以自主的身份倡导专家之学。李善兰自入同文馆后,"在京授法于兹八载,维日孜孜,勤求忘倦,不知老之将至,于斯道可谓殚心致远矣"。[④]华蘅芳按研究目的将学习数学的人分为两类。"一为阐明数理以成著作,一为推演各数施之实用"。华氏指出,"演数者只能用法,而明理者则能创法。凡演数者所用之法,皆明理者之所创也"。"算法古疏今密,古拙今巧,苟非明其理而精益求精,安能至此乎?明理之人譬如创业,演数之人譬如守成,其劳逸难易有不可同日而语者"。

---

① 汤志钧.近代上海大事记.上海辞书出版社.1989.184.

② 王韬咸丰九年五月《日记》中称:"壬叔言:'今君于先生在此,予绝不干求,等其任满时,请其为予攒资报捐,得一州县亦足矣'。"见:王韬.王韬日记.中国近代人物日记丛书.1987.

③ 华蘅芳.学算笔谈.卷五.1882 年刊本.

④ 丁韪良.李善兰传.格致汇编.上海:格致书室刊本.

并称:“他事皆有止境,而算学无止境也。”可见华蘅芳推崇的正是以深化数学研究为目的的专家之学。

刘彝程是清末数学家中专业化倾向较为明显的人。他虽曾入太学,但对科举仕途不感兴趣。幸运的是,他有一个宽容的父亲。其父刘熙载虽然对他学习数学并不完全满意,但还是向他传授了数学知识。到青年时期,他对天元、四元、三角函数展开式等均做了一些研究,并校算了《代数术》、《微积溯源》及《三角数理》等书。自 1873 年起,他开始任教于上海广方言馆,后又任教于上海求志书院。从此,他便专心从事数学教育与研究。其《简易庵算稿》中的课题几乎全为纯数学内容。他在垛积术、整数勾股形、方程论、对数研究等各方面都有自己独到的见解。他自己最为得意的是他在李善兰《垛积比类》的基础上得出的新的成果。但至少在当时,这些成果并不具任何实用价值。此外,作为广方言馆教习,他与自强派官员及西洋传教士等均应有较多接触。其父刘熙载为清末著名学者,曾任广东学政,与胡林翼、郭嵩焘等都有交往。借助其父的身份,刘彝程有机会接触到一些活跃的当权人物。现见于其记载的就有郭嵩焘、鹿传麟等,但除任数学教习外,至今没有史料证明他曾参与其他和社会实际相关的活动。

在这些具有专业精神的数学家的培养下,清末学习数学的学生的专业化倾向更为明显。华蘅芳称:“尝见有初学算法之人,年少气盛,日究心算学,遇有难通之处积思致废寝食。”①求志书院及南菁书院肄业生华世芳曾屡列求志书院舆地斋特等第一,于经史亦造诣颇深。1896 年,华世芳应邀出任龙城书院山长,以经、史、舆地、算学四门课士,其教学获得当地乡绅的赞誉。但华世芳对自己在龙城书院教学却并不满意,在至缪荃孙信中称:

> 郡中龙城书院,……曾以算学一斋属世芳校阅,至于经古一斋,自揣用力甚疏。本不敢谬膺斯席,无如彼时仓猝未得其人,遂以不才承乏。两载以来,毫无补裨。近……算学住院诸生,朔望加课,日记累累,披阅纷烦,精神不能兼顾。故决意辞去经古一席,以稍纾心力。②

可见,他已决意舍弃经史诸学而专注于数学研究与教学,并不恋于经学家之美名及山长之地位。此外,清末数学家对专业化数学的倡导及清末社会对

① 华蘅芳.学算笔谈.卷五.1882 年刊本.

② 华世芳.至缪荃孙.艺风堂友朋书札.1581.

数学家的礼遇，同时也暗示了清末社会对专业化数学的认同。

三、清末数学家的研究取向

清代末年，数学工作者人数众多，著作数量宏富。李俨先生“参考各藏书家、各图书馆所藏算书，旁及县志、书目、文集、碑传、论文所引，以人名笔画多寡为序，收及 650 人，1300 种”。①其中可以确定是于 1860 年以后著成的数学著作有 600 余种，另有近百种西方人著、译的著作。加上不能确定出版日期及减去统计中的重复部分，清末 50 年内著成的数学著作占清代数学书籍的近七成。可以看出，清代末年确实是中国数学历史上出版数学著作的高峰。但无庸讳言，从世界数学史的角度来看，除在尖锥术、垛积术等个别领域外，清末数学家很少得出具有创新意义的研究成果。但这并不意味着他们的工作没有意义。下面，我们就对清末的数学著作做一具体分析。

清末数学著作主要有几种类型：汉泽西方数学著作和数学普及著作、算学课艺及教材、数学专著。清末有一些直接译自西方数学著作的书籍，这些书籍为清代学者学习西方数学的主要来源。一些在华西方人和中国数学家撰写了部分普及数学的著作，如傅兰雅编辑的《格致须知》中的《代数须知》(1887)、《三角须知》(1887)、《微积须知》(1888)、《画器须知》(1888)、《曲线须知》(1888)、《量法须知》(1889)等都是这类作品。这些书籍浅显易懂，一般不含作者的新成果。除上述傅兰雅等传教士所编的介绍西方数学知识的著作外，此类书籍中亦有涉及传统数学内容的，如刘彝程所著的《简易庵九章实义》(1901)。从书名来看，书中应主要介绍传统数学内容，但实则不然。该书是刘氏为初学所作。其自序中称：“方今算书汗牛充栋，求其浅近易学，可以入门而无弊者，则罕见之。”“余甚憾之，尝欲自著一书，引申浅近算理，藉示初学津梁。而中年以来，忽忽少暇。光绪初，父执湘阴郭筠仙侍郎，奉命使英。过沪谓余曰，是行携有出洋学生，将使学算，宜以何书入门？余对以向乏善本，无已，惟有自著。郭公怂恿速成，并任剞劂。逾年，公归国，予无以应，惟谢以异日而已。”前年(1899)编“《简易庵算稿》，时定兴鹿芝轩尚书抚三吴，见而称善，又谓，是盖未易问津，劝别撰简要门径之书，启牖来

① 李俨.近代中算著述记.中算史论丛.第二集.李俨、钱宝琮科学史全集.第6册.494.

学”。余“遂乃屏绝尘事，尽半年之暇，撰为是编”。[1]《简易庵九章实义》分比例、面、体积、方程、句股四卷，每卷又分上、下两部分。上部分讲解西方数学内容及运算方法，下部分上卷给出《九章算术》或《测圆海镜》中原题。该书虽然收入一些传统数学著作的算题，但其中介绍的均为西方数学方法。《九章算术》、《测圆海镜》中的算题实际上成为解释西方数学方法的例题或习题。卢靖的《九章代数草》的内容与该书非常相似。实际上，当时虽然有一些西方数学著作被译成中文，但这些书中一般不包括习题。清末数学教师普遍采用以代数方法或其它西方数学方法演算传统数学著作中的算题的方式传授西方数学方法。

清末还出版了大量的数学课艺和几部数学教材。所谓课艺，主要指教授数学的教学机构中的试题及解。清末数学教育多延用传统教学模式，一般主要是学生自己学习教师指定的书籍，教师只是在一定的时间登堂会讲，解答学生的问题或批阅学生的课作，并在每月或每个季度进行考试。算学课艺一般便是由月考或季考中较为出色的答卷编辑而成的。现存清末数学课艺 20 余种。除上文已介绍的同文馆《算学课艺》、《简易庵算稿》、《南菁文钞》、《南菁札记》及《南菁讲舍文集》外，尚有《广方言馆算学课艺》、《上虞算学堂课艺》、《两湖书院算学课程》、《三角公式辑要》、《经心书院算学课程》、《学一斋算课草》、《游艺斋课草初集》、《南菁文钞》、《南菁札记》、《南菁讲舍文集》、《佛山书院元课草》、《辨志文会课艺初集》、《龙城书院课艺》、《时务斋课稿丛钞》和《石鲸书院元草》等等。这些课艺中以我们前面介绍的求志书院算学课艺集《简易庵算稿》的水平为最高。这类著作虽然为考试题解，但由于很多书院都兼具研究功能，因此，从这些试题集解中亦可以发现新的研究内容。《简易庵算稿》中对整数勾股形、垛积术、方程论等的研究在当时中国都是最新成果。

清末出版的数学教材很少。方恺编写的《代数学通艺录》为较早由中国人自己编写的代数学教材。

《代数学通艺录》16 卷，1890 刊刻，阳湖方恺著。为广东西学堂，也即后来之实学馆、博学馆，光绪壬午年至丁亥年(1882—1889)间的数学教材。方恺(1839—1891)，字子可，常州人。其父方骏谟(1816—1879)，字元徵，一字耐余。曾入曾国藩幕，与李善兰、张文虎等过从甚密。方恺早年为曾国藩所

---

① 刘彝程.九章实义序.九章实义.简易庵石印本，1901.

赏识。曾氏日记中同治二年十月十五日记有:“方元徵率其子来谈,病,鸡胸龟背,而学问渊雅,熟于《汉书·地理志》。”①后方恺曾为曾国藩手制地球仪,并为之作地球“图说”。光绪八年(1882),张树声于广州建西学堂,延方恺充任算学教习。方氏于此任教6年,即使在中法战争期间亦“课授不辍”。后方氏“奉檄兼总纂海图馆事”,以其学生18人分司绘测。

《代数学通艺录》卷一为名式略例,包括各种单位及其换算关系。此后列有圆形周长与直径的关系及直角三角形勾、股、弦、钝角、锐角及素数等基本概念的定义、计算符号等。该书介绍除法时称:“凡列除法,照西式,悉从上子下母,虽与古人上法下实之例不符,以其便习西书,故因仍不改”②。该卷还含“九章名义”,在给出《九章算术》中的各章名称之后称:“以上九章内,衰分、均输、粟布、盈朒、方程五章在线部,方田、勾股在面部,少广在体部,商功兼列面体部。”采用西方几何分类方法重新归纳《九章算术》的内容。他的划分方式并不完全合适。从中我们可以看出其对于西学之偏重。

卷二为笔算程式。此卷为算术入门。介绍整数、分数四则运算中的定位法和运算方法,及求公倍数法。书中还介绍了一些简便运算方法。卷三为代数法式,可视为代数入门。该卷规定了书中常用的代数符号③,介绍了代数式正负变换表,开方、乘方定义,并举例讲解代数式定义和代数移项法。卷四、卷五两卷均为比例。

卷六讲解方程法及代数不定式。方程法为中国传统数学早期重要成果之一。方氏称,“中国方程为九章之一,盖以物数物价,和数相比而得,其法在中国以梅氏新立法为最善,《精蕴》用之”,他认为,传统方程法分类复杂,因题设问,头绪复杂。而“代数则统以正负决之,如寻常移项推算,惟其元总在两元以上,用独元则列式较繁矣”。他着重讲解代数一元方程组问题的算法。此卷后一部分还列有数问代数不定式,即一次不定方程例题。

卷七为平方二次式及勾股面形各法。介绍开平方及一般二次方程算法。其所列开正平方图式解为中国传统数学中方隅图解形式。勾股部分首先介绍了中国研究勾股术的历史,其后主要讨论了整数勾股形问题及解勾

---

① 曾国藩.曾国藩日记.岳麓书社.

② 清朝算书,甚至清代从西方翻译书籍中的分数写法,多用分母在上,分子在下.此为李之藻在《同文算指》中给出的分数表达式,并非中国古代表达法。

③ 这些符号基本上延用李善兰、伟烈亚力等选定的符号。

股形问题。指出:“今代数,本以未知数先列互推,故只须明白句自乘加股自乘等于弦自乘之理,自然移项可得矣。”书中着重讲解了代数法解勾股形的方法。

卷八为各面形及截积,讲解求解圆及直线型的面积及所谓截积面体积计算方法。

卷九为曲线面形,附理分中末线。讲解圆锥曲线的径、周、面积相求问题。

卷十为立方三次式。讲解开立方法及一般三次方程解法及部分立体体积的计算法,并介绍了中国传统算法中的分解立体方法及鳖臑等立体名称,以便于学生课后阅读。

卷十一为曲线体,讲解计算球体、圆柱体及截球弧矢形的体积及表面积的方法。此卷中还介绍了堆垛法。利用代数级数法计算中国传统垛积中三角垛及四角垛的求积公式。

卷十二为代数各乘方指数、代数约分、代数四次以上各乘方。此卷介绍了代数指数与根数的写法及算法,并特意介绍了负指数与分数指数。该卷还介绍了所谓代数约分法,即分解因式法。

卷十三为平面三角,主要介绍三角函数并给出部分三角函数公式及利用三角函数解一般三角形法。

卷十四为球面三角。

卷十五为重学原始,天元借根、代数合解两部分。重学原始部分介绍初等静力学知识,如求物体重心及杠杆原理等内容,应采自李善兰所译《重学》内的知识。此后,书中列出5例,以天元法、代数法和借根法给出其解。方氏指出,由于其教学以西方代数学为主,所以未及天元术。他写作该节的目的是希望他的学生能借助代数学知识理解天元术和借根方的内容。

卷十六由《缉古算经》题解,勾股九容题解,算学各家要指三部分组成。前两个部分主要是以代数法解决《缉古算经》、《测圆海镜》中的问题,第三部分介绍了中国传统算学中各个分支的重要数学著作,以备学生阅读。希望学生“能循径躐阶,详悉批诵,为学浩博,自足以造诣极精”,而成为“算学通儒”。

《代数通艺录》对于很多基础问题,如怎样进行加、减运算等并未过多阐述,可见该书应该是方恺针对学生学习代数学中出现的及可能出现问题的课讲。书中多处提及《代数术》,则该书很可能即是学生所用之参考书。《代

数通艺录》的数学内容并未超出《代数术》及《代数学》两书。该书的特点是其中多处以代数术解释中国传统数学问题,并经常明确指出中国传统方法的繁杂,这对于提高学生对西学的重视和促进西方数学在中国的传播是很有益处的。此书的另一个特点是分数书法为分子在上,分母在下,为同期数学著作中少有。方氏弟子曹汝英等后来的著作也延续了此种写法。方氏指出此举是为学西学方便,可见其对于传播西学的重视。

《代数通艺录》的内容由浅入深,较为系统,为当时较好的学习用书。该书出版后,获得了广泛好评。王元稚致汪康年信中称"见贵报所售《代数通艺录》一书,亟购得之,如获至宝。是书出,而从前华若汀所译《代数术》之文义艰晦者可废"。并对其作者方恺更是大加称道:"方先生身婴奇疾,绝意进取,其笔墨实能道达幽隐,一似梅勿庵复生,而无戴东原著算书惟恐人知之诮",因时务报馆"刊本讹字太多",王氏又特购"得粤刻原板。"[①]可见该书对于代数学在中国的传播起到过重要作用。《代数通艺录》很可能是中国数学家自己撰写的第一部代数学教材。书中虽然亦列有传统数学著作的名目,但其主体内容均属西方代数学。

清末数学专著的水平相差很大。很大一部分著作是作者的学习心得或学习数学的过程中所做的算题集解。这些著作对于当时普及数学知识也许具有一定的意义,但并不含有新的数学成果。另有一部分著作在当时传入的西方数学知识及传统数学知识的基础上做出了新的成果。时曰醇和黄宗宪[②]撰写的《百鸡术衍》和《求一术通解》进一步深化了传统数学中解不定方程的百鸡术和大衍术。李善兰在其《考数根法》(1872)中给出四种判定素数的方法,其中第四法相当于费尔玛小定理。李善兰不仅证明了该定理,还举反例指出该定理的逆定理不真。[③]李善兰之后,华蘅芳、方世镁分别在《数根术解》和《数根丛草》中继续了李善兰的研究。方世镁给出20种判定素数的方法。虽然这些方法在世界数学史上并非首创,但西方素数论的内容在当

① 王元稚.致汪康年.汪康年师友书札.上海:上海古籍出版社.1986.

② 黄宗宪,字玉屏,湖南新化人.曾以供事职名随郭嵩焘(1818—1891)和曾纪泽(1839—1890)出使英法等国。他曾随丁取忠学习数学,著《古琴古砚斋算术》5种8卷。1906年任新化公立二等小学堂算学教习。关于黄宗宪,详见:许康,廖杰初.近代最早赴欧的数学家黄宗宪身世略述.中国科技史料.11(2).1990.35—43.

③ 关于《考数根法》,参见:严敦杰.中算家的素数论.数学通报.1954;田淼:考数根法导读.传统数学文献导读丛书.中国传统数学名著导读丛书(李迪主编),湖北教育出版社,1999.

时并没有被系统传入中国，李善兰和方世镂等的工作在当时、当地均属于独创性的成果。①求志书院学生崔朝庆、张爔各自在其师刘彝程工作的基础上进行垛积研究，著成《垛积一得》、《堆垛术》等垛积术专著。这两部著作中虽然并不包括新的研究成果，但他们各自以代数方法证明了前人的垛积公式，从数学研究及中国数学西化的角度来看，它们都是很有意义的。

清末数学家的工作的意义并不仅在于他们做出了多少高水平的研究成果，而且通过他们，西方数学真正地在中国札下根来，这也是他们工作的一项重要意义。通过分析他们的著作，我们可以发现，当时的中算家的思维方式和表述方式均有很大改变。尽管他们的学术水平与世界数学前沿尚有很大距离，他们的工作表明中国数学已经基本上被西化了。同时，通过他们在数学普及和教育方面的工作，培养出一批通西方数学的学生。20 世纪初期，中国兴起了留学热潮，这些掌握一定数学知识的青年远赴异国求取知识，他们中的一部分成为专职的数学家和数学教育家，如秦沅、秦汾、胡明复、姜立夫、孙光远、杨武之、苏步青、陈建功等等，他们将最新的数学著作翻译成中文，并在中国开创了专业高等数学教育。在他们的培养和影响下，出现了一批掌握高等数学知识的人才。他们多赴欧洲和美国继续深造或研究，至 20 世纪 40 年代，中国出现了一批具有世界最先进水平的数学成果和数学家。和他们相比，本书主角——明末至清末数学家——的研究工作虽然显得不足称道，但中国数学的那一段历史还是值得我们纪念与研究的。在以下的三章中，我们将通过代数学、三角学及中国传统垛积术在 16 世纪末至 20 世纪初的发展和演变的具体情形进一步阐述中国数学西化的过程。

---

① 《数根丛草》中的 20 种素数判别法中，有 2 种是错误的．参见：张祖贵．《数根丛草》研究．自然科学史研究．11 卷．128—138．

第五章　中西数学知识之互动——代数学在清代的发展

天元术是13世纪中叶已发展成熟的中国传统数学分支，其本质为设未知数解一元高次方程的代数方法。14世纪初，朱世杰将这个方法进一步发展，创造了四元术，即四元联立高次方程组的数值解法。这是中国传统数学代数领域的最高成就。就现存史料看来，在朱世杰之后，似乎很少有数学家再提到天元术和四元术的方法。至1550年，明代重要数学家顾应祥在重新整理和研究以天元术为基本运算方法的《测圆海镜》时称，该书"以天元一互算，而漫无下手之处"①，并在他所著的《测圆海镜分类释术》中删去原书中的天元术草文。可见当时的数学家已不能理解天元术。17世纪末年，欧洲传教士将一种非符号化的解一元高次方程的方法带到中国，当时称为"借根方"。该法得到了康熙帝及一些数学家的重视，一时被视为当时最高深的数学知识。18世纪，梅瑴成以借根方法重新解读了天元术。此后，天元术成为一些江南算学家的研究热点，并由此引发了全面恢复13、14世纪数学成就的研究风潮及高水平数学家间针锋相对的关于中、西数学优劣比较的争论。传统的天元术在这场论争中占到上风，19世纪20年代之后，借根方方法基本被天元术所取代。1859年，李善兰、伟烈亚力共译《代数学》，首创代数一词。从此，系统的符号代数方法得以在中国广泛传播，并很快取代了天元术。

本章中，我们将纵向地分析代数学在中国的传播过程，这无疑是中国数学西化或者说是近代化的一个重要方面，但这却不是笔者写作本节的全部目的。实际上，天元术是中国传统数学中最发达的数学方法，而代数学在18世纪的欧洲得到了高度发展，现代数学史家认为，代数化正是18世纪欧

---

① 顾应祥．测圆算术序．1a．

洲数学发展的一个主要趋势。在 18 世纪末及 19 世纪初，中、西数学中具有同样数学本质的两种数学方法在中国相遇，通过对这个个案的研究，我们希望可以看到中国数学家对于这样的数学方法是如何取舍的？以及决定他们取舍的根本原因是什么？以期由此展现中国数学西化的曲折历程的一个侧面。

第一节　17 世纪之前中国传统天元术的发展与衰落

在探讨 17、18 世纪借根方、天元术及代数术此消彼长的传播和发展过程之前，先让我们来看一下中国传统数学中的代数方法的发展，当然，限于本章的主题，我们将主要关注天元术的历史及其运算和表述方法。

中国古代数学成就最为丰富的领域是属于现代数学意义下的代数学范畴的，其代表性的成果有解线性联立方程组的方程术、求一般数字方程数值解的增乘开方法、解一次同余式的孙子定理和大衍术、高阶等差级数求和的垛积术及天元术与四元术等。本书第二章中已经对梅文鼎关于方程术的复原做了较为详细的阐述，对于大衍术和孙子定理本章不拟作特别介绍，[①]关于垛积术的发展详见本书第六章。下文中我们将主要讨论天元术、四元术及与其直接相关的高次方程数值解法等内容。

在中国古代，高次方程数值解是从开方法衍生出来的，故它们被统称为开方。《周髀算术》中陈子与容方对话中已提到开方。[②]据席泽宗及程贞一考定，陈子生活于公元前 4 世纪。[③] 约于公元前 1 世纪成书的《九章算术》中已给出了筹算开平方、开立方及求二次方程数值解的算法及多元一次联立

---

① 对一次同余式解法有兴趣的读者，参阅：钱宝琮．中国数学史．77—79，206—209；郭书春．中国古代数学．商务印书馆，1997．154—161；刘钝．大哉言数．263—281；李迪（主编）．中国数学简史．186—88，278—290；李兆华．中国数学史．79—80，136—141．

② 《周髀算经》原文中称："若求邪至日者，以日下为句，日高为股，句股各自乘，并而开方除之，得邪至日。"（见：周髀算经．2．8a．）

③ 程贞一，席泽宗．陈子模型和早期对于太阳的测量．中国古代科学史论续篇．京教师大学，1991．363—379．

方程组的布列法及消元法①。公元 263 年，刘徽在相关术文的注文中阐释了《九章》开方法的数学原理并给出与现在加减消元法完全一致的线性方程组消元法。经过一段时间的发展之后，到 11 世纪初，贾宪给出一种相当于利用整次幂二次式的展开系数表——“开方作法本原”图（贾宪三角形）——求高次方程数值解的“立成释琐”开方方法。②贾宪还给出另一种开方法，即增乘开方法，运用该法可以得到一个正数的任意次根。12 世纪，北宋刘益突破了古代解数值方程的系数均为正的限制，引入了负系数法。到 13 世纪，增乘开方法已发展完善。宋元数学家李冶（1192—1279）、秦九韶（1202—1261）和朱世杰都有关于增乘开方法的记述。秦九韶在《数书九章》（1247）中给出以增乘开方法求高次方程数值解的详细步骤。19 世纪初年，意大利人罗斐尼（Paolo Ruffini，1765—1822）及英国人霍纳（William George Horner，1765—1822）发表的求数字高次方程无理数根的近似值问题的方法，也即数学史上称之为霍纳法的方法的演算步骤与秦九韶所述增乘开方法基本一致。本章将在后文中比较借根方与天元术特点时对该法的运算方法做详细分析。李冶和朱世杰的数字高次方程解法与秦九韶的方法一致，但他们引入了负数次幂并取消了“实常为负”，即常数项必须是负数的限制，二人又创“连枝同体术”处理有理数根，提高了增乘开方法的普遍性和灵活性。③

---

① 关于《九章算术》的成书年代，数学史上有不同的说法。《九章算术》之名最早出现在东汉光和二年（公元 179 年）制造的大司农斛、权的铭文中。根据刘徽在公元 263 年为《九章》做注时写下的序言分析，早在先秦时代，已有一部《九章算术》，秦始皇焚书及秦末战乱之后，该书原本失传。后经张苍（？—公元前 152 年）、耿寿昌（公元前 1 世纪）根据遗文删补成刘徽所见到的文本。刘徽深入研究该书后，采其所见，为之作注。唐代初年，李淳风奉诏注释《算经十书》，作为国子监算学馆的教材，算经之首的《九章算术》亦在其列。1084 年，宋秘书省校刻算经，《九章算术》与另九部数学著作一起成为世界上最早的印刷本数学著作。1200 年，鲍澣之又翻刻了秘书省刻本。虽然该书此后的流传仍有中断及重订，与原本相较存在一些变化，但附含刘、李注的《九章算术》的主体一直流传至今。据此，郭书春认为现在的《九章算术》至迟在公元前 1 世纪已经成书了，而其中的主体为先秦数学成就。参见：郭书春．关于《九章算术》及其刘徽注．九章算术（郭书春汇校）．1—176；关于《九章算术》中包含的筹算开方法及方程术具体方法，详见：郭书春．古代；世界数学泰斗刘徽．28—54；关于刘徽对《九章算术》开方术及方程术的注释，详见：郭书春．古代；世界数学泰斗刘徽．159—173，216—220．

② 贾宪的数表，即“开方作法本原图”，原图见本书第六章。唐宋历算家通常把载有一些计算常数的算表称为“立成”。而“释琐”则以开锁来比喻解题过程。贾宪“立成释琐”开方的具体方法及此前中国数学在这方面的发展情况，详见：钱宝琮．增乘开方法的历史发展；李迪．对“如积释锁”的探讨．

③ 详见：钱宝琮．增乘开方法的历史发展．36—59．

然而，上文提到的数字系数高次方程与现代意义下的高次方程还有不同。准确地说，当时的方程还是一个开方式，且还没有未知数的概念。所以，一个数学家如欲针对一个具体问题列出开方式，通常需要一定的技巧和复杂的变换。随着开方术的日臻完备，大约在13世纪上半叶，在中国北方地区产生了设未知数列方程的方法，即天元术。现存史料中没有关于天元术最早发展情况的记载。元代祖颐的朱世杰《四元玉鉴》序言为我们提供了一些关于天元术发展的线索。

> 黄帝九章以降，算经多矣，不可枚举。唐宋设明算科，立法取士，不出《九章》、《周髀》、《海岛》、《孙子》、《张邱建》、《夏侯阳》、《五曹》、《五经算》、《缉古》、《缀术》数家而已。然天、地、人、物四元，罔有云及一者。厥后平阳蒋周撰《益古》，博陆李文一撰《照胆》，鹿泉石信道撰《钤经》，平水刘汝谐撰《如积释锁》，绛人元裕之细草，后人始知有天元也。平阳李德载因撰《两仪群英集臻》，兼有地元，霍山邢先生颂不高弟刘大鉴润夫撰《乾坤括囊》，末仅有人元二问。吾友燕山朱汉卿先生演数有年，探三才之赜，索九章之隐，按天、地、人、物立成四元……①

上文虽然列出一些含天元术及二元术、三元术的文献，但并没有给出那些著作的编撰年代。据祖颐的序言我们知道，含天元术方法的早期著作有蒋周的《益古》、李文一的《照胆》、石信道的《钤经》、刘汝谐的《如积释锁》及元裕之为其撰写的细草。遗憾的是，这些著作均未见流传。1259年，李冶撰《益古演段》，他在自序中称，“近世某者，以方圆移补成编，号《益古集》”②。从《益古演段》的内容来看，《益古集》应是以天元术为主要计算方法的，所以，《益古集》很可能就是祖颐所称的《益古》。③现存最早的含有天元术内容的著作是李冶(1192—1279)的《测圆海镜》(1248)。李冶在《测圆海镜》中利用天元术给出关于直角三角形及其内接圆的系统性研究，书中，李冶并未对天元术的具体方法做出任何解释。由此推断，在当时，天元术应该已经被看成一种具有规范的表述方法和通用术语的数学方法。

宋元时期，中算家以算筹为计算工具，在写算草时，他们便将筹算布列

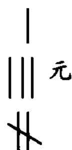
---

① 祖颐. 四元玉鉴后序. 四元玉鉴.

② 李冶. 益古演段自序. 3a.

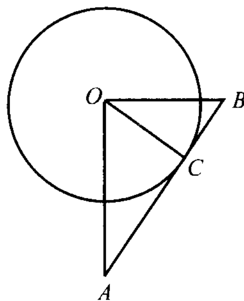
③ 根据《益古演段》的内容，徐义保曾尝试恢复《益古集》。见：徐义保. 对《益古集》的复原与研究.

的情况依样写在纸上，这便成了筹算数字符号。当时的写法如右图。它表示一个天元式，其含义为 x^2+3x-2，其中元字代表一次项的位置，有时也会有一个太字，代表常数项的位置。在李冶的书中，天元式各项的次数从上到下递降。三个筹算符号从上到下依次分别为 1，3，2，最下一行的一捺表示该项为负。



为了了解天元术的具体计算方法，我们以《测圆海镜》中的一个简单算题给出解释。《测圆海镜》卷 7 第 2 题为：

> 或问丙出南门直行一百三十五步而立，甲出东门直行一十六步见之，问径几何？答曰：城径二百四十步。



题目中涉及一个圆形城市，共有四个门。在右图中，我们设 O 为圆城心，OA 边圆外的部分相当于丙行的路径，OB 圆外的部分为甲行路径。在勾股形 AOB 中，OB 为勾，等于 $16+OC$；OA 为股，等于 $OC+135$；李冶所要求的是圆径 OC。书中给出的天元术草文如下：

草曰：立天元一为半城径，副置之，上加南行步，得为 为股，下位加东行步得 为句，句股相乘得 为直积一段，以天元除之，得 为弦，以自之，得 为弦幂，寄左。乃以勾自之得 ，又以股自之得 ，二位相并得 ，为同数与左相消，得 ，益积开三乘方，得一百二十步，即半城径

也。①②

以现代数学语言逐句翻译上述引文，我们可以得到如下的结果：

设 x 为圆城半径，

在直角三角形 AOB 中，股 $OA = x + 135$

勾 $OB = x + 16$

$$OA \times OB = (x + 135)(x + 16) = x^2 + 151x + 2160$$

以 OC 除上式，得

$$AB(\text{弦}) = \frac{OA \cdot OB}{OC} = x + 151 + 2160x^{-1}$$

自乘之，得

$$AB^2 = \text{弦}^2 = x^2 + 302x + 27121 + 652320x^{-1} + 4665600x^{-2}$$

将上式置于左边。

$$\text{勾}^2 = OB^2 = x^2 + 32x + 256$$

$$\text{股}^2 = OA^2 = x^2 + 32x + 18225$$

$$\text{勾}^2 + \text{股}^2 = OB^2 + OA^2 = 2x^2 + 302x + 18481$$

此与左式相等，相消得

$$-x^2 + 8640 + 652320x^{-1} + 4665600x^{-2} = 0$$

亦即 $$-x^4 + 8640x^2 + 652320x + 4665600 = 0$$③

解之（即以增乘开方法解四次方程），得

$$x = 120$$

从上题可以看出，除原著中数字写法与现代不同及计算过程中加入了较多叙述性文字外，天元术的设未知数立方程的方法与现代初等代数中建立一元高次方程的方法是完全一致的。

在天元术出现之后，又有数学家李德载写出《两仪群英集臻》，刘大鑑完成了《乾坤括囊》，两部书分别含有二元术和三元术，也就是二元和三元高次方程组的题目和解题方法。这两部书现在均已失传。幸运的是，最早的有关四元高次联立方程组解法的著作《四元玉鉴》被完整地保存了下来，使得

① 李冶，《测圆海镜》，《知不足斋丛书》本，卷 7，7a—b.

② 术文中的“自之”，就是“自乘之”，在现代数学中相当于求一个数的平方。而“弦幂”相当于弦的平方。文中的“同数”，也就是两个数相等的意思。

③ 在天元术的表示式中，通过将“元”或“太”字上下移动，便可以很方便地将负次数方程变成正次数方程。所以，李冶在原文中称“开三乘方（即四次方）”。

我们今天还能够全面地了解我国古代数学的这一出色成就。

《四元玉鉴》为元代数学家朱世杰所著。朱世杰，燕山（今北京）人，以数学名家的身份周游各地，讲授数学知识。他著有《算学启蒙》（1299）和《四元玉鉴》（1303）。《四元玉鉴》中含有四元术、垛积术等重要数学内容。

四元术就是含有四个未知数的高次方程组的解法，其中以天元、地元、人元、物元分别代表四个未知数。在传统位置值制基础上，朱世杰创造了如下图的四元式表示法。

……	y^3w^3	y^2w^3	yw^3	w^3	w^3z	w^3z^2	w^3z^3	……
……	y^3w^2	y^2w^2	yw^2	w^2	w^2z	w^2z^2	w^2z^3	……
……	y^3w	y^2w	yw	w	wz	wz^2	wz^3	……
				yz				
……	y^3	y^2	y	太	z	z^2	z^3	……
			xw					
……	xy^3	xy^2	xy	x	xz	xz^2	xz^3	……
……	x^2y^3	x^2y^2	x^2y	x^2	x^2z	x^2z^2	x^2z^3	……
……	x^3y^3	x^3y^2	x^3y	x^3	x^3z	x^3z^2	x^3z^3	……

四元术表示法，采自：钱宝琮，《中国数学史》，180

其中太字代表常数项的位置，如果有天与物（x，w）或地与人（y，z）等不相邻的元的乘积所组成的交叉项，可放在相应的夹缝位置。（筹式）便是一个四元高次方程。相当于现在数学中的：$4x+2y^2+4z+3w-xw+yz=0$。

朱世杰还创立了一套消元法。由于原书中他并没有给出消元的具体步骤，我们无法确切了解其具体消元方法，但通过祖颐的后序及朱世杰的简略介绍，我们可以对其方法做一些合理推测。清代一些学者对《四元玉鉴》做过全面研究，沈钦裴、罗士琳和戴煦还分别做了细草。数学史界普遍认为

沈钦裴的细草更接近朱世杰原意。①

四元术本身融合了天元术、增乘开方法及方程术，是中国传统数学在代数学方面的顶峰之作。在欧洲，关于多元高次方程组的消元解法的系统性论述要到18世纪才出现。所以，无可置疑，它在世界数学史上占有着重要地位。但同时，不容否认的是，该法自身也还存在着一些问题。

四元术多元式的表达能力是有限的，可以说，四元方程的布列是传统筹算位置值制表示法的极限。受二维平面只有四个方向的限制，朱世杰所创的四元高次方程组表示法最多只能表达含四个未知数的方程。同时，在他的图中，一些交叉项，如含 xz 或 yw，没有确切的位置。这对于解决一般实际问题可能没有太大的影响。因为，除在《四元玉鉴》中之外，我们在其他文献（包括天文或其他方面的文献）中没有看到四元术的应用。实际上，对于当时现实中存在的一些问题，像四元术这样高深的数学方法并不是必需的。且运算者本身如能够清晰地记住他为式中前述交叉项系数确定的位置，他也可以正确地完成其运算过程。《四元玉鉴》中即有解决这样问题的例子。但从数学意义上来说，上述的限制是关键性的。突破四元的限制也许会带来中国数学的质的发展。但从现存史料来看，在19世纪以前，我们没有看到有数学家在这方面做过努力的痕迹。② 到了明代中叶，学者数学家顾应祥已读不懂天元术的术文。民间数学家虽然在珠算术方面取得了很大发展，但与本章相关的最为高深的内容是程大位《算法统宗》中给出的二次方程和三次方程的求解方法。③从数学水平上来讲，该法不能与天元术和四元术及增乘开方法等同日而语。到17世纪耶稣会士将西方代数学知识传入中国

---

① 朱世杰《四元玉鉴》卷首给出《假令四草》："一气混元"、"两仪化元"、"三才运元"和"四象会元"及其答案和算草，分别阐示含一、二、三、四个未知数的高次方程组解法。这四个算题可以说是朱世杰对自己方法的解释，除此四题外，书中其他算题只含题目、答案及术文，而多数术文实际上只给出了该题经消元后得到的最后开方式。所以，欲了解朱世杰的消元方法，只能从这四个问题入手。杜石然《朱世杰研究》一文中以"三才运元"为例，说明朱世杰的消元方法。田淼撰《四元消法研究》一文中则以"四象会元"一题为例解释朱世杰的消元和解方程的方法，并对部分问题提出了她自己的观点。胡明杰在其《"四元消法问题"别解》中给出他关于四元术消元方法一个推测，但其法本质上与沈钦裴消元法是一致的。胡明杰还探讨了四元术的数学基础、一般性程度等。参见：杜石然．朱世杰研究．宋元数学史论文集．166—209；胡明杰．"四元消法问题"别解．91—96；胡明杰．四元术的一般性程度．8—16；田淼．四元消法研究．李迪从事科学史工作40周年纪念会议宣读．1995．

② 关于四元术的一般性问题，参见：胡明杰．四元术的一般性程度．8—16．

③ 详见：李兆华．中国数学史．212—217．

时，中国传统代数学方法中的最出色的成就多已湮没无闻了。

第二节 17、18世纪欧洲代数方法在中国的传播

一、欧洲代数方法在中国的传播

17世纪末，欧洲代数算法传入我国。据白晋日记所载，在17世纪80年代，比利时传教士安多（A. Thomas，1644—1709）在宫中教授康熙帝代数方法，并于1696年用满文写过一部三卷本的代数著作①。有两部当时介绍借根方的著作被保存至今：《借根方算法》②和《借根方算法节要》③。两书均未具作者姓名。

借根方方法是一种非符号化的代数方法（其具体表达形式详见下文），主要内容是设未知数，立方程求解。从其记法来看，该法应该来自16世纪早期的数学家。Pocioli把未知数称作radix或res，也就是拉丁文里的“根”或“东西”，当时的代数被称为“cossic”术，即求根术。④这个名称和“借根方”非常相像。

大约在1711年，法国传教士傅圣泽（Jean - François Foucquet）向康熙帝介绍了欧洲的符号代数。罗马梵蒂冈教皇图书馆藏有傅圣泽一份名为《关于1711年6月至1716年11月初欧洲天文学在北京的情况纪实》手稿，手稿中描述了傅圣泽向康熙帝介绍符号代数的过程：一天，当康熙帝和傅圣泽在一起时，

> 陛下（康熙帝）开始谈起代数……他望着我，想知道我对代数的想法⑤。

傅圣泽答复康熙帝时提到了“一种新代数”，他比“旧”代数更简单、一般。讨论结束时，康熙帝要傅圣泽写一篇文章介绍这一新的代数方法。傅圣泽将写好的几章呈送给康熙帝，由于当时康熙帝正在热河避暑，所以，由随从康熙帝的杜德美（Jartoux）将傅圣泽的文章解释给康熙帝听。由于杜德美生

---

① 韩琦. 康熙时代传入的西方数学及其对中国数学的影响. 22.

② 借根方算法. 稿本. 故宫博物院图书馆藏.

③ 借根方算法节要. 稿本. 中国科学院自然科学史研究所图书馆藏.

④ M. 克莱因. 古今数学思想. 张理京、张锦炎译. 上海科学技术出版社，1979. 301—306.

⑤ 引自：C. Jami. 欧洲数学在康熙年间的传播情况——傅圣泽介绍符号代数的失败. 118.

病,傅圣泽的文章在正要涉及二次方程时中断。一年以后,康熙帝试图和他的几个儿子看这篇文章①。但他们不能理解符号代数方法,康熙帝后来称:

> 谕王道化:朕自走身以来,每日同阿哥们察《阿尔热巴拉新法》,自难明白,他(傅圣泽)说比旧法易,看来比旧法愈难,错处亦甚多,鹘突处也不少,前者朕偶尔传与在京西洋人,开数表之根写得极明白,尔将此上谕抄出,并此书发到京里去,着西洋人共同细察,将不通的文章一概删去,还有言者:"甲乘甲,乙乘乙",总无数目,即乘出来亦不知多少,看起来想是此人算法平平尔,太少二字即是可笑也。②

康熙帝对这一新的代数方法的评价确实不高。那么,傅圣泽介绍的究竟是什么样的符号代数呢?让我们来看一下他的著作。傅圣泽的"新"正是相对于借根方的"旧"而来的。③他著有一本《阿尔热巴拉新法》,中国科学院自然科学史研究所图书馆藏有该书的一个版本④。我们下面的介绍便是基于这个版本的。

傅圣泽称:

> 新法旧法,其规大约相同,所以异者,因旧法所用之记号乃数目字样,新法所用之记号,乃可以通融之记号,如西洋即用二十二字母,在中华可以用天干地支二十二字以代之。盖支干字,皆人所习熟者,故用之之际,自无错误。
>
> 阿尔热巴拉之大旨,无非因所已知求所未知耳。欲得其大旨,必将所未知者,与所已知者相较,使相平等。始可得也。但较之际,欲令其相等,即未免须乎加减,既加减又必先定当加当减之名,方可用加减之法。若以数目字定其名,只于所已知者而已。于所未知者,将用何数以名之乎?况已知之中,又有不系于数者。……故必用通融字作记号,则无不可任举而名之矣。是以新法更通融

---

① C. Jami. 欧洲数学在康熙年间的传播情况——傅圣泽介绍符号代数的失败. 118.

② 此谕藏梵蒂冈图书馆。引自:韩琦,《康熙时代传入的西方数学及其对中国数学的影响》,中国科学院自然科学史研究所博士论文,1991,25.

③ 由于当时天元术已经失传,所以,傅圣泽所称的旧代数不可能是中国传统数学中的代数内容。另,据詹嘉玲分析,傅圣泽的主要资料来源很可能是普列斯特(Prestet)的《数学基础》(*Nouveaux Elements de Mathematiques*)。见:詹嘉玲. 欧洲数学在康熙年间的传播情况——傅圣泽介绍符号代数的失败. 119.

④ 为罗马梵蒂冈图书馆藏本的复制本。

于旧法也。

用通融记号之妙，难以枚举，如于算之际，或加减乘除、平方立方等等记号，常常不变，令人一见原号，俱各了然。若用数目字，必随处变换，一变之后，人即难知其原数，并原数所成之诸方，亦莫辨矣。若用通融记号，算之甚简便，观之省心思目力，斯可以专心于此法，而无他歧之扰，可得所求之理矣；若用数目字成一法，所得之理，只可执定用于本数，若用通融记号，则总括诸数，无所不通……

总之，于易解之题中虽偶有一两题旧法似便于新法者，若大概而论，则新法比旧法亦捷、亦简、亦总括、亦通融。但法中条项甚多……其名目烦难又皆非所素问者。况单用字作加减乘除之法，既毕，总无数目可见，似为无用，若将新法始终本末讲究精熟，然后虽遇至难之题，以法求之，无论已知之数与未知之数，皆可就此天干地支字，豁然以解，故言之不如用之。方可见耳[①]。

傅圣泽在书中以甲、乙、丙、丁等天干地支22个字代表数字，并引入了一些新的符号。前文已述，该书并未完成，现存该书的内容仅至四则运算法则。傅圣泽在该书序中已称，对于简单问题，旧法比新法更为简便。但他的书中却仅涉及最初等的计算方法，从中无法看到符号代数的优越性。所以，在康熙帝看来，其新法"甲乘甲，乙乘乙，总无数目，即乘出来亦不知多少"。完全无法认同傅圣泽的介绍。客观地说，康熙帝没有理解符号代数方法是可以理解的。实际上，符号代数在当时的欧洲也还处于刚刚成形且尚在发展的阶段。由于康熙帝将自己视为数学问题的最高仲裁人，被他否定的符号代数便无缘在中国数学家中流传，同时，也使得傅圣泽及其他传教士没能继续相关的翻译和介绍工作。这不能不说是代数学在中国传播史上的一件憾事。1794—1797年间，焦循撰成《加减乘除释》，书中以符号化的方式一般性地总结和探讨四则运算的方法和规则。可见，当时的中算家完全有能力理解并接受符号代数方法。

借根方代数在中国的命运要比符号代数好得多。借根方很可能被康熙帝纳入蒙养斋算学馆数学学习的内容之中。梅瑴成曾称，"供奉内廷，蒙圣祖仁皇帝授以借根方法"[②]，应该指的就是他在蒙养斋学习数学时的情况。

---

① 傅圣泽．详阿尔热巴拉新法与旧法之所以异．阿尔热巴拉新法．

② 梅瑴成．赤水遗珍．梅氏丛书辑要本．卷61．8b—9a.

同在蒙养斋学习过的明安图在他的研究工作中应用了借根方方法。不仅如此,借根方算法还被收入《数理精蕴》[1],从而得以在中国学者和数学家中较为广泛的流传。

上文已经提到,借根方是一种非符号化的代数。关于它的具体运算及表述方法,《数理精蕴·借根方比例》卷首给出如下说明[2]:

> 借根方者,假借根数方数以求实数之法也。凡法必借根、借方,加、减、乘、除,令与未知之数比例齐等,而本数以出[3]。

也就是说,借根方是利用设未知数(根数)及未知数的各次方(方数)来求得问题的解答的一种计算方法。下面,我们就以《数理精蕴》中的一个题目来看一下该法的具体运算步骤及特点[4]。

> 设如鸡兔同笼,但知共头三十六,共足一百,问鸡兔各若干?
>
> 兔　　　一根　　　　　　　足四根
>
> 鸡三六——一根　足　七二——二根
>
> 七二 十 二根=一〇〇
>
> 二根=二八
>
> 一根=四[5]
>
> 法借一根为兔数,则鸡为三十六少一根,以兔四足乘兔一根得

---

① 借根方比例. 数理精蕴.

② 这种特殊的代数运算法的早期译名为“借根方”,来源于该法的特点,借未知数(根)及未知数的各次方来解决问题,详见下文。在《数理精蕴》中,借根方之后又加入了“比例”二字。在《借根方算法节要》中,作者强调未知数“根”与其各次方是成比例的,而“根”本身即是比例因子。此外,《数理精蕴·算法原本》中的比例知识也在《借根方算法节要》中被提到。由此,我们推断,耶稣会士是用比例理论向康熙帝解释借根方方法的。正是基于这个原因,《数理精蕴·借根方比例》的编撰者们在卷首即指出根与根的各次方的比例关系,(见:《数理精蕴·借根方比例》,卷三十一)且更进一步,他们把比例一词添入借根方的名称之中,以指出该方法的理论基础。此后,“借根方”和“借根方比例”二词都曾出现在中国数学家的著作中,且有些数学家将借根方代数归入了比例算法之中。(见:罗士琳. 比例汇通)可见,早期借根方只是被理解为一种算法,而不是一个系统数学分支。

③ 借根方比例. 数理精蕴. 中国科学技术典籍通汇·数学卷. 3. 940.

④ 从时代上来说,《数理精蕴》中的《借根方比例》要比《借根方算法节要》晚,且经过《数理精蕴》编者们的改编。但由于《数理精蕴》在学者间得到了较好的流传,且对中国数学在18世纪产生了很大的影响,所以,本书以《数理精蕴》中的算题作为例子阐述借根方方法的特点。

⑤ 17世纪中算书中的加、减号及等号都被写得很长,其原因是,单字大小的加号与中国数字“十”写法一样,而减号和“一”,等号和“二”也同样存在这样的问题。

> 四根，为兔之共足数，以鸡三十六少一根，得七十二少二根，为鸡之共足数，两数相加得七十二多二根，与一百相等，七十二与一百各减七十二，则余二根与二十八相等，二根既与二十八相等，则一根必与十四相等，即兔数。与共三十六内减兔十四，余二十二，即鸡数。兔十四，以四足乘之，得五十六，为兔共足数。鸡二十二，以二足乘之，得四十四为鸡共足数，相加得一百，以合原数也。[①]

与上题类似的题目在中国古算书中经常出现。[②] 题中，设兔数为未知数(根)，于是，鸡数便为 36 - 根，根据题意，列出方程：

$$4根 + (72 - 2根) = 100$$

解方程，得出根数为 14。

从运算方法上来看，借根方中介绍的方程四则运算与现代初等代数的运算法则是一致的。其方程式表述法延袭了欧洲数学计算式横排的书写方式，在对方程的文字叙述中，采用多、少来表示单项式的正负。

与借根方同时传入的，还有当时欧洲的开方法及二次、三次方程的数值解法。该开方法与 1690 年拉普森(Joseph Raphson)发表的求根法，即现代数学中所称的牛顿—拉普森(Newton - Raphson)的迭代法是一致的。[③] 在下文中，我们还会将该法与中国传统增乘开方法做具体的比较。

借根方算法为大多数宫廷数学家所采用，钦天监监正明安图(？—1764)所撰《割圆密率捷法》便是以借根方入算的。梅瑴成盛赞借根方曰："其法神妙，诚算法之指南"[④]。汪莱(1768—1813)称，在他学习数学的时候，十之八九的数学家都是从研究借根方入手来研习数学的[⑤]。可见借根方在当时的中国得到了广泛流传和普遍的重视。

二、欧洲方程理论在中国的传播

如上文所述，用中国传统的增乘开方法可以求得任意高次数值方程的

---

① 借根方比例. 数理精蕴. 下编. 卷 34. 28b—29a.

② 这类算题在《借根方算法节要》中是不存在的。《借根方算法节要》主要是介绍代数整式及分式的多项式的四则运算、开方法及二至三次方程的数值解法。只在全书最后有"勾股弦各较算法"、"算各方面积较法"、"算各方体积较法"三部分讲解如何应用借根方法解决问题。

③ 韩琦. 康熙时代传入的西方数学及其对中国数学的影响. 31—34.

④ 梅瑴成. 赤水遗珍. 卷 61. 9a.

⑤ 引自：韩琦. 康熙时代传入的西方数学及其对中国数学的影响. 49.

近似正根，相对于增乘开方法，17、18世纪欧洲数学中的相应方法显得较为笨拙。但源于古希腊数学的对理性和一般性的追求，使得欧洲数学在方程理论的研究方面有很大进展。

由于古希腊哲学家不肯承认无理数，这为他们处理开方问题带来了很大的麻烦，他们采取的解决办法是回避开方问题。亚里山大历亚前期以后，情况稍有变化。阿基米德（Archimedes，前287—212）以给无理数划定范围的方法给出无理数的近似值，对于阿基米德来说，3的平方根是一个大于1351/781，小于265/153的数。亚里山大历亚的希腊人赫伦（Heron）没有这方面的顾忌，他采用发源于巴比伦和埃及的配方法开平方。他经常利用公式

$$\sqrt{A}=\sqrt{a^2\pm b^2}\approx a\pm\frac{b}{2a}$$

其中，a 是最接近 A 的有理数平方数的平方根，而 $b=a^2\pm A$。公元100年左右，代数方法开始占据重要地位，利用代数技巧解问题的著作亦开始问世。希腊数学中最重要的代数著作无疑是丢番图（Diophantus，公元250年左右）的《算术》。在处理开方问题时，丢番图只承认有理根，而忽略所有其他根。当二次方程有两个正根时，他只给出较大的一个。在求解一个方程的过程中，如他明显看出方程的根均为负数或无理数及虚数时，他就倒算回去，指出怎样改变一下方程，就能使新方程有有理根。也就是说，作为一个代数学家，他放弃只有无理根、负根或复数根的方程。所以，我们不能从丢番图那里找到可以求数字方程近似解的一般性方法，因为他必须通过令人目不暇接的巧妙变换将方程化成他能解的模式，然后再去求方程的解。古希腊代数学家将其所有计算都限定在有理数系的苛刻要求，使得他们从一开始便意识到方程的可解与不可解的（是否有正有理数根）问题。① 文艺复兴时期的数学家们继承了丢番图和阿拉伯数学家的代数研究成果，同时，也继承了古希腊数学家对一般性和理论性的追求。如此，他们便也继承了困扰丢番图等的问题。一直到17世纪中叶，无理数及负数能不能够被算作是真正的数字，还是一个争论不休的问题。正因为如此，他们对方程系数的符

---

① 在中国传统数学中，方程多是以现实中的合理问题为条件设立的，所以，中算家们讨论的方程至少会有一个正根。虽然我们不能说中国古代数学家肯定没有意识到没有正根的方程的存在，但我们至少可以说，在现存史料中，不存在关于这类方程的记载。

号问题特别敏感。此外,由于他们注重寻求方程一般解,也即公式解,使得他们不得不按系数符号将方程分类,然后一类一类地解决这些问题。举例来说,他们首先解决二次项系数为零的三次方程,并将之分为

$$x^3 + mx = n,\ x^3 = mx + n,\ x^3 + mx + n = 0,\ x^3 + n = mx$$

四种特殊类型,这样,他们便可保证其所探讨的方程都只含正系数项,而通过分类,他们可以对每种情形所涉及的计算法则给出几何性的证明。但是,四次以上的方程是不存在公式解的,所以欧洲数学家们也在寻求高次方程数值解的方法。在19世纪以前,欧洲人在这方面发明出来的方法均劣于中国传统的增乘开方法。但他们所研究的方程理论问题却是中算家所未曾虑及的领域。

虽然耶稣会士并没有系统地向中国学者介绍当时发生在欧洲的与扩展数系相关的争论及韦达等人在方程论方面的成果,但是他们还是带入了当时欧洲这方面的一些最新成果。

在《数理精蕴·借根方比例》中的“开带纵平方”(解二次方程)部分,有如下一段论述:

> 借根方比例开带纵平方,其以长方之积,用长、阔之较或和而求长、阔之数,皆与常法同,但不立和纵、较纵之名,惟有多根少根之号。而每根之数,或为长方之阔,或为长方之长,错纵其名,有十二种。推究其实,总不出和较之两端。如云“一平方多几根与几真数等”,或“几根多一平方与几真数等”,或“一平方与几真数少几根等”,或“几根与几真数少一平方等”,此四者,根皆较纵,而其每根之数皆长方之阔也。如云“一平方少几根与几真数等”,或“一平方少几真数与几根等”,或“一平方与几真数多几根等”,或“一平方与几根多几真数等”,此四者,根亦皆较纵,而其每根之数,则皆长方之长也。如云“一平方多几真数与几根等”,或“几真数多一平方与几根等”,或“几真数与几根少一平方等”,或“一平方与几根少几真数等”,此四者,根皆和纵,而其每根之数,或为长方之长,或为长方之阔也。要之所谓一平方者,即一正方而多几根少几根,即变正方而为长方,其真数比平方多根者,其每根为阔,真数比平方少根者,其每根为长,二者皆较纵,惟真数比根少平方者,则为和纵也。至于开之之法,皆以真数为长方积,以根数为纵,依面部带平方法开之。有较纵者,先求和,有和纵者,先求较,其根为长方之阔者,以

和较相减折半而得每根之数。其根为长方之长者，以和较相加折半而得，每根之数也，俱详设如。①

这段文字的大意如下：

用借根方解二次方程的方法，相当于以长方形的面积及其长、宽的和或较求长、阔之数。二次方程可分为十二种类型。形如：

$x^2+bx=c$、$bx+x^2=c$、$x^2=c-bx$、$bx=c-x^2$，（其中 a，b，c，d 均为正数）

的四种方程，方程的根都是较纵方程，它们的根为长方形的宽，那么，这样的方程必有一个正有理根。形如：

$x^2-bx=c$、$x^2-bx=c$、$x^2=c+bx$、$x^2=bx+c$

四种方程，方程的根也是较纵，得到的根为长方形的长。由此，这样的方程也必有一个正有理根。而形如

$x^2+c=bx$、$c+x^2=bx$、$c=bx-x^2$、$x^2=bx-c$

的四种方程，方程的根为和比，这样的方程有两个正根，分别是长方形的长与宽。

上述的分类方法虽然囊括了二次方程的所有形式，但却有很严重的重复问题。实际上，上述每组方程都只可以表述为一种形式，即

第一组：$x^2+bx-c=0$；

第二组：$x^2-bx-c=0$；

第三组：$x^2-bx+c=0$

在这三组方程中，第三组如有正根，则一定不惟一。书中对这三种情形给出的结论是正确的。

在卷三十三"带纵立方"中，也有一段关于三次方程正根个数与方程系数的符号的关系的一般性论述：

借根方比例开带纵立方，与常法不同。常法先知各边之和或较，既开得一边之数，以和较加减之，即得各边之数。此法止有根方多少之号，而无和纵较纵之名。惟求每根之数，而不问余边。其立法之本意，盖欲借根方以求他数，既得一根之数，则所求之数已得，而方之形体，有所不计。且其与根方相等之积数，或为长方体、扁方体，或非长方体扁方体形（或于长方扁方之内少几数，或于长

① 数理精蕴．33．2a—3a．

方扁方之外多几数，则不能成长方扁方体形也），皆不可知。故不可以带纵之常法求也（其积数或原为几根几方之总数，而非一长方或一扁方之全数，则止可以逐方逐根计之。若作一长方或一扁方算，则其各边必有奇零不尽，而转与所设之根数不合矣）。今类其法，分为九种。如"一立方多几根与几真数等"，一也；"一立方少几根与几真数等"，二也，"一立方多几平方，与几真数等"，三也。"一立方少几平方与几真数等"，四也。"一立方多几平方多几根与几真数等"，五也，"一立方少几平方少几根，与几真数等"，六也，"一立方多几平方少几根与几真数等"，七也，"一立方少几平方多几根，与几真数等"，八也。又"几平方少一立方与几真数等"，九也。……要之，所谓立方者，即一正方体、而多平方多根，少平方少根，即变正方体而为长方体、扁方体，或为磬折长方体、扁方体，其积数中有立方，则用再乘，有平方则用自乘，有根则用商数，多则相加，少则相减，九种之中，无异术也。即推之多乘方，莫不皆然。总以其累乘之数为主，而以所带根方之积数加减之与立方无二理也。[①]

上文相当于给出9类三次方程，分别形如：

$x^2+cx=d$、$x^3-cx=d$、$x^3+bx^2=d$、$x^3-bx^2=d$、$x^3+bx^2+cx=d$、$x^3-bx^2-cx=d$、$x^3+bx^2-cx=d$、$x^3-bx^2+cx=d$、$bx^2-x^3=d$

这9类方程是可以有一个正根的。

《数理精蕴》中这样的关于方程理论的介绍引起了汪莱的关注。他以此为基础对方程理论做了更进一步的归纳和探讨，指出了《数理精蕴》中存在的一些错误。我们将在下节中对汪莱的工作做更详细的介绍。

第三节　天元术的复兴及中国数学家对天元术与借根方的态度

一、天元术在18世纪的复兴

上节已经提到，自17世纪末叶，借根方在中国得到了广泛流传和普遍的重视。正是基于对借根方的研究，传统的天元术又被重新理解，但这也为

① 数理精蕴，卷33．10a—12b.

借根方树立了一个强大的对手。

通过学习借根方，梅瑴成重新理解了天元术。在《赤水遗珍》"天元一即借根方解"一节中，他记述了其理解天元术的过程：

> 尝读《授时历草》求弦矢之法，先立天元一为矢。而元学士李治所著《测圆海镜》，亦用天元一立算。传写鲁鱼，算式讹舛，殊不易读。前明唐荆川、顾箬溪两公，互相推重，自谓得此中三味。荆川之说曰，艺士著书，往往以秘其机为奇，所谓立天元一云尔，如积求之云尔，漫不省其为何语。
>
> 后供奉内廷，蒙圣祖仁皇帝授以借根方法。且谕曰，西洋人名此书为阿尔热八达，译言东来法也。
>
> 窃疑天元一之术颇与相似。复取《授时历草》观之，乃涣如冰释。殆名异而实同，非徒曰似之已也。夫元时学士著书，台官治历，莫非此物，不知何故，遂失其传。犹幸远人慕化，复得故物。东来之名，彼尚不能忘所自，而明人独视为赘疣而欲弃之。噫！好学深思如唐、顾二公，犹不能知其意，而浅见寡闻者，又何足道哉，何足道哉！①

在此条后，梅氏评《四元玉鉴》曰：

> 右《四元玉鉴》中一则也，藏匿根数，微露端倪，所谓秘其机以为奇，惟恐缄藤之不密，或泄其金针，诚有如荆川之所云者。今以借根方攻之，其坚立破②。
>
> 又按：《测圆海镜》一书，前立图解，条分缕晰，观其自序，不计人之悯笑，而惟求自得于心，似非有意秘异者。但其细草不将加减乘除之数写出，而惟以号式代之，在当下非不明显，无如传写失真，竟至不可思议，然著书时初未计及于此也。荆川乃等诸《四元玉鉴》之秘其机缄，与艺士同讥，过矣。③

梅氏"天元一即借根方"的论断为乾嘉天元术复兴的基础，然而梅氏的《赤水遗珍》却是完全以借根方入算的。梅瑴成采用借根方算法是完全正常的。首先，他对借根方方法更为熟悉。其次，在上述引文中，他并无贬低借根方

---

① 梅瑴成. 赤水遗珍. 卷 61, 8b—9a.

② 梅瑴成, 赤水遗珍. 卷 61. 14b.

③ 梅瑴成. 赤水遗珍. 卷 61. 16b.

之意。梅氏虽然以“天元一即借根方”阐述了其“西算中源”的观点，但康熙帝、梅文鼎等人之倡导“西算中源”，本身即有意于“缩小中西科学的隔阂，息中西聚讼，便于引进和接受西方科学知识”之意。①所以，这并不意味着梅氏欲以此来抵制借根方的继续传播。且按当时的普遍观点，算学愈出欲密，今胜于古，则“借根方出于天元一”一语本身即意味着借根方是胜于天元术的。此外，从梅氏按语可以看出，他对天元术的筹算表示式等还颇有微词。可以说，梅瑴成虽然得出天元术与借根方名异实同的论断，但他本人还是倾向于借根方的。

然而，梅瑴成的态度，又或者可以说是康熙帝的态度，并不完全左右宫廷外数学家的研究取向。

当时，民间对数学感兴趣的学者大多生活于江南地区，而他们中的绝大多数又是属于乾嘉考据学派的。在第二章中，我们已经提到，乾嘉考据学派是以恢复古代经典及其实事求是的治学准则为标识的。对于在宫廷受过数学教育的梅瑴成、明安图等来说，理解到天元术与借根方是同样的数学方法，并没有使他们转向对天元术的研究。既然“借根方”较“天元术”更“密”，那么，他们当然要继续应用其熟悉的借根方方法。但对于考据学派的江南学者，情况就完全不同了。首先，在考据派学者们看来，史学的地位并不比数学的地位低。虽然他们大多学过借根方方法，且对其有很高的评价，但在他们看来，即便不能从传统数学中找到比传入的欧洲数学知识更出色的成果，单是对于中国数学那段历史的研究也是很有意义的。这一点在 1796 年李锐(1773—1817)写给焦循(1763—1820)的一封信中有很好的表现：

> 借根方，西人名为东来法，梅总宪谓即古立天元一是也。锐尝推而论之，元郭守敬求周天矢度，用开带从三乘方，天元一是也。西人求每弧通弦，用诸等边割圆、借根方法也。借根方法即立天元一，则有天元一而后有借根方；有借根方而后有八线表，有八线表而后有弧三角法，有弧三角法而后测验密，测验密而后推步精。然则西法之超越前代，实吾中土有以资之。特自明以来此失之而彼得之耳。凡《九章》所能御者，借根方尽能御之，《九章》所不能御者，借根方独能御之。梅徵君(文鼎)称算法莫精于方程，锐谓借根方非方程所能及。国朝算学名家，梅总宪(瑴成)而外未见有深明此术

① 王扬宗. 明末清初“西学中源”说新考. 科史薪传. 辽宁教育出版社，1997. 71—83.

者,以故其学犹未大显。《数学九章》、《测圆海镜》、《益古演段》三书皆发明立天元一者,前书故举是为问。书札云,欲言之阮侍郎,将此数书或刻或抄,此莫大之功也。锐日夕望之。[①]

李锐信中重复了梅瑴成借根方就是天元术的论断,但他并未表现出对“天元术”的偏爱。不仅如此,他还通过天元——借根方——八线表(三角函数表)——弧三角(球面三角学)的发展过程,指出,正是基于这些发展,西方才能够给出比中国古代历法,其中包括利用天元术的《授时历》,更为精确的历法。由此,他当时对天元术和借根方数学水平的评价便一目了然了。正是由于他对借根方法的推重,他为借根方法未能得到“大显”而感到遗憾。但同时,正如前文所述,李锐是考据学派的一员,他的数学研究并不仅仅是为了得到更有效的数学成果,还要就传统算书与算法“一一究明其所以然,无所疑惑而后快”[②]。实际上,很可能是受到其师钱大昕的影响,李锐对史学有着很强的兴趣,第二章中,我们曾提到他的三大愿望,从其愿望的内容来看,李锐所感兴趣的是中、西天文和数学的历史,而非发现新的数学方法。[③]正是他的这一取向,使得他虽然接受了“借根方出于天元一”和“算法越出越密”的两条理论,还是日夕盼望读到含天元术的古算书《数学九章》、《测圆海镜》和《益古演段》。他对于这三部算书的研究却得到了出乎其意料之外的结果。

焦循在《衡斋算学》跋中称:

---

① 李锐. 致焦循. 观妙居日记. 抄本. 转引自:郭世荣.《清代中期数学家焦循与李锐之间的几封信》. 数学史研究文集. 127.

② 李锐,《致焦循》,引自,郭世荣,《清代中期数学家焦循与李锐之间的几封信》,《谈天三友》,131.

③ 焦循非常了解李锐的治学宗旨,他称李锐“闵古法之微,探索诸史,自颛顼夏殷周鲁,下逮元明数十余家,存者考而彰之,缺者修而补之,穷幽探赜,务求如其术之本意而止,为千古读史者启其扃,亦即为千古治历者益其智”。见:焦循,《修补六家术序》,《雕菰楼集》,卷15. 实际上,历史上并不乏从人文角度关注数学研究却又得到出色数学成果的数学家。韦达希望自己成为古代数学的保存者、发掘者和继承者,他自称其重要数学著作《分析引论》为“一部复古的数学分析著作”。通过阅读丢番图的《算术》,他认为古人曾有过一般的代数形式计算,他只是在其著作中重新引用这一方法,所以,他的工作相当于使古代的知识得到复原。但实际上,他成为第一个有意识地、系统地使用字母进行计算的数学家。他的著作成为符号化代数学史上的开篇巨著。李锐与韦达的旨趣非常相似。他在其《勾股算术细草》中便称古代数学有“一以贯之”之理,为此,他以天元术及出入相补证明法构造出一套形式化的、完备的关于求解勾股形的计算系统。虽然他称其著作该书的目的只是为了让其学生了解古代数学的方法,但实际上,他在其中所应用的系统性和一般性的研究方法却超出了传统数学著作的水平。

"岁乙卯(1795),余在浙始得见《益古演段》、《测圆海镜》两书,急寄尚之,尚之喜甚,为之疏通证明,复推其术于弧矢,著书以明郭太史授时草所用天元一术。已而,予又得秦氏所为《数学九章》,大略亦撰为《天元一释》,《开方通释》以述两家之学。庚申冬(1800),与尚之同客武林节署中,互相证订,喜古人绝学复续于今日"①。

焦循称他于1795年见到李冶的《益古演段》和《测圆海镜》,并很快将这两部书寄送李锐(尚之)。李锐至迟在1796年收到了《测圆海镜》,并于1797年4月和1798年1月分别完成了对《测圆海镜》和《益古演段》的校勘。② 通过对两书的校勘,李锐对天元术有了进一步的理解。与此同时,焦循也在研究这两部算书,并撰成《天元一释》(1799)。书中,他不仅解释了天元术的表述和运算方法,还根据一元高次方程各项系数符号的变化情况给出了方程的分类。通过李锐和焦循的工作,天元术的运算方法和特点已基本被阐明。

1800年冬,焦循和李锐同时在杭州阮元幕府,共同研究李冶和秦九韶的著作。一年后,焦循撰成《开方通释》(1801),书中,他综合李冶和秦九韶的成果,对增乘开方法的要点作了精辟的论述。至此,另一项宋元时期的出色数学成就重新被理解了。③ 此后,学术界出现了一股研究宋元数学著作的热潮。李锐于1806年撰成《句股算术细草》和《弧矢算术细草》等书,以天元术阐述句股形理论及关于圆弧、矢、径互求的关系。当时研究过天元术的学者还有汪莱、孔广森、张敦仁(1754—1834)、谈泰、沈钦裴、罗士琳、徐有壬等。

继《数书九章》、《测圆海镜》和《益古演段》之后,《四元玉鉴》成为新的研究热点。嘉庆初年,阮元(1764—1894)抚浙时,访得旧抄本《四元玉鉴》,并将一部副抄本交李锐(1773—1887)校算。李锐不久病逝,未能完成这一工作。此后,沈钦裴、董祐诚(1791—1823)、徐有壬、罗士琳及稍晚的戴煦(1805—1860)、丁取忠、李善兰(1811—1882)、陈棠、崔朝庆(1860—1943)等人都对《四元玉鉴》进行了研究。其中沈钦裴、罗士琳、戴煦还各自独立撰成细草。通过对现存史料的分析,似乎李锐并未能在去世前理解"四元术"。沈钦裴于1821年完成了部分《四元玉鉴细草》,但通过对这半部细草的分

---

① 焦循. 第五册算书焦记. 衡斋算学. 第6册. 夏燮鄱阳县署刊本,9a—b.

② 李锐分别于嘉庆元年三月及十一月写下了两书的跋。

③ 刘钝. 开方通释提要. 中国科学技术典籍通汇·数学卷. 4—1447.

析,我们发现,当时他还未理解多于一元的高次方程组的表述和计算方法。[①]1822 年,徐有壬见到《四元玉鉴》,通过三昼夜的研究后,他完成了阐示“四元术”方法的“细草”,也即详细计算步骤。[②] 从现存史料分析,徐有壬很可能是宋元以后理解“四元术”的第一人。[③] 至此,宋元时期出色的代数方法天元术、四元术及增乘开方法被重新理解。[④] 此后,沈钦裴完成了他的《四元玉鉴》细草,该书未经出版,但数学史界普遍认为,沈钦裴给出的四元消法基本符合朱世杰原意。[⑤] 自 1823 年起,罗士琳开始撰写《四元玉鉴细草》。该书出版后对当时的数学家有很大的影响。直至 19 世纪末,数学家们还在研究与《四元玉鉴》相关的数学内容,他们的工作多是以罗士琳的细草为基础进行的。其中包括易之翰《四元玉鉴释例》[⑥],陈棠《四元玉鉴易简草》[⑦],张煜《读四元玉鉴随笔》[⑧],崔朝庆《读四元玉鉴记》[⑨],董化时《四元玉鉴详草》[⑩] 等等。至迟在 1845 年,戴煦完成了他的《四元玉鉴细草》,此书未经刊刻,流传不广,所以未对当时的数学家起到太大影响。戴煦创造出一种代入法的消元方法,虽然与朱世杰原意不符,但戴煦很可能是中算史上第一个利用代入法解方程的中算家,所以,他的工作还是有一定意义的[⑪]。李善兰亦撰有《四元解》一书,他试图解决朱世杰四元高次方程表示法的局限问题,给出他自己的表述方法。在其“四元之图”中,李善兰以 16 个方图表示四元高次方程。

---

① 沈钦裴. 四元玉鉴细草. 王萱铃抄不全本.

② 徐有壬. 演元九式序. 演元九式。

③ 田淼.《四元玉鉴》的清代版本及清人对《假令四草》的校勘研究. 36—47。

④ 杜石然. 朱世杰研究;《四元玉鉴》的清代版本及清人对《假令四草》的校勘研究。

⑤ 沈钦裴. 四元玉鉴细草. 稿本. 北京图书馆藏。

⑥ 易之翰. 四元玉鉴释例。

⑦ 陈棠. 四元玉鉴易简草。

⑧ 张煜. 读四元玉鉴随笔. 1905 年刊本。

⑨ 崔朝庆. 读四元玉鉴记. 南菁书院札记. 1894。

⑩ 董化时. 四元玉鉴详草。

⑪ 田淼. 四元玉鉴消法研究. 李迪先生从事科学史研究四十周年纪念会宣读。

四元方程表达图，四元解

利用李善兰的表示，从理论上来说，人们可以表达超过4个未知数的高次方程，并可以解决交叉项的系数的位置问题。但这个表述方法过于繁琐。以李善兰的方法，方程 $x^3+3xy+5y^2+4zw+11w^3+7xw-5yz=0$ 要被写成如下五个式子：

5　天		−5	7	11
3	7			
1				

不仅如此，利用该表述法，必然使得方程计算异常繁琐，所以，该法并不实用。

可以说，四元术被解读之后，天元术便彻底取代了借根方。一些倾向于西方数学研究的学者如项名达等专注于三角函数幂级数展开式的研究，并不关注于方程解法与方程理论问题。至18世纪60年代以前，李善兰、华蘅芳、吴嘉善、刘彝程等均学过天元术与四元术。李、吴二人还分别有专著探讨四元术内容。华蘅芳在叙述其少年学算经历时称："余少时甫通九数，谒乡先辈邹敬甫先生，先生谓余曰，吾但知天元耳，年老不能更有进境，吾门下有丁、张二生，皆行三而年绝少，能演四元。"可见当时是否通天元、四元已成为衡量数学家水平的一个标准。

二、中国学者对天元术与借根方的态度

在中算史上，考据学派算学家是以其宏扬传统算法而著名的。如果我们

要完成的是一部线性的数学成果累积史或进步史的话，那么，很多17至19世纪中算家的工作都会被说成是微不足道的，同样，部分乾嘉汉学派数学家，如李锐等，由于其对借根方及其他欧洲数学方法的批评，便可以被描写成逆历史潮流而动，影响中国数学早日得以现代化的灰色人物。而另一位同样属于考据学派的数学家汪莱则可以其独树一帜地维护借根方的态度成为当时数学史上惟一的亮点。然而，正如前文所述，跨文化间的数学传播是一个非常复杂问题，不能以一维坐标来衡量其中的事件和人物。正因为如此，要真正了解一位数学家的工作或评价他们在这一历程中所扮演的角色，我们必须要把他置于其所处的社会和文化环境中，去做认真细致的分析。

无庸讳言，18世末至19世纪初，中国数学家对于传统的天元术和欧洲传入的借根方的态度是有很大分歧的，该分歧影响了他们的研究取向，并进而影响到两种代数学的发展。就阶段性的研究情况来看，嘉庆以后，中算家们基本舍弃了借根方而专言天元、四元，这种取舍无疑受到乾嘉学派治学取向的影响。这一点刘钝、洪万生先生已有过详细论述。[①]然而，天元术取代借根方是否完全是因为乾嘉学者的古今、中西畛域之见，却还值得深入探讨。

梅瑴成是清代重新理解天元术的第一人，他的这一发现还成为"西算中源"的重要根据。但这并不意味着他认为天元术比借根方更为出色。在重新解读天元术之后，梅瑴成仍评论借根方曰："其法神妙，诚算法之指南。"[②]由于他看不懂四元术，他讥讽朱世杰欲隐匿他的数学方法以迷惑读者，他称："右《四元玉鉴》中一则也。藏匿根数，微露端倪，所谓秘其机以为奇，惟恐缄胜之不密，或泄其金针。诚有如荆川之所去者。今以借根方攻之，其坚立破。"[③]也就是说，他认为用借根方来解《四元玉鉴》中的问题是非常简单的。可见，他当时还是倾向于借根方的。

19世纪初，焦循和李锐均表现出对天元术的热衷和对借根方含蓄的批评。作为乾嘉学派算学家中的代表人物，他们对这两种代数方法的态度无疑会受到该学派的研究主旨及方法的影响。而作为天文和数学领域的两位权威，他们的态度又会进一步影响整个学派乃至学术界对两种代数的评价。

---

① 洪万生，刘钝．汪莱、李锐与乾嘉学派．9—36；洪万生．谈天三友焦循、汪莱和李锐——清代经学与算学关系试论．43—124．

② 梅瑴成，《赤水遗珍》，《梅氏丛书辑要》本．

③ 梅瑴成．赤水遗珍．卷61．

所以，对他们二人的具体情况的分析便显得至关重要。

前节我们已经看到，时至 1796 年，也就是看到秦九韶、李冶数学著作的前一年，李锐对于借根方还是推崇备至的。李锐之所以要研究含天元术的数学著作，是出于他乾嘉学派学者的史学取向。我们在第三章已经提到，李锐研究的三大目标实际上均属于学术史，或天文、数学的历史范畴，在这方面，他很可能受到了其师钱大昕的直接影响。此后，他对于天元术和借根方的态度便有了明显的转化。到 1800 年，李锐明确地表示："立天元者，算氏至精之术也。"锐"笃好立天元术，亟欲彰而明之"。[①]显然，对于他来说，本来被视作由天元术进一步发展而来的，可以尽御《九章》中的数学问题，又独能御《九章》所不能御的问题的借根方，已不能与天元术相提并论了。在 1796—1800 年间，他校勘了《测圆海镜》、《益古演段》、《缉古算经》、《数书九章》等著作，并以天元术完成了《弧矢算术细草》(1798)。这些工作对他态度的转化应该是起到了决定性的作用。

焦循也是深通借根方与天元术的。1795 年，焦循得到《益古演段》及《测圆海镜》。1799 年，他撰成《天元一释》，其序中称："金元之间，李仁卿学士作《测圆海镜》、《益古演段》两书，以畅发其(天元术)旨趣。""明顾箬溪不知所谓，毅然删去细草，终明之世，此学遂微。国朝梅文穆公悟其为欧罗巴借根法之所本，于是世始知天元一之说。然李氏书虽尝板，而海内不多有。故学者习学借根方法，而于天元一之蕴，或有未窥者也。吾友元和李尚之锐精思妙悟，究核李氏全书。""重为校注，奥秘益彰，信足以绍仁卿之传，而补文穆所不逮也。循习是术，因以教授子弟。"[②]焦循选择天元术而不是借根方作为其教学内容，暗示了他对这两种代数方法的取舍。由此可见，与李锐相似，通过对 13 世纪数学著作的研究，焦循对借根方和天元术的态度发生了转变。

罗士琳是乾嘉后期主天元术的另一力将，他对借根方与天元术的态度亦颇值得研究。罗士琳于 1815 年撰《比例汇通》，该书于 1817 年刊刻。罗氏在该书序言中称：

> 数之所恃者，加减乘除耳，奇偶对待则加减之，而巨细立成，奇偶纵横则乘除之，而纲目不紊，推其原不过以小比大，以寡比多，以

① 李锐. 天元一释序. 天元一释. 里堂学算记. 2a—3a.

② 焦循. 天元一释. 卷上. 1b.

虚比实，以假比真，以彼比此，以旧比新而已。此西人比例法之所以为最上乘也。苟能明乎比例之率，无论一、十、百、千、万以至无量数纷纭错乱，皆可不旋中等而彻底澄清，又何尚乎《九章》哉？惟是九章之名最古，后人不解九章乃备数而设，遂哗九章为牢不可破之格，胶柱鼓瑟，其谬甚矣。殊不知九章即度与数之二端，分而言之，度量法也……

窃思句股少广相表里，而方田与商功无异，差分与均输何殊，自九章之名立而滋人之惑其夥，与其因比例之不同分作九章，而其法转淆，不若判九章之名别统归比例而致用划一。[①]

在同书“借根方发凡”一节中，罗士琳写道：借根方“一切算法无不可以御之，是诚比例之大全，数学之极妙者矣”[②]。他以西方比例算法重新组织《九章算术》中的数学内容。至1815年，《益古演段》、《缉古算经》、《数书九章》等书已重新校订出版。焦循《天元一释》(1800)、《开方通释》(1801)，李锐的《弧矢算术细草》、《句股算术细草》和《方程新术草》等亦均已成书。罗氏亦称：“借根方者，假借根数、方数以求实数之法，即元学士李冶所立天元一是也。”[③]可见他已经了解了天元术的内容，但他还是坚持使用借根方，并称将撰写《借根方解》，证明此时的罗士琳并不认为天元术较借根方有任何优势。

1822年，罗士琳获读《四元玉鉴》，从1823年起，他开始撰写《四元玉鉴细草》。此后，罗士琳对借根方与天元术的态度与以前完全相反。而他的《借根方解》也终未成书。1840年，罗士琳撰《三角和较算例》，用天元术解答三角问题，“以补西法所穷”。罗氏称“立天元一术超越群法，为自来算家至精之绝诣”[④]。

可以看出，前述三位数学家均首先理解并掌握了借根方方法，他们认定其远较《九章算术》中的传统算术方法更为优越，并公开发表了他们的观点。在这一点上，他们都未曾试图捍卫传统算法。

其中罗士琳的情况尤其值得思考。1815年为乾嘉学派尚盛之时，当时之罗士琳完全没有崇古倾向。何以在乾嘉学派呈衰退之势时罗士琳反而开

---

① 罗士琳．比例汇通自序．比例汇通．1a—2b．

② 罗士琳．比例汇通．卷3．1b．

③ 罗士琳．比例汇通．卷3．1a．

④ 罗士琳．三角和较术序．三角和较术．观我生室汇稿本．3a．

始迷古了呢？1839年，罗士琳在《割圆密率捷法》跋中称："说者谓西法远逊中法，此盖本吾乡阮太保相国《畴人传》利玛窦论中土之法之精微深妙有非西人所能及者一语。""近年中法盛行，唐宋以来诸算书悉皆佚而复显，由是得证。""彼之借根方即古立天元一术，名异实同，初非西人所独创。""然西法亦有不可没者，如弧矢八线以密率圆周为用，列表既便，测圆较确，复因八线积数太多乘除匪易，设连比例求对数以加减代乘除为用尤捷，其二者，术之最善者也，故至今并重于世。"①此处罗士琳还是试图对西方数学给出一个公允的评价，并非一味排斥西法。

李锐、焦循、罗士琳三人均是对天元术与借根方有过深入研究的数学家，他们三人对此二术的褒贬应该还是有其理由的。下面，我们首先从数学方法的内容和表述方法上分析一下天元术和借根方的异同。

确如梅瑴成所说，天元术和借根方的主体是一致的。它们的解题过程都是先设未知数，利用未知数建立数字方程，解方程，并得到未知数的一个数值解。换句话说，利用一元高次方程解决问题。然而，它们的词汇、记号、方程表述法及解方程的方法都不同。

借根方与天元术的方程表示，影印自：数理精蕴．卷31；李锐：开方说．

① 罗士琳，割圆密率捷法后跋．割圆密率捷法．岑氏刊本，3a—b．

借根方的方程表述法为中国数学家带来了一些不便。首先,借根方的方程式是横列的,而中国当时的书写方式则是竖行书写,所以,与现在横行书写习惯相符的横列方程式在当时则较天元术的竖列方程写法更为笨拙。其次,借根方的一些词汇与天元术也不同。举例来说,正和加在借根方中被称为“多”,而负和减被称为“少”。天元术的词汇则是中算史上一直延用的“正”、“加”和“负”、“减”。这两种术语的不同并非仅在于其文字上的区别。骆腾凤(1770—1841)在《艺游录》中有“论《测圆海镜》之法”及“论借根方法”等节,他认为

> 借根方之异于天元一者,在正负多少之异,不在两边加减之异也。①
>
> 借根方以多少为号,天元一以正负为名,此其异耳。窃尝论之,正负有似乎多少,而古人立法之意,实非以多为正,少为负也。正负者,彼此之谓,用以别同异、定加减耳。
>
> 天元一正负同名相加,异名相减,借根方则多少同名相加者亦可相减,异名相减者亦可相加,其有不合,则有反减反加之法,此其别为一术,亦无不可,然与天元一较,则西不如中也远矣。②

诚如骆氏所言,在传统数学史上,早在《九章算术》中已出现了正负术。但这个正、负相当于只是以不同的符号去标注一个数字,这样,便可以根据正负术确定其参与运算的方式。古代数学著作中并没有明确地给出正数大于负数,尤其是负数小于零这样的概念。借根方中以多、少分正负,则明确带有正数大于负数的含意。我们知道,欧洲大约在1500年时才开始接受零为一个数。负数运算方法和概念是从阿拉伯传入欧洲,但在16、17世纪,大多数数学家并不承认它们是数。由于对于正、负数的认识不同,欧洲数学家在使用负数时非常小心,借根方中以系数符号进行方程分类亦是由此而生的。而中国数学家们则早在13、14世纪就可以随意地处理一般系数的方程的开方和消元问题了。从这个角度来看,骆滕凤称借根方“与天元一较,则西不如中也远矣”是有其道理的。但也正是由于欧洲人认为负数是小于零的数,所以,他们不接受其可以作为方程的一个根,由此导致了他们关于方程论深

---

① 骆滕凤. 论测圆海镜之法. 艺游录. 卷1. 26b. 1843年刊本.

② 骆滕凤,《论借根方法》,《艺游录》, 1843年刊本,卷1,1a—2a.

入研究。罗士琳批评汪莱:“以多、少课和较”是“于西法太深”①,他所不能理解的是,以多、少名正负所蕴含的正负数概念正是汪莱方程论研究的基础。除此之外,在中国数学中,关于高次方程的系数有一些特殊的词汇。举例来说,常数项被称为实,一次项系数被称为方,最高次幂的系数被称为隅,其它各项系数被称为廉。一个方程可以有一廉、二廉、三廉……这样,一个形如 $ax^3 + bx^2 - cx = d$ 的简单三次方程在借根方中被写成:“几二乘方多几平方少几根积与几真数等。”而在天元术中,它只被写成“正隅、正廉、负方、负实”。相对来讲,天元术的表述法要比借根方的表述法简单得多。不仅如此“借根方可算是一种缩写代数学(syncopated algebra),而中国的天元术则向用分离系数法。立式之繁简相差远甚”②。可以说,仅从表述方法上来说,对于当时的中国学者来说,天元术方法显然更为简明合用。然而,这样的区别并不是影响数学家们对天元、借根态度的决定性因素。实际上,在理解了天元术之后,梅瑴成也是一直坚持使用借根方中的符号③。《四库全书》(1782) 的编撰者们也是利用借根方方法解释《测圆海镜》中的高次方程的④。

借根方和天元术除在表达形式上有所差异外,两种方法中所用的开方及求方程数值解的方法也是不同的。这一区别很可能是决定李锐和焦循对两种方法进行取舍的最重要的原因。下文中,我们还会看到,这也是李锐和汪莱争论的焦点之所在。下面,我们分别以借根方法和天元术来开 103 355 177 121 的四次方,通过这个例子,让我们对借根方的开方法和增乘开方法有一个更清楚的了解。

借根方的方法如下:

5

$\frac{1033000000\ 00}{500^4} \approx 1$　　103355177121　　$\frac{40855177121}{4 \times 500^3} \approx 80$

−)625

040855177121　　$580^4 > 103355177121$

5　　5　6

---

① 罗士琳. 汪莱. 续畴人传. 卷 50. 24b—25a.

② 钱宝琮. 汪莱《衡斋算学》评述. 9. 252.

③ 梅瑴成. 赤水遗珍.

④ 李冶. 测圆海镜. 四库全书本.

103355177121	103355177121	$\frac{5010217121}{4\times560^3}\approx7$
	−) 9834496	
$570^4>103355177121$	005010217121	$567^4=103355177121$

· 5 6 7

103355177121

−)103355177121

000000000000

天元术中的增乘开方法的步骤如下：

		5	5	5
103355177121	$\frac{1033}{5^4}\approx1$	103355177121	40855177121	40855177121
		−)625		
		125	500(=125+75×5)	500
		25	75(=25+10×5)	150(=75+15×5)
		5	10(=5+5)	15(=10+5)
1		1	1	1

5	5　6	5　6
40855177121	40855177121	5010217121
	3584496(6×597416)	
500	597416(500000+16236×6)	702464(597416+17508×6)
150	16236(1500+206×6)	17508(16236+212×6)
20(15+5)	206	212(206+6)
1	1	1

5　6	5　6	5　6　7
5010217121	5010217121	5010217121
		5010217121(715745303×7)
702464	702464	715745303(702464+1897329×7)
18816(17508+218×6)	18816	1897329(1881600+2247×7)
218	224	2247(2240+7)
1	1	1

从这个具体问题来看，借根方通过一步步估根、试根得出每一步的商，从表

面看来,其运算步骤相对较少,但在每一步都需要进行乘方运算。以这样的方法处理更高次方程的开方需要很大的计算量。在增乘开方法,每一步均只需要加、减及简单的乘法。最为重要的是,增乘开方法的每一步都遵循固定的程式化的步骤,用焦循的话来说,该法是一个"一以贯之的方法",这不仅表现于在以增乘开方法求一个数的根或解一个数值方程的过程中,所有步骤都遵循同样的运算程序,还表现在无论是开方还是求数值方程的解以及无论方程的系数符号或数值如何变化,均可以应用一样的运算模式进行计算。正是这一点,使得增乘开方法明显地较借根方的开方方法更优。乾嘉时期的数学家们大多清楚地看到了增乘开方法的这一优势,19 世纪初,焦循、李锐、罗士琳等都曾分析了两种开方法的不同。

1852 年,通过对天元术和借根方方法的比较,伟烈亚力写道:"西法中有名借根方者,宣城梅氏谓与元人天元术同法,而天元更为精密,于是诸家遂修立天元一而不习借根方矣。"①"相比于天元术,借根方并没有显示出任何优势"。"在方程的开方问题上,前者(天元术)占有明显的优势。借根方中没有使用任意符号,(未知数)的各次方的名称列于其相应的系数旁边,这并不是必须的。因为它们可以象天元术那样通过位值体现出来,它们是横列的,而不是竖写的"②。伟烈亚力这些简短的评论可谓确切地指明了天元术与借根方之间的区别。我们知道,李善兰曾助伟烈亚力研究宋元数学,伟烈亚力对借根方和天元术的评论很可能是受了李善兰的影响。

1822 年,四元术被重新理解。此后,中算家便可以用其解决多至四个未知数的高次方程了。正是在其重新被发现后,罗士琳改变了他对借根方的态度。

此处,我们强调,上文提到的所有数学家都是在详细分析了两种方法之后才认为天元术是一种比借根方更为优越的数学方法。当然,这并不意味着当时中国的数学方法是全面超出欧洲代数方法的。实际上利用符号代数,人们便可以很方便地处理多元高次方程问题。康熙帝未能理解其先进性,符号代数未能在中国得到流传。③在《割圆密率捷法》中,明安图曾试图

---

① 伟烈亚力. 数学启蒙序. 数学启蒙. 1853 年刊本.

② A. Wylie, *Jottings on the Science of the Chinese*, North-China Gerald, 120. 1852.

③ 关于符号代数,见本章第一节。事实上,焦循曾在《加减乘除释》中发展出一套符号运算法。详见吴裕宾.

在一个问题中设立两个未知数。但在他的方程表达式中，只有一个未知数。此后，没有其他的数学家尝试过将借根方发展为多元方程。事实上，如果欲以借根方处理多于一元的高次方程，我们需要全面改进其表述系统和运算系统。换句话说，从数学方法上来看，借根方不能取代四元术，而四元术却可将借根方问题纳入其内。可以说，当时数学家们的选择是有可靠的数学基础的。

当然，18 世纪及 19 世纪初年的数学家们也并不全是倾向于天元术的。与焦循、李锐并称"谈天三友"的汪莱便是借根方算法及其开方方法的坚决拥护者。从现在史料来看，李锐和汪莱还曾因对天元术和借根方的比较发生了激烈的争论。1801 年初，焦循撰成《开方通释》，同年，汪莱途经扬州，焦循示之秦、李之书。汪莱同年为《开方通释》作序。序文中称：

> 算学之书，汗牛充栋，莫不以开方为大法。故九数之中，方田、粟米、商功、勾股四者之精义，反覆相究，统于少广一章。有明算学中衰，三乘之方无能排解。自宣城梅徵君文鼎发明廉率立成之图，三乘以上之形体始如门同掌。果至于带纵之方，有举多少而分正负者，则不外乎同名相加、异名相减二术，而自宋秦道古九韶、元李栾城冶而后至今，罕有能综其条理者。吾友元和李尚之锐、江都焦里堂循，各立天元一术，于古开方法皆有所发明……。里堂既为诸乘方图及《天元一释》，兹复本秦道古《数学九章》为开方通释，以秦氏之旨开古开方之术，可谓无遗矣。获请于邗江之上，为之序而归之。若夫借根益实，后人损之又损之道，莱有成书，不必与此衡高下也。①

显然，汪莱也对古代数学著作做过全面的研究。但我们从他的借根方"不必与此(增乘开方法)衡高下"一语中，可以明显地看出他对借根方法中的开方方法的倾向性。前文已述，增乘开方法确实较借根方中使用的开方法更为优越。以汪莱的数学水平，他不会看不到这一点。实际上，汪莱在他的《衡斋算学》第七册中所用的开方法，本质上与增乘开方法是一致的②。那么，是什么原因使得汪莱在当时坚持认为借根方中的开方法是优于增乘开方法的呢？实际上，汪莱所重视的正是《数理精蕴》中对方程理论方面的介绍。

---

① 汪莱．开方通释序．开方通释．德化李氏刊本．

② 李兆华．衡斋算学校证．陕西科学技术出版社，1998．242．

在古代,中算家解方程或开方时均满足于求出一个正根。对于负根、虚根,甚或一方程有两个或更多解的情况则根本不予讨论。宋代数学家杨辉在其《杨辉算法》中用相连的两个题目分别列方程解出一个长方形的长与宽,而它们实际上正是一个方程的两个正根。而传统算书中的方程多是以实际问题或拟实际问题为基础构造出来的,所以,中算著作中的高次方程均有正根。我们不知道中算家是否有意避免探讨只有负根或虚根的没有实际意义的高次方程,从现存史料来看,中国古代数学文献中确实没有与方程理论研究相关的记载。《数理精蕴》中虽然介绍了一些欧洲的相关内容,但似乎并未引起中算家的重视,包括参与该书编写的梅瑴成、何国宗及明安图等亦未继续探讨相关问题。如此,汪莱在这方面的工作便显出一种横空出世之态。

汪莱大部分的数学工作均载于其《衡斋算学》中,该书共 7 册,是汪莱在 1796—1805 年间陆续撰成的。在 1798 年撰成的第二册中,汪莱讨论了句股形在已知句股相乘积与句弦和的情况下常有两个解,相当于对三次方程

$$y^2\left(\frac{c+a}{2}-y\right)^2=\frac{\left(2\cdot\frac{1}{2}ab\right)}{2(c+a)}$$

根的个数的研究,以此为起点,他进一步指出形如

$$x(p-x)^2=q\,(0<x<p)$$

的方程可有两个正根,并给出这两个正根之间的关系式。

汪莱在《衡斋算学》第五册中系统地讨论了有实根的二次方程和三次方程的分类、正根的个数和求法。汪莱称有一个正根的方程为可知,有多个正根的方程为不可知。书中,他列出二次方程和三次方程 96 例,其中包括 12 个二次方程和 84 个三次方程。经整理后,他得到 20 种类型,其中二次方程 4 类,三次方程 16 类。汪莱详细分析了每种类型的方程的正根个数情况。

在《衡斋算学》第七册中,汪莱给出了高次方程如下的分类法[①]:

- 有实根(有数)
  - 有正根(有)
    - 有一个正根(可知)
    - 有多个正根
  - 无正根(无)
- 无实根(无数)

---

① 李兆华. 中国数学史. 303.

对于不一定有正根的方程，汪莱依三项方程、四项方程以至多项方程分别讨论其正根的判别。其三项方程正根判别式可以表述为：方程 $x^n - px^m + q = 0$，(其中 n,m 为正整数，$n > m$，p,q 为正数)有正根的充要条件为 $q \leqslant \frac{n-m}{n}p(\frac{m}{n}p)^{\frac{m}{n-m}}$。汪莱在原著中没有给出该法的推导过程，但可以证明该判别法是正确的。[①]汪莱的四项方程正根的判别式中有计算错误。[②]

汪莱的方程论研究是受《数理精蕴》的启发并在其基础上完成的，他敏锐地从原书晦涩的简短叙述注意到其重要性，理解其理论意义和论证方法，并进一步深入和完善其研究。从上文我们可以看出，汪莱的研究较《数理精蕴》中介绍的内容更为系统和完备，其成果超出了当时传入的西方数学内容。同时，虽然汪莱在其著作中一直坚持使用借根方的术语和表述方法，但他维护借根方的主要原因却并不是出于对借根方方法本身的表达方法或计算方法的偏爱，他所重视的是随借根方传来的欧洲数学中对方程理论的研究结果。汪莱对借根方的态度实际上也是乾嘉学派数学家们实事求是及注重理论研究的学风的一个具体体现。

汪莱的工作得到了李锐和焦循的充分肯定。1801 年，汪莱将他的《衡斋算学》第五册寄送焦循。次年，焦循与李锐共同研究这部算书。李锐对汪莱的工作给予了充分的肯定，在他为《衡斋算学》第五册写的跋中称“是卷穷幽极微，诚算氏之最也”[③]。他还将汪莱工作归纳成以下三条：

> 其一，凡隅、实异名，正在上，负在下，或负在上正在下，中间正负不相间者可知；其二，凡隅、实异名，中间正负相间，开方时，其与隅异名之从、廉，皆翻而与隅同名者可知；不则不可知；其三，凡隅、实同名者不可知[④]。

其第一例相当于说，系数序列有一次变号的方程只有一个正根，第三例相当于说系数序列有偶数次变号的方程不止有一个正根。这两条与笛卡尔符号法则提出的两条命题极为相似。李锐的含义为，对于首项系数与常数项异号而中间诸项系数符号正负相间的方程来说，如果开出一个正根后得到一个各项系数均与首项同号的降一次方程，则原方程只有一个正根，否则就不

---

① 李兆华．中国数学史．291—304．

② 关于汪莱的方程论工作，详见：李兆华．汪莱方程论研究．195—225．

③ 李锐．《衡斋算学》第五册跋．衡斋算学．嘉树堂刊本．6a．

④ 刘钝．李锐与笛卡儿符号法则．谈天三友．268—269．

是只有一个正根。汪莱针对李锐的第二例给出反例：$x^3-12x^2+100x-800=0$，该方程在开出一个正根10之后，得到方程 $x^2-2x+80=0$，该方程虽然一次项与二次项系数的符号相反，但该方程没有正根，即，原方程只有一个正根。按汪莱的说法，该方程可知，就否定了李锐第二例的最后一句，“不则不可知”。刘钝指出，实际上，同样的错误也存在于李锐第三例和他后来提出的符号法则中。而其原因很可能是因为李锐是以汪莱给出的16例有正根的方程类型为研究基础的，所以，他没有考虑到没有正根的方程的情况。① 从上述三例的用词及叙述方法显见，李锐是完全利用增乘开方法的术语及运算方法得出了上述结论的。

此后，李锐开始撰著其《开方说》。该书于1814年初具雏形，1817年，李锐病故，其弟子黎应南补成下卷，并刊刻成书。在《开方说》卷上，李锐主要讨论方程正根个数与系数的关系问题。以现代数学语言，李锐的成果相当于下述命题：对于一个一元高次方程，如其系数序列出现一次变号，则该方程有一个正根；如有两次变号，则有两个正根；如有三次变号，则有三个或一个正根；出现四次变号，则四个或两个正根。以此推广，则高次方程正根个数或者与其系数序列变号的次数相同，或者少于该序列变号次数的 $2n$ 个。②除未考虑系数序列变号为偶数次时可能没有正根这个问题以外，李锐的这项成果与笛卡尔符号法则几乎是完全一致的，且其叙述尚较笛卡尔给出的命题更为深刻③。

我们前面曾经提到，至17世纪，欧洲数学家们大多还不认为负数可以作为方程的根。但对于中国数学家来说，正、负数只是符号的差别，所以，在得到方程正根个数之后，李锐很自然地提到了负根：“凡商数为正，今令之为负。凡开方有正商、负商者，以其实、方、廉、隅之正负隔一位易之，如法开之，则所得正商变为负商，负商变为正商。”④这一段文字相当于说，如果一个方程有正解或负解，如果将该方程每隔一位的系数变号，所得的新方程便可以有与原解反号的解。这相当于给出了反根变换法则。李锐的这段论述

---

① 刘钝．李锐与笛卡儿符号法则．谈天三友．268—269。

② 李锐．开方说．白芙堂算学丛书本．

③ 关于李锐《开方说》中的成果与笛卡尔符号法则之间的关系及李锐推演其结论的基本思路，见：刘钝．李锐与笛卡儿符号法则．263—284．关于《开方说》，亦见：朱家生．李锐《开方说》研究．谈天三友．285—210．

④ 李锐．开方说．卷中．1a．

很可能是中国数学史上第一次提到负根的记载。

我们在上文已经提到，汪莱和李锐之间曾围绕着天元术和借根方的比较有过激烈的争论。作为借根方和天元术两种代数方法的代表人物，汪、李之间的争论为我们理解中国数学家对于这两种代数方法的态度是非常重要的。所以，让我们再仔细地看一看这场争论的前因后果。让我们重新退回到李锐和焦循同读秦九韶和李冶数学著作的19世纪初。1800年，李锐与汪莱初识于南京。当时，李锐已完成了《测圆海镜》和《益古演段》的校勘，自然已对天元术有了深刻的了解。汪莱则早在其1798年所著的《衡斋算学》第二册中以借根方法讨论了“勾股形已知勾股相乘积与勾股和常有两解”的问题。所以，在初识之时，二人便已对天元术和借根方的优劣有了旗帜鲜明的立场。包世臣曾称：“歙汪莱孝婴、吴李锐四香……二君皆与予善，予尝招集于秦淮水榭。二君各言中、西得失，龃龉辩论不可合。”①很可能由于其对数学知之不多，包世臣并没有提到汪、李之争的具体内容，他只是笼统地说该争论是关于中、西得失的。据我们分析，汪、李之争的焦点，正是天元术和借根方的优劣比较。包世臣并没有给出汪、李争辩的具体时间，但我们有理由猜测，李、汪很可能在初交之时即已针对天元术和借根方的优劣问题有过争论。此后不久，李锐与焦循在杭州共同研究李冶的《测圆海镜》、《益古演段》及秦九韶的《数书九章》。次年初，焦循完成《开方通释》，李锐在为该书所作的序言中明确称：“笃好立天元术，亟欲彰而明之。”②同年，汪莱由焦处读到秦、李之书。他亦为《开方通释》做序一篇，并针锋相对地称：“若夫借根益实，后人损之又损之道，莱有成书，不必与此衡高下也。”汪莱这段话完全是一种负气的口气，他所指的对借根方“损之又损”的人很可能就是李锐。

焦循为汪莱的《衡斋算学》所做的序言中进一步为我们提供了关于汪莱和李锐的关系的线索：

> “庚申冬，与尚之同客武林节署中，互相证订，喜古人绝学复续于今日。明年，孝婴来扬州，因以语之。壬戌春，予在京师，孝婴自六安寄一书来，甚言秦、李两家之非，而剖析其可知不可知，《衡斋算学》中第五册是也。是秋，予复在浙，尚之寓于孤山，买舟访之，

① 包世臣．费隐与知录序．费隐与知录．1842年刊本．

② 李锐．天元一释序．天元一释．里堂学算记．2a—3a．

以孝婴之书与相参核，尚之深叹为精，复以两日之力作开方三例以明孝婴之书之所以然。于是秦李两家之学至此益明。今年村居教徒，稀入城市，出入于农圃医卜之术。秋八月，有走马来者，叩门甚急，童子惊相告予，视之，则孝婴也。延入塾中，对饮于豆花蛬语间。孝婴谓予曰：或谓尚之诮吾所著书，有之乎？予因出尚之所为《衡斋算学跋》与之。孝婴怡然曰：尚之固不我非也。"①

虽然汪莱称没有必要以借根方中的开方方法去与增乘开方法"衡高下"，但他回去后还是写下了《衡斋算学》第五册，全面阐述和分析《借根方比例》中引入的方程论，以示借根方较天元术的优越性。他很快将这部书稿寄送焦循，也正是要给焦循、李锐这两位对天元术情有独钟而他又很看重的专家能够理解到借根方的长处。从另一个角度来讲，这正是他和李锐间当面争论的一种继续。上述引文中，焦循生动地为我们描述了这样的一个画面：汪莱走马相访，急急叩门，而其目的仅仅是为了知道李锐是不是真的批评了他的著作，也即《衡斋算学》第五册。汪莱的急切态度不仅说明了他对李锐的数学水平的看重，也表明，他希望看到他们间争论的结果。不负所望，李锐完全理解了汪莱著作的数学内涵及其寓意，在对该书"深叹为精"的同时，他应战了。他将汪莱书中的 96 类方程总结成三种基本形式，并以天元术对原法进行阐示。他将这 3 个例子写成《衡斋算学》第五册跋，然后交给焦循，并由他转给汪莱。汪莱一面为李锐理解了他的成果而感到欣慰，同时，继续二人之间的争论，针对李锐给出的 3 例，他找出反例，指出李锐的三种基本形式并不完全，并将李锐为其书所做的跋与其对李锐跋的"论"一起刊入《衡斋算学》第六册。此后，他在《衡斋算学》第七册中继续以借根方方法探讨方程论问题，而李锐则写出《开方说》，以天元术和增乘开方法发展出一种立基于中国传统算法和术语的方程理论。对于汪、李之间的这场无声的论战，具有同样数学水平而又有着强烈倾向性的旁观者焦循悄然论曰：

门人请曰，秦、李之书，李君疏之，汪君难之，不已异乎？予曰：此两君所以是也……盖非深入其室者不能疏，亦非深入其室者不能难。得李君之疏而秦、李之书明，得汪君之难，而秦、李之书益明，古人立言，固乐夫人之深入而难我，不乐人之略观大意而谄附

① 焦循．第五册算书焦记．10a．

我也[①]。

焦循认为秦九韶和李冶的著作，也就是天元术和增乘开方法，经李锐的疏解而明于世，经过汪莱的批评和相难，二书"益明"。焦循将这段话写入《衡斋算学》第六册跋，正表明他自己对汪、李之争及天元术和增乘开方法的态度。

虽然当时两位最出色的数学家之间产生这样不可调和的矛盾是一件令人遗憾的事情，但令我们感到庆幸的是，汪、李之辩留给我们的是19世纪初关于方程论的最出色的两部著作，为当时中国数学史上最具光彩的一页。

在"谈天三友"之后，罗士琳专心著书阐示和推广天元术和四元术。与罗士琳同时期的重要数学家项名达(1789—1850)和汪莱一样也倾向于欧洲数学方法，但他当时正一心专注于幂级数展开式的研究，对此根本未予重视，并称天元术无用。对于项名达来说，借根方也是无用的。他并不像明安图那样用代数方法计算幂级数展开式，而完全采用计算方法进行运算。[②]在这样的背景下，借根方渐渐消亡，而天元术和四元术也保持在其原有的水平上。在此后的二三十年中，中国在代数方面没有更进一步的发展。

第四节　19世纪下半叶西方符号代数学在中国的传播

1859年，伟烈亚力与李善兰共译《代数学》，此为西方符号代数第一次被系统地介绍到我国。在翻译过程中，伟、李两人对借根方中的译名做了部分改动，采用了天元术和四元术中的加、减、元等术语。符号代数可以简便地表达多元非线性方程组，且利用代数恒等变换可以解决多元方程的消元问题。除传统开方法外，新的代数学确实可以包容天元、四元的数学内容。正因为如此，符号代数学很快被中算家所认同。要探讨清末学者对天元术、借根方、代数学的态度，首先要理清他们对这三个概念的划分。清末数学家方恺的《代数学通艺录》中有"天元、借根、代数合解"一节，书中给出代数、天元、借根方三种方法演算同一个算题的实例：

第一题，买物三十件，共用钱一千二百文，问每件价若干。

代数　天＝每件价　三十天＝一二〇〇　天＝一二〇〇/

---

① 焦循，《第五册算书焦记》，《衡斋算学》，第六册，夏燮鄱阳县署刊本，10b.

② 项名达．象数一原．

三〇天＝四〇

立天元草曰：立天元一为物价，(与代数第一层同)以共价三十乘之，得 太 ≡〇 为共价，寄左(与代数第二层左项三〇天同)，乃以一千二百文为同数(与代数二层等式相同)，相消得 一‖〇〇 ≡〇 为除式，(与代数第三层理同)。上实下法得四十(与代数第四层同)。合问。

(代数、借根第二题)

鸡兔同笼，但知共头三十六，足一百，问鸡兔各若干。

代数　天＝兔　三十六－天＝鸡

四天＋七十－二天＝一〇〇

二天＝二八

天＝一四

三六－一四＝二二＝鸡

借根 借一根为兔数

兔一根　　　　兔足四根

鸡三六－一根　　鸡足七二－二根

七二＋二根＝一〇〇

二根＝二八

一根＝一四①

从上述引文可以看出，对于清末数学家来说，设天元为某未知数，整理出一个方程式进行运算的方法属代数学内容，而非天元术。天元术的方程式中含筹算表达式并采用传统增乘开方法。

李善兰自称，《测圆海镜》是对其影响最大的一部数学著作，他在同文馆活字本《测圆海镜》序中写道：“善兰少习九章，以为浅近无味，及得读此书，然后知算学之精深，遂好之至今。后译西国代数、微分、积分诸书，信笔直书，了无疑义者，此书之力焉。”可见李善兰非常推重天元术，正是有了天元术的基础，他才能够很快地理解《代数学》和《代微积拾级》等著作中的西方

① 方恺．代数学通艺录．卷15．5b—10b．

代数学及微积分内容，可以在翻译时“信笔直书”。上文已述，李善兰在其《四元解》中曾试图对四元术的筹算表示法进行改进，试图解决上述原始四元表示法最多只能表达含四个未知数的限制及部分交叉项无法确切表达等问题。但他的努力并不甚成功，由此，他也更深切地了解符号代数相对于四元术的优越性。

1867年，李善兰奉诏入京师同文馆任天算馆教习。李氏称：“今来同文馆，即以此书(《测圆海镜》)课诸生，令以代数法演之，则合中西为一法矣。”[①]从《同文馆算学课艺》分析，《四元解》也是同文馆教学参考书之一。李氏将其推重的天元、四元纳入教学内容本来完全正常，但李氏文中值得玩味的是“令(学生)以代数法演之”一语。

1880年，同文馆副教习贵荣、席淦编辑出版了同文馆《算学课艺》。该书四卷，共计189题。收录了席淦、贵荣、汪凤藻、蔡锡勇等56位早期同文馆学生的课艺。该书卷三中的40题均为《测圆海镜》类问题。下面我们引用一题来说明同文馆学生对此类问题的演算方法。此卷第7题为“有大弦有专句，求圆径。”原书中选用王镇贤课艺：

$$\text{半径}=\text{天}\quad \text{大弦}=\text{甲}\quad \text{专句}=\text{乙}$$

$$\text{大句}=\frac{(\text{天}+\text{乙})(\text{二天}+\text{二甲})}{\text{甲}}$$

$$\frac{\text{甲乙}}{\text{甲}+\text{乙}}=\frac{(\text{天}+\text{乙})(\text{二天}+\text{二甲})}{\text{甲}}-\text{二天}$$

$$\text{二天}^{\text{三}}+\text{四乙天}^{\text{二}}+\text{二甲乙天}+\text{二乙}^{\text{二}}\text{天}+\text{二甲乙}^{\text{二}}=\text{甲乙}$$

$$\text{二甲乙}^{\text{二}}-\text{甲乙}$$

$$\text{二甲乙}+\text{二乙}^{\text{二}}$$

$$\text{四乙}$$

$$\text{二}$$

此题完全以符号入算，求出一般解，运算全部过程均为代数式表示法。参照方恺上文给出的天元、代数和借根方的例子可以看出，该题全部运算过程都是代数方法。但值得注意的是，王镇贤将最后所得方程改为竖式，通过这一点可以看出，他是采用传统增乘开方法解最后的数值方程的。

同文馆《算学课艺》卷四为勾股问题及各类应用杂题。此卷第13题以

① 李善兰．测圆海镜序．

后涉及多元高次方程组。书中沿用了四元术的一些术语，如以天、地、人、物代表设未知数，但除王文秀于第28题完全采用筹算表示法，并以李善兰于《四元解》中所介绍的方法消元外，其他课艺均利用代数式及代数恒等变换消元，并在最后总结出一个竖式方程式。该卷内容应是学生学过《四元解》之后所做，但由于学生在此以前已学过《代数学》或其他代数课本，所以其解题方法未拘泥于古法，李善兰在此问题上亦未要求学生应用他所创之筹算表示法及四元消元法。从《算学课艺》对学生课做的选择情况来看，李善兰对学生以代数法解四元类型题目是持鼓励态度的。由此可见，《测圆海镜》和《四元解》等书虽然列入同文馆的教学内容，但其作用却只是相当于代数学习题集而已。

实际上，李善兰的这种以代数学演绎中国传统数学著作的方法在当时非常普遍。1886年，卢靖任天津武备学堂算学总教习，他于"功课之暇，举九章几何之题，命（学生）以代数式演之。三阅月成《几何代数衍》6卷，《九章代数草》10卷"。《九章代数草》全书仍按《九章算术》分类编序，以代数方法重新演算《九章算术》、《九数通考》、《算法统宗》中算题[①]。1901年，刘彝程撰著了一部《简易庵九章实义》。该书分比例，面、体积，方程，勾股四卷，每卷又分上下两部分。上部分讲解该卷主要数学内容及运算方法，下部分以上部所讲算法演算《九章算术》或《测圆海镜》中原题[②]。此外，张东烈《代数盈朒细草》、黄伯瑛《代数九章细草》、《时务斋课稿丛钞》中的《借根演元》（邢廷荚）、《借根句股细草》（王章）、《四元演代》（恩特亨，邢廷荚，王世德）等均属此类著作。

清代末年，符号代数方法较天元术和四元术更优已成为数学界的共识。华蘅芳在《学算笔谈》中称："言算者皆知西法之代数即是中法之四元，而其浅深难易则不可同日而语矣。"[③]在当时的数学著作中，以筹算式表达的天元运算方法已很难得见。

然而传统的天元术也并未被李善兰、华蘅芳等数学家所完全摈弃。华蘅芳《学算笔谈》认为数学学习应该循序渐进，不能躐等而进。华氏给出的最佳学习过程为：几何—天元—代数—微积。他们重视天元术学习并非仅

---

① 卢靖．九章代数草．抄本．藏天津师范大学数学系图书馆．

② 刘彝程．九章实义序．九章实义．1901年刘氏简易庵石印本．

③ 华蘅芳．论加减乘除开方之用．学算笔谈．卷5．3b—4a．

是由于明天元为习代数之根基，其另一个重要原因是“不习天元则于正负开方之理不能尽明，虽从代数得其相等之式，亦不易求其同数”[①]。亦即，不学习天元术便无法理解正负开方法，也即求高次方程数值解的方法及原理，即使利用代数方法得到最后的一元高次方程式，人们也很难求得方程的最后解。由此可以看出，华蘅芳在利用代数术求出所求未知数之方程或方程组，并通过代数恒等变换得到一个一元高次方程之后，是要利用增乘开方法开方的。用同一方法处理此一问题的不仅为华氏一人。同文馆《算学课艺》所选课艺在解得一个一元高次方程后均写成竖式，其中所选贵荣的两篇课艺还将方程的最高项系数写成筹算式，这表明李善兰在教学中也是采用了华蘅芳同样的方法。[②]1901 年，支宝枏(1854—1912)在其《上虞算学堂课艺》凡例中称：“开带纵方，用代数变化可降四次为二次式，降六次为三次与二次式，至为简捷。然遇不能化者，不如用天元定商得数较易。盖开方阐理，天元不及代数之精，超步约商，代数不若天元之便。”[③]支宝枬给出的方法相当于，首先利用代数方法求得一元方程式，然后，继续利用代数恒等式变换以求得低次的更为简单的一元高次方程。但如遇到无法简化的方程，则最方便的方法还是利用天元术，也即增乘开方法直接开方求解，支宝枬在求得一元方程式后继续利用代数恒等式变换以求得更为简单的一元高次方程，较华、李两人又前进一了步。1905 年，张煜在其《读玉鉴随笔》中给出《四元玉鉴》卷中第 18 题的代数方法演草，但在全书最后称：“借用天元术开之，得五步。为小矢。”[④]由此可见，直至 1905 年，大部分数学家还是以增乘开方法解一元高次方程的。

事实上，三元以上的高次方程没有公式解，利用代数变换解高次方程非常复杂，没有通法并需要一定的技巧。1852 年，伟烈亚力在《数学启蒙》中介绍霍纳开方法时称：“开诸乘方又捷法，无论若干乘方，且无论带纵不带纵，俱以一法通之，故曰捷法。此法在中土为古法，在西土为新法。”[⑤]中国清末数学家大多在接触西方数学以前对于天元术有过较深研究，其数值开方法为他们久已熟悉的运算方法。霍纳法即与增乘开方法的本质一致，他

---

① 华蘅芳．论学算之法．学算笔谈．卷 5．20a．

② 席淦，贵荣．同文馆算学课艺．1896．上海著易堂石印本．

③ 支宝枬．上虞算学堂课艺·凡例．上虞算学堂课艺．1901 年刊本．

④ 张煜．读玉鉴随笔．北京：京都琉璃厂龙云斋刻本，1905．14b—16a．

⑤ 伟烈亚力．数学启蒙序．数学启蒙．1853．

们自然没有理由一定要抛弃传统方法而转向一个与其本质一致的西方方法。所以他们在教学及研究中继续传授及使用增乘开方法是非常正常的。然而,随着数学研究的深化,代数学日益得到肯定。1907 年,画锦学堂数学教师董次容称:"天元为中国最精之法,西术代数与中术殊途同归,较之更加详备,故各国共宗之。"①清末及民国初期数学教师董化时叙述其早年学算经历时称:"梅郡屠老师(屠仁守)教授代数,遂专心学代数术,屠师尝指示天元之法,余终以天元不及代数,惟开方一术差强人意,尚不关心焉。"冯澂曾撰短文"学天元宜从借根方起说",文中称:

> 天元一术,文义径省,但云立天元一云尔,如积求之云尔,而文义已足。其间借假象真不用而用,以之通非数而数之成,初学猝通良非易易。故欲习天元宜从借根方而起者,职是故耳。虽借根必求等数犹天元必求同数,天元之布算分列上下,即借根之布算分列左右。但天元得同数后即用左右相消并入为正负,不若借根得等数后复用两边加减使归于简约。且天元实方廉隅稠叠之位皆赖借根方之几真数几根几平方几乘方而益著……天元、借根所恃以立术者,以其有相当式也。相当者谓式中虚实各数虽相杂糅,而以原数考之,必相当而适足,然后用法相消……天元如是,借根亦如是。即代数、微积、对数亦莫不如是。不过天元须辗转相求,其布列之法乃在上下左右分乘方数,其式虽简而理甚委曲,不若借根之直截。故不先习借根而迳学天元恐入者未深辄迷眩矣。此罗茗香所以演《比例汇通》也。自澂论之,今之学者九章既明,不若迳习代数,代数之立法无论已知数、未知数皆以字代,较天元、四元之列位记真数以演式颇省。其相消之理与天元、四元同,所谓如积相消、齐同相消者,殊途而同归。且诸自乘方之指数开诸乘方之根数惟代数有之,至其布式则以乘方指数别之,复加诸号以显之。式虽繁而理甚明晰,易于推求。②

在冯澂及其同辈的数学家来看,不仅天元的表述方法远逊于符号代数,连增乘开方法也可以弃之不用了。

1911 年,学部将陈棠所做《四元消法易简草》纳入高等学堂参考书。其

---

① 董次容. 代数演题叙. 代数演题.

② 冯澂. 学天元宜从借根方起说. 数学胜录. 强自立集. 2b—6b.

奏折中称，代数法兴，"四元之术自罗士琳、李善兰诸人而后专家日鲜，渐成绝学"。而其推重《四元消法易简草》之目的则在于维护古学，以"阐代数之精神，存四元之面目"。[①]然而，皮且不存，毛焉焉附？四元术并未由此得到复兴。民国以后，天元术、四元术反而得到一些人的提倡。在清末认为没有必要学习天元术的董华时于1922年著《元代汇通》，书中指出，通过研究《四元玉鉴》，他发现中国传统消元法亦有强于西方代数方法之处，但"至代数法行，天元几废"，他认为，"天元之理想立法较代数为高，其所以不能盛行者，代数经外人研究，又经中国人研究，学术以研究而精进，而天元中国人先不研究其学，几乎不存，是直吾国人所宜共耻也"。[②]中国传统数学经过数千年发展，在算法方面确乎有着很多出色的成就。就四元消法来说，传统的消元方法亦有它的可取之处，所以，董氏的想法未必全无道理。但董氏声称：其倡导天元术"非仅个人争，一校争，一国争，直为西欧东亚之争也。"这种强烈的民族意识在当时则是"曲高和寡"。他所创的元代汇通法也并没有得到响应。

综上所述，康熙时期，传入的借根方被中算家所认同，在天元术重新被解读之后，乾嘉时期数学家围绕天元术与借根方的优劣比较问题产生分歧，而天元术渐占上风，并得到了广泛的流传。到清代末年，大部分数学家都能够清醒地意识到符号代数的先进性，代数学从此取代了天元术。从而在代数学这一重要数学领域中，中国数学完成了西化历程。从清代数学家对借根、天元、代数的态度的转变可以看出，数学家虽然不免会受到社会思潮的影响，其论述中还不时杂有民族情绪，但从总体上说，他们的取舍还是以数学内容的优劣与否作为主要基础的。可以说，虽然中西之争贯穿了中国传统数学西化进程的始终，但随着西方数学的输入，中算家在研究和学习的过程中逐渐认识到了西方数学的优越性，他们中的绝大多数对于中西数学的态度是客观的。此外，中算家对借根、天元、代数的态度的演化也可以清晰地看出中国传统数学西化进程的一个侧面。

---

① 学部．将《四元玉鉴易简草》纳入高等学等参考书摺．

② 董化时．元代汇通序．1922年石印本．

第六章　西方数学知识在中国的传播——中国数学家对三角函数概念及公式的研究

在17世纪传入的西方数学知识中，以三角学最受中算家的重视。据李俨先生统计，自17世纪30年代三角学被引入中国至19世纪末，中国共出版了102部三角学著作，其中关于平面三角学的有39部，球面三角学37部，三角函数表26种。[①]此外，尚有多部与三角函数计算相关的幂级数展开式的著作。中国传统数学通常以勾股术和代数方法解决西方三角学处理的问题，所以，对于明、清数学家来说，三角学可以说是一个新的数学分支。正是基于上述两点，三角学在中国传播的过程便成为中国数学西化历程的研究中无法回避的问题。然而，泛言的三角学在中国的传播史是一个太大的课题，不是本章篇幅所能容纳得了的。所以，本章中，我们将主要关注平面三角学中的三角函数概念及一些相关公式和三角函数幂级数展开式在明末至清末的流传和研究情况。

第一节　明末清初传入的三角函数知识

早在公元6世纪，印度的一些天文学和数学书籍便随着佛经一起传入中国，其中的数学内容包括印度弧度度量法及球面三角法等。《开元占经》(718)中还有了一个正弦表。但这些数学内容并没有引起中国数学家和天文学家的重视，亦未对后来的数学发展产生显著的影响。[②]

《几何原本》中虽然含有大量与三角形相关的理论和命题，但欧几里得

① 李俨．三角术和三角函数表的东来．

② 钱宝琮主编．中国数学史．108—116．

并不关心三角形的度量及边角互算问题,所以,书中不含与三角函数相关的内容。即便如此,三角形的引入已导致了中算家关于三角学与勾股术的关系的长期讨论。① 17 世纪,应徐光启的推荐,传教士开始参与历法改革工作,在这样的背景下,作为 16、17 世纪欧洲天文学的基本计算方法,平面和球面三角学内容被耶稣会士们引入。《崇祯历书》中介绍三角学的著作主要有邓玉函的《大测》(1631)、《割圆八线表》(1631)和罗雅谷的《测量全义》(1631)。

邓玉函所著的《大测》(1631)为最早介绍三角函数的中文专著。据邓玉函称,"大测者,测三角形法也",为"测天者所必须,大于他测,故名大测"。②此语清楚地概括了他介绍西方三角学的原因,概缘三角学为制订天文历法所必须也。三角学知识正是以作为历法计算的数学基本方法被传入中国,亦由此引起明末清初中算家的关注的,对此,梅文鼎曾概括曰:"不明三角则历书佳处必不能知,其缺误亦不能正矣。"③早期研究三角学的中国数学家均亦在天文历法方面有着出色的成就。邓玉函之所以要在《大测》中引入三角函数,是因为"平面三角形,其可以直线测者,三边耳。欲测其角,非弧不得。而弧为圆线,无数可测,故测弧者必求其与弧相当之直线。与弧相当之直线者,割圆界而求其直线之分与弧分相当者是也"④。即,为了求得三角形的角度,我们必须利用圆弧。而圆弧无法直接测量,所以,我们只能利用与其相当的直线来考察其度数。这正是三角函数的意义,也即是邓玉函在《大测》中介绍三角函数的原因。《大测》,凡二卷。第一卷分为"因明篇"、"割圆篇"和"表原篇"三部分。第二卷由"表法篇"、"表用篇"和"测平篇"构成。"因明篇"讲解平面三角形和球面三角形的一般性质。在"割圆篇"中,邓玉函引入了三角函数,并介绍了三角函数表及其性质。"表原篇"给出"六宗",即求圆内接正六边形、正四边形、正三边形、正十边形、正五边形、正十五边形的边长的过程,这六个数值相当于求 30°、45°、60°、18°、36°、12°的正弦值。"表法篇"引入"三要法"和"二简法"及其证明,所谓"三要法",相当于公式

---

① 关于中算家对三角学和勾股术的关系的讨论,详见第一章与第二章的相关内容。

② 邓玉函. 大测序. 大测. 新法算书. 四库全书本. 2a—4a.

③ 梅文鼎. 三角法举要. 勿庵历算书记. 四库全书本. 46b.

④ 邓玉函. 大测. 卷 1. 新法算书. 四库全书本. 12b.

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1, \sin 2A = 2\sin A\cos A, \sin\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\sin^2 A + (1 - \cos A)^2}$$①

邓玉函称:“有前六宗率为资,有后三要法为具,即可作大测全表②。”也就是说,利用由“六宗”,即上述六个基本三角函数值及三个三角函数公式,便可造出三角函数表。《大测》中的“二简法”相当于公式

$$\sin A = \mathrm{sing}(60° + A) - \sin(60° - A), \sin(A \pm B) = \sin A\cos B \pm \cos A\sin B$$

利用这两个公式,可以更方便地计算一些利用“三要法”很难计算的正弦的数值。《大测》的“表用篇”讲解如何利用三角函数表。“测平篇”给出测平面三角形的“四根法”,其前三法分别相当于正弦定理、余弦定理和正切定理:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A, \tan\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\tan\frac{A+B}{2}$$③

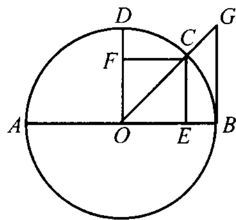
值得注意的是,与我们现在的三角函数概念不同,《大测》中介绍的三角函数都是线段。在《大测》中,邓玉函为三角函数给出如下的定义:

> 割圆之直线有四,一曰弦,一名通弦,二曰半径,皆在圆界内,三曰切线,在圆界外,四曰割线,在圆界之内外④。

即,可以用于计算弧度的相关直线有四种:弦、半径、切线、割线。

> 正半弦从一点作两半弦,第一为前半弦,第二为从半弦,又为余弧弦,又为较弦,又为差弦。

我们知道,垂直于弦的直径必将弦两平分⑤。邓玉函把所得两半段弦定义为“半弦”。如图中,*CE*、*CF* 均是半弦。对于弧 *CB* 来说,*CE* 是前半弦,也即正半弦,即正弦;*CF* 为从半弦,亦称余弧弦、较弦、差弦,也就是我们现代所说的余弦。这便是邓玉函给出的原始的“正弦”和“余弦”的定义。



邓玉函给出的矢线、切线和割线的定义如下:

> 倒弦者,余弦与全数之较,本名为矢。
>
> 切线者,弧之外有线为径一端之垂线,半径为底线而交于截弧

---

① 本章中,如不加注明,三角函数公式中的 a, b, c 分别代表三角形的三边,而 A、B、C 则是三边所对的三角形的三个内角。

② 邓玉函. 大测. 卷2. 新法算书. 四库全书本. 6b.

③ 邓玉函. 大测. 新法算书. 四库全书本.

④ 邓玉函. 大测. 新法算书. 卷9. 四库全书本. 12b.

⑤《几何原本》卷三中已经介绍了弦、切线、割线等概念及其性质。见:利玛窦. 几何原本. 卷三.

之弦线。

割线者，从心过弧之一端而交于切线。

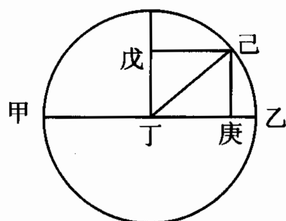
所谓倒弦即矢线。其几何意义为：*CE* 正弦分直径 *AB* 为两部分。其中 *OE* 为余弦，*EB* 为倒弦，也就是正矢。切线即从 *AB* 直径的顶点 *B* 作圆的切线，延长半径 *OC* 与该直线相交于 *G*，则 *BG* 为与 *CB* 弧相当的切线。而割线则是线段 *OG*。此外，与 *AC* 弧相当的矢线 *AE* 称为大矢，即余矢，加上余割、余切便构成八种三角函数。清代数学著作经常以“割圆八线”称三角函数，便是这个道理。

邓玉函对《大测》中的公式大多给出了证明。举例来说，对于同角正弦函数与余弦函数的关系，邓玉函的叙述为：

前、后两半弦，其和等于半径。

综合前面介绍的内容，我们知道，所谓的前、后两半弦，即正弦和余弦。“其和等于半径”的意思便是其平方和等于半径的平方。对于这个定理，邓玉函解释曰：

如(右)图，庚己为前弦，当乙己弧，己戊弧为后弦，当己丙弧余弧。戊己弦等于丁庚(《几何原本》一卷三十四)，则丁己半径上方与庚己、己戊上两方并等。故云两半弦之和，等于半径。



论曰：两半弦互为垂线，则己庚丁为直角。而对直角之弦己丁上方与句、股上两方并等。(《几何原本》一卷四十七)[①]

如果照字面翻译，邓玉函的公式相当于 $\sin^2 A + \cos^2 A = r^2$，考虑到《大测》中三角函数均是线段，这里所谓的正弦实际上相当于现代的 $r\sin A$，余弦也相当于 $r\cos A$，所以，上文相当于公式 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ 的严格几何证明。对于我们上文中所提到的其他公式，邓玉函也以同样的方法给出了证明。惟一例外的是，邓玉函没有给出二简法中的第二法，即相当于正弦函数两角和、差公式的证明。对于这个公式，他只对 20°和 15°两个特殊角度，以三角函数表中的相应数值进行了验算。鉴于邓玉函给出了除该公式外所有其他公式的证明，我们有理由认为，他并没有得到证明这个公式的方法。

---

① 邓玉函．大测．卷 1，．新法算书．四库全书本．14a—b．

在他之后，中国数学家和天文学家王锡阐在《圜解》中给出了这个公式的证明，我们将在下文中介绍王锡阐的证明方法。

白尚恕认为，《大测》的部分内容取材自欧几里得的《几何原本》[①]，其他内容则是据毕的斯克斯（B. Pitiscus，1561－1613）《三角学》（*trigonometriæ*，1599）和斯台汶（S. Stevin，1548—1620）的《数学记录》（*Memories Mathematiques*，1608）编译的[②]。

邓玉函还著有一部《割圆八线表》，是一个有度有分的五位小数三角函数表[③]，其中包括正弦、正切线、正割线、余弦、余切线、余割线六线，另外二线正矢与余矢可由余弦与正弦推得[④]。严敦杰认为，该表很可能取材于韦达（F. Viéta，1540—1603）的三角函数表[⑤]。

同于1631年，罗雅谷著《测量全义》10卷。罗雅谷对该书主旨做了如下说明："夫历法之原有二，其一则象纬之原也，天事也，其一则推测之原也，人事也……此书所论则推测之原也。古今言推测者又有二，其可以形察者，可以度审者，谓之𠃌术，不可以形察，不可以度审者，谓之缀术。此所论者，又缀术也。缀术之用，又有二，其一总物以为度，论其几何大，曰量法。其一截物以为数，论其几何众，曰算法。历象之家，兼用二法，如鸟之傅两翼也。则无所不可之矣。"[⑥]也就是说，该书是为制订历法提供推算的基本原理而作的，其内容兼具形、算，也即几何方法和计算方法兼顾。该书的主要内容为平面三角、球面三角、平面几何、立体几何以及圆锥曲线的基础知识。《测量全义》卷一专论三角形。但与《几何原本》中注重边角关系及抽象性的三角形的性质和三角形之间相互关系的探讨方式不同，为了提供制订天文历法的"推测之源"而撰写的《测量全义》需要提供具体的解三角形的方法。为此，书中一开始便引入了三角函数的概念。《测量全义》中介绍的三角函数概念与《大测》中所述基本相同。在该卷第8题，罗雅谷将以圆弧为基础定

---

① 关于《大测》中取材于《几何原本》的部分，参见：严敦杰．明清之际西方传入我国的历算记录．明清数学史论文集．115—116．

② 白尚恕．介绍我国第一部三角学——《大测》．

③ 邓玉函的《割圜八线表》中的数值没有小数位，他取单位圆的半径10万，八线的数值分别为按照其定义所求得的相应数据的整数部分。《数理精蕴》及其他清末以前的三角函数表均是以单位圆半径的选取来确定表中有效数字的位数的。

④ 邓玉函．割圜八线表．四库全书本．

⑤ 严敦杰．明清之际西方传入我国之历算记录．明清数学史论文集．125．

⑥ 罗雅谷．测量全义序．新法算书．卷87．四库全书本．1b—2b．

义的三角函数引入直角三角形:"三边直角形,锐角为心,底为界,作象限圈,半径为全数,在心角对边为其弧之正弦,其旁为正弧之余,余弧之正"①。即,在直角三角形中,以一个锐角作为圆心,以斜边为半径作四分之一圆,则该角对边即为(以斜边为半径)其正弦,该角的邻边即其余角的正弦,也就是其余弦。根据这个命题,罗雅谷给出了正弦定理的证明及利用三角函数解三角形的方法。同时,在解三角形的过程中,罗雅谷又给出了正切定理、余切定理及其他三角函数公式。《测量全义》中的三角函数公式多在《大测》中已被引入。其中的新内容为卷一第11题中给出的积化和差公式:

$$\sin A\sin B = \frac{1}{2}[(\cos(A - B) - \cos(A + B)]$$

《测量全义》卷七中又给出同角三角函数间的关系式:

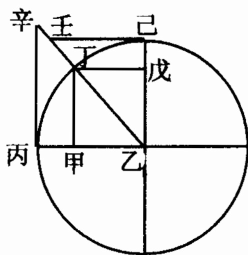
$$\sin A\csc A = 1, \cos A\sec A = 1, \tan A\operatorname{ctg} A = 1, \operatorname{ctg} A = \frac{\cos A}{\sin A}$$②

书中也给出了这些公式的简单证明。如关于公式 $\operatorname{ctg} A = \frac{\cos A}{\sin A}$,书中给出的表达方式和证明为:"正弦与余弦若全数与余切线。余弦与正弦若全数与正切数③。"即,

正弦:余弦 = 1(半径 r):余切;余弦:正弦 = 1(半径 r):正切。

其证明为:

> 如(右)图,甲丁与丁戊(即甲乙故)若乙己与己壬,戊丁(即甲乙故)与甲丁若乙丙与丙辛④。



其证明的叙述虽不够清晰,但我们可以清楚地看到罗雅谷是以相似直角三角形对应边成比例为上述定理给出了欧几里得几何式证明。

除上述平面三角函数公式外,书中还引入了球面三角学中解直角三角形的10个基本公式和球面正弦定理,边、角余弦定

① 罗雅谷. 测量全义. 卷1. 新法算书. 卷87. 18b.

② 关于《测量全义》中所含的有关三角函数的具体内容,参见:钱宝琮主编. 中国数学史. 242—244.

③ 罗雅谷. 测量全义. 卷1. 新法算书. 卷93. 4b.

④ 罗雅谷. 测量全义. 卷1. 新法算书. 卷93. 4b.

理等内容①。白尚恕认为,《测量全义》中介绍三角函数的主要内容来自玛金尼(G. A. Magini, 1555—1617)的《平面三角测量》(*De Planis triangulis*, 1640)和《球面三角》(*Et Trigonometricæ Sphæriconum*, 1609)②。

明代末年传入的三角函数知识都是依附于天文学知识引入的。这样,传入的知识不完整亦不系统。对于当时的中国学者来说,三角学可以说是一个新的领域。中国传统数学的勾股术与欧洲平面三角学在很多方面可以互通。《崇祯历书》在处理一般三角形问题时,也大多将其分为两个直角三角形,再利用直角三角形的公式来进行计算,与中国传统数学中相关问题的处理方法一致。三角函数的概念虽然是中国传统数学中所没有的,但三角公式的证明通常要借助于直角三角形的性质,这也可以使得中算家从中发现他们所熟悉的方法和内容。

清代初年,薛凤祚与穆尼阁在《天学会通》中更为系统地介绍了三角学知识。薛凤祚非常重视三角函数在天文计算方面的应用。他称:"西法之有八线,以中土之开方廉隅等法而加详焉,理之深奥,数之详明,无可复议。"③薛凤祚在《天学会通·正弦部》序称:"天文各线,皆圈线也,而各种取用之线,以方代圆,所差甚微。作法者殆疑神授,非人力也。线虽为八,而割、切等法实皆秉之正弦,今旧法割圆表久镌行世,而独于取正弦之法阙略不全。学者求其法而不得,将并所用之法而不敢信。非作者与传者之过欤?"④薛凤祚认为,在八种三角函数中,正弦最为重要。但《崇祯历书》没有引入正弦的具体求法。薛凤祚专门在这一部分介绍他求正弦的方法。该法为:

算正弦:

取正弦,有正角,有正角对边之方。正角对边之方与两边之方相等。若知两边即知其三,可得割圜正弦。

如图:正角对斜边之方为大方,其二小方与大方同大,大方内减小方,即次方,次方内加小方,即大方。

又取其余之正弦。

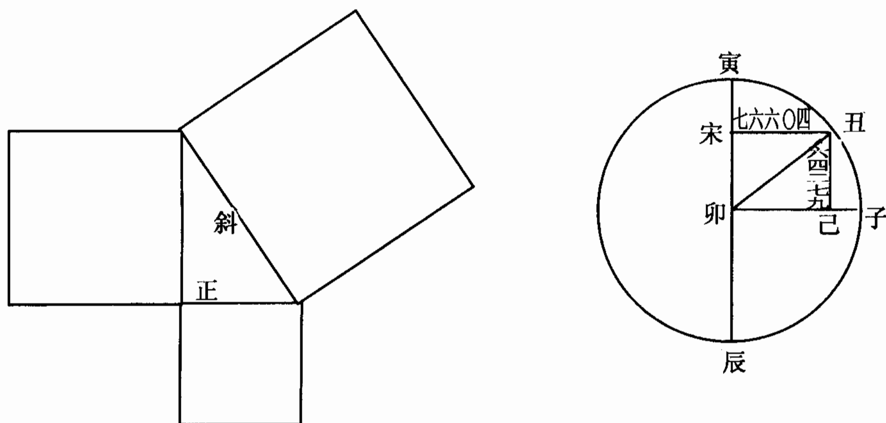
---

① 关于《崇祯历书》中所含的有关三角学的内容,详见:钱宝琮主编. 中国数学史. 241—244.

② 白尚恕.《测量全义》的底本问题初探.

③ 薛凤祚. 西法会通参订十一则. 历学会通. 正集. 10b.

④ 薛凤祚. 历学会通·正弦序. 历学会通. 益都薛氏遗书本.



如图(本页上右图):

> 设四十度圈线子丑,其余五十度圈线丑寅,四十度正弦己丑,即卯未,五十度正弦丑未,即己卯。又作子卯线为通弦,未为正角,卯未(即己丑)四十度正弦(六四二七九)卯未方自乘数与通弦自乘数子卯方相减,开之即五十度正弦丑未(七六六〇四)。①

在此法中,穆尼阁和薛凤祚完全利用勾股定理求正弦。将求正弦的方法转化为开方法。从表面上来说,该法确实较《大测》中介绍的以割圆术求特殊角三角函数及利用三角函数公式求三角函数的方法更为简单。但此法中并非是已知弧度或角度就可以求三角函数的方法。它需要在知道直角三角形三边之二,即除半径外,还需要知道余弦线的情况下才能求到正弦线的长。故其并非是原始的求正弦法。上文所引的例题正是在已知四十度正弦的情况下求五十度正弦的问题。《三角八线表》部分虽然署名穆尼阁述,薛凤祚注,但薛凤祚在其中的工作却并不仅是做注或翻译那么简单。书中介绍的开方法是薛凤祚随魏文魁学得的②,此法显然出自薛凤祚之手。所以说,《天学会通》中介绍的三角函数算法为一种融合中、西的计算方法。除此之外,薛凤祚还将西方在计算三角函数时所用的六十进位制改为百进位制。

---

① 穆尼阁著. 薛凤祚注. 历学会通. 正集. 卷 1. 3b.

② 详见本书第二章。

薛凤祚认为，

> 中法用十数，西法用六数，其归一耳。但用十为法省易而有畸零不尽之算，用六则度分就整无余而持筹烦难不易。然畸零多系末位不用之数，虽有余分，不关有无，不若仍用十数为便。

即，中法以十进位，西法以六十进位，薛凤祚认为二者应该统一。利用十进制计算更为方便，但圆周为360°，这样，如果将度、分、秒之间改为十进制，便常会出现除不尽的情况。薛凤祚认为不尽之处多为余数，与计算结果的关系不大，所以他决定采用十进制。此为其会通中、西的“十一则”之一。《天学会通》中尚有薛凤祚自撰的《比例四线新表》。该表为正弦、余弦、正切、余切四线的对数表，其中度以下亦分为100分，每分都有对数，取七位有效数字。

薛凤祚和穆尼阁另有《三角算法》一卷。《三角算法》系统地讨论了三角形边角相求的方法，且书中算题多利用对数简化运算。《三角算法》中给出了一系列三角公式，其中新引入的公式主要是三角函数和对数结合的公式，如：

$$\lg b = \lg a + \lg\sin B - \lg\sin A$$

$$\lg\tan\frac{A-B}{2} = \lg\frac{a-b}{2} + \lg\tan\frac{A+B}{2} - \lg\frac{a+b}{2}$$

$$\lg\tan\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\{[\lg(s-b)+\lg(s-c)] - [\lg s + \lg(s-a)]\}$$

等等。此外，穆尼阁还引入了球面正弦和正切的半角公式。

穆尼阁和薛凤祚在书中称：“凡各法皆立有设数，则所算诸法不为空理。”①所以，《三角算法》中每题均以具体数目入算，没有一般性理论讲解，亦不含运算方法的推导及证明。

薛凤祚虽称其著述以会通中、西为目的，但书中主要内容为西方数学内容，其百进制度数进位法并没有被后代学者所继承，其开方方法亦未引起其他数学家的重视。所以，《天学会通》中与三角函数相关的内容中对后世产生影响的还是书中关于三角函数的对数的介绍及对数三角函数公式。

① 穆尼阁，薛凤祚．三角算理．双啸室藏书．抄本．1b.

第二节 《圜解》与《平三角举要》中的三角函数知识

明清之交,中国天文学家和数学家意识到了三角函数公式在天文历法计算方面的重要性,并开始应用这些公式。但他们并不只是简单地引用这些公式,而是对它们进行了检验与证明。王锡阐所撰的《圜解》一书便可表现出中算家在这方面的追求。

王锡阐(1628—1682),字寅旭,号晓庵,江苏吴江人。1645年,清军攻陷吴江。16岁的王锡阐曾多次试图以投河或绝食的方式自杀殉国,但最终在其父母的劝导下放弃了这个想法。他却从此抛开了通过科举进入仕途的打算,拒绝为清统治者服务,成为一名年轻的遗民。他和同时的一些著名的遗民学者顾炎武、潘柽璋、庄廷栊等相友善。王锡阐一生中主要靠教几个对数学和天文学感兴趣的学生来维持其清贫的生活。但由于不需为参加科举考试做准备,王锡阐可以将大部分时间用于他感兴趣的天文学和数学研究。很可能是基于其强烈的反对异族统治的心态,王锡阐也反对清政府完全以西方天文学方法制订历法。他称:徐光启于"译书之初,本言取西历之材质,入大统之型模,不谓尽堕成宪而专用西法如今日者也"。通过对中国传统天文历法著作和西方著作的研究,王锡阐指出:"吾谓西历善矣,然以为测候精详可也,以为深知法意未可也。循其理而求通可也,安其误而不辨不可也。"所以,他要"兼采中、西","参以己意"[①],撰著新法。王锡阐主要工作在天文学方面,其代表作为《晓庵新法》(1663)。[②]该书的历法计算的主要依据是西方三角学及小轮体系[③],其表述方式包括时间、度数的划分、数据的名称及其只用文字、没有图式的写作方式等等,均沿袭了中国古代历法传统[④]。席文称,"《晓庵新法》以传统体例形式介绍了一个完整的以预测交食为中心的历法计算体系和各种相关的算表,利用这些算表,只需作一些初等运算便可完成推历运算"[⑤]。王锡阐在天文学方面融合中、西的研究方式在他的数学著作《圜解》中也有很好的体现。

---

① 王锡阐. 晓庵新法自序. 晓庵新法. 1b—4b.
② 关于王锡阐在天文学方面的工作,参见:席泽宗. 试论王锡阐的天文工作.
③ 胡铁珠. 晓庵新法提要.
④ 江晓原. 王锡阐及其《晓庵新法》;胡铁珠. 晓庵遗书提要.
⑤ 席文. 王锡阐. 王锡阐研究文集. 55.

《圜解》,不分卷,由十一节构成。[①] 书中定义和使用了一些与《几何原本》及《崇祯历书》等其他数学和天文学著作中不同的新名词,举例来说,王锡阐将角定名为折,这样,直角就被称为矩折。由于角为全书中随处可见的基本概念,王锡阐对它的重新命名,使得《圜解》对于已经熟悉另一套术语的读者来说显得晦涩难懂。但在这方面,王锡阐有他自己的想法。对此,梅荣照分析曰:“他用折的概念取代几何学中角的概念与传统数学和天文学不用角的概念有关。”[②]王锡阐并不只是在《圜解》一书中有意选择与译成中文的西方数学著作中的词汇不同的名词术语,在其天文学著作中,他也通常会引述新的词汇。为此,梅文鼎批评王锡阐“好立新名,与历书互异,亦难卒读”。在梅文鼎眼里,这不仅是王锡阐著作的一个缺陷,甚至成为其一个重要特征。梅文鼎曾得到一部未署作者名的天文学著作。该书“其书大体拟《元史》历经,而实用西术。然亦微有差别”。梅氏将之断为王锡阐的著作。其理由为:“所立诸名多与西异,以此知之。”[③]王锡阐的好立新名自然与其试图维护传统天文学和数学方法的意图有关。《圜解》中广泛应用勾股术,也是该意图的表现。在解三角形一节中,王锡阐将各类三角形分解为勾股形。在四边形一节中,通过添加对角线将四边形分解为三角形。这样,所有与四边形、三角形相关的问题都可以化为勾股形去解。王锡阐好引用古名及套用古代天文、数学著作的行文方式后来被戴震继承,并在其《句股割圜记》中被发展到极致。

《圜解》全书是围绕王锡阐欲证明的定理而构建的,其最终证明的结果相当于正弦函数和余弦函数的两角和差公式:

$$\sin(A \pm B) = \sin A\cos B \pm \cos A\sin B$$
$$\cos(A \pm B) = \cos A\cos B \mp \sin A\sin B$$

该公式是《大测》中惟一未给出证明的三角函数公式,从这一点我们可以看出,王锡阐必已熟读《大测》全书。另一位熟读过西方几何学著作的梅文鼎在《圜解》序中称:“《测量全义》,可谓精矣,而先后数相加减代乘除之法,亦

① 王锡阐的《圜解》未被刊刻,流传绝少。20世纪50年代末,严敦杰先生证实李俨所藏的一部抄本《圜解》为王锡阐的著作。此后,梅荣照对该书做了详细和深入的探讨。见:梅荣照. 王锡阐的数学著作——圜解.《中国科学技术典籍通汇·数学卷》中收入了这部抄本。

② 梅荣照. 圜解提要. 圜解. 中国科学技术典籍通汇·数学卷. 四. 303—304.

③ 梅文鼎. 与潘稼堂书. 绩学堂文钞. 卷一. 33b.

但举其用而不详其理。熟复于寅旭此书,可以得其门户。"[①]正说明了该书的意义所在。王锡阐为了证明这两个公式做了大量准备。他对书中提到的每个概念,如圆、直径、半径、象限、正弦、余弦[②]、正矢、余矢、角、直角、锐角、钝角等给出了定义。[③] 此外,为了证明其最终成果,他给出大量预备命题。

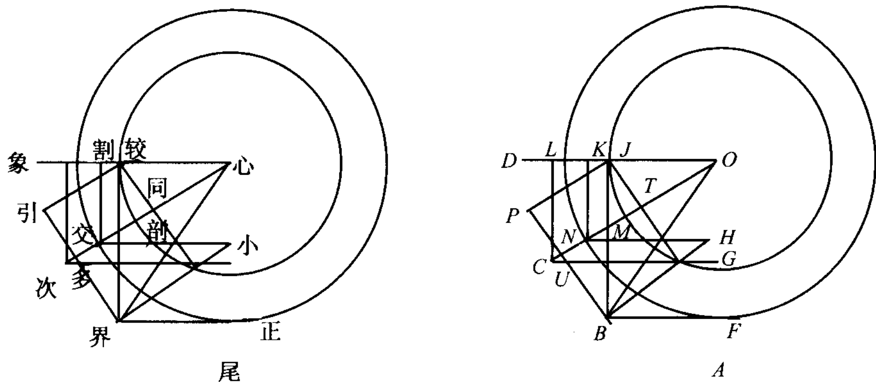
王锡阐首先给出 $\sin A\cos B$ 的几何表示:

$\sin A\cos B = CG\cdot NO = NH$;$\cos A\sin B = MO\cdot BF = MH$

并给出证明,在该证明之后,王锡阐特别注称,以上证明中,两角均为锐角。如两角为两个钝角或一个钝角一个锐角的情况与此相似。此后,他给出两角差的正弦公式:

两弧俱不及象限者,以后数减先数为多弧正弦,以后数加先数为总弧正弦[④]。

及其证明。下文是原文和其现代汉语翻译对照的方式给出王锡阐的证明:



(王锡阐图,引自《圜解》)

于界出直线至次心半径,成矩折,其遇处志之曰多。为多弧(次界)之正弦。引长之,志其秒曰引。又于较出直线与次心半径平行,遇界线于引。成矩折。引较与交

从 B 引直线与半径 OC 垂直,交 OC 于 U。为两角差之弧 CB 之正弦。引申 BU 交圆周于 P。从 J 作半径 OC 的平行线,交圆于 P,成直角。

---

① 梅文鼎. 圜解序. 绩学堂文集. 卷二. 37a-b.

② 《圜解》称余弦为"较弦"或"对弦",角为"折",直角为"矩折",锐角为"尖折",钝角为"斜折"。

③ 《圜解》中没有给出"平行线"的定义。

④ 王锡阐. 两弧损益第十. 圜解. 抄本. 中国科学技术典籍通汇·数学卷. 四. 313.

心即平行，界较与小心平行，	JP 平行于 ON，BJ 平行于 OH，
交心之与界较等	$ON = BJ$
凡勾股形，有两边平行，必为相似之形。	两勾股形，如两组边分别平行，则必为相似勾股形。
有一边相等，即三边互等。	(两相似三角形)，如一组对应边相等，则三组对应边必分别相等。
而引较与交泰等，	$PJ = NK$，
界引与先数交小或泰心等。	$PB = NH = KO(=\sin A\cos B)$
从较出直线与界引平行。遇次心于同。成矩折。	从 J 引直线与 PB 平行，交 OC 于 T，成直角。
得小弧正弦因大弧较弦数，与后数等。	$\cos A\sin B = TJ$
引较与多同平行，多引与同较平行。	$PJ /\!/ UT$，$UP /\!/ TJ$
而引多同较成四矩方形。	则 $PUTJ$ 为矩形
则多引与同较等。	则 $UP = TJ$
与割小后数亦必等。	所以，$UP = MH = \cos A\sin B$
于等先数之界引减等后数之多引，界多易之而于等界引之先数减等多引之后数，所存交割必与多弧正弦等。故曰于先数减后数得多弧正弦也。[①]	$PH = \sin A\cos B$，$UP = \sin A\cos B$ 所存则：$PB - UP = BU = \sin(A-B)$

上述右列几乎是对左列王锡阐原文的逐句翻译，显见，王锡阐的证明与《几何原本》中引入的几何证明方法是完全一致的。由此可以看出，虽然王锡阐引入了一些新的名词和概念，以示其对传统天文学和数学仍情有独钟，但其证明方式和全书体例均明显受到了欧几里得《几何原本》的影响。

梅文鼎曾见过《圜解》的抄本，他认为该书“似是随手写成”[②]，“且颇为抄录者所乱”，所以，他为之“更定，并订补其论之所遗及字句之讹凡十余

① 王锡阐，两弧损益第十．圜解．抄本．中国科学技术典籍通汇·数学卷．四．313

② 梅文鼎．与潘稼堂书．绩学堂文钞．卷一．35b.

处"[1]。梅文鼎自己也是熟悉三角函数运算方法的大家。他早年曾著成《平三角举要》5卷。该书对涉及三角形的几何学性质以及有关三角术的算法做了系统的整理,可被视作中算史上第一部三角学教程。书中关于三角函数方面的内容有:同角三角函数间的关系、三角函数表、互为余角和补角的三角函数间的关系、割圆法,梅文鼎还证明了正弦定理、半角定理、正切定理等[2]。在《平三角举要》序言中,梅文鼎称:

> 西法用三角犹古法之用句股也,但三角有钝角而句股无之,论者遂谓句股之术有所穷。殊不知锐角形须分为两句股,钝角形须补成两句股。边角比例莫非句股也。至于弧三角,以直线测浑圆,其理最奇,又于无句股中寻出句股也。然而句股虽不能备三角之形,而能兼三角之理,三角不能出句股之外而能尽句股之用。一而二,二而一者也。新历之妙全在弧三角,然必先知平三角而后可以论弧三角,犹之必先知句股而后可以论平三角也[3]。

引文中,梅文鼎清晰地表示出,来自欧洲的三角学内容与中国传统勾股术是一致的。不仅平面三角可以被化成勾股形,即便是球面三角问题,也必须利用勾股术才能得到解答。所以,三角学学习的过程便是勾股——平面三角——球面三角。梅文鼎的上述论述很可能受到《大测》序的启发。《大测》序中称:

> 凡测算,皆以此测彼,而此一彼一,不可得测。《九章》算多以三测一,独句股章以二测一,则皆三角形也。其不言句股者,句与股交,必为直角。直角者,正方角也。遇斜角,则句股穷矣。分斜角为两直角,亦句股也。遇或不可得分,又穷矣。三角形之理,非句股可尽,故不名句股也。句股之易测者,直线也,平面也。测天则圜面曲线,非句股所能得也。故有弧矢弦割圜之法,弧者,曲线。弦矢者,直线也。以弧求弧,无法可得。必以直线曲弧相当相准,乃可得之。相当相准者,围径之法也。而围与径,终古无相准之率。古云径一围三,实围以内二径之六弦,非围也。祖冲之密率云,径七围二十二,则其外切线也,非围也。刘徽密率云,径五十围百五十七,则又其内弦也,非围也。或推至万万亿以上,然而小损

---

① 梅文鼎. 圜解序. 绩学堂文集. 卷二. 37b.

② 李迪, 郭世荣. 清初著名天文数学家梅文鼎. 171.

③ 梅文鼎. 平三角举要序. 平三角举要. 梅氏丛书辑要. 卷十九. 1a.

即内弦，小益即外切线也，终非围也。历家以句股开方展转商求，累时方成一率，然不能离径一围三之法，即祖率已繁，不复能用。况徽率乎？况万万亿以上乎？是以甚难而实谬。[①]

邓玉函相当于指出传统勾股术不能完全涵盖三角学，而传统的割圆术相当于以直线测圆弧，是近似算法。从割圆术出发，即使经过大量的运算，也无法得到圆周和弧长的准确值，所以，是"甚难而实谬"的。然而，值得注意的是，邓玉函所介绍的三角函数表本身亦是一种近似值表[②]，而其于《大测》中引入的三角函数和三角函数公式的证明都是藉勾股形成论的。所以，虽然他在序言中所说的大体是正确的，但《大测》中所介绍的西方三角学知识并未完全解决邓玉函所称的中国勾股术和割圆术所存在的问题。

梅文鼎很可能正是针对邓玉函和其他传教士以及西法派中国学者们认为勾股术不能解三角学问题的观点，给出将锐角三角形拆分为两直角及将钝角三角形补足成直角的方法，以解决勾股术不能解一般三角形的问题，从而将三角问题转化为勾股术可以处理的问题的形式。

在《平三角举要》中，梅文鼎给出了三角函数更为准确和简明的定义。他称：

割员直线[③]，如弓之弦，谓之通弦。通弦半之，古谓之半弧弦，今曰正弦。

正弦以十字截半径，成矢。谓之正矢。

所用之弧度为正弧，以正弧减象限，为余弧。正弧所对为正角，余弧所对为余角。

有正弧正角，即有正弦有正矢，亦即有余弦，有余矢。

正弦、正矢、余弦、余矢皆乙丙弧所有，亦卯乙丁丙角所有。

每一弧一角，各有正弦、余弦、正矢、余矢，已成四线于平员内。(古人用句股割员，即此法也。盖此四线已成倒顺二句股)。再引半径，透于平员之外，与切员直线相遇为割线切线，而各有正余，复

---

① 邓玉函．大测序．大测．新法算书．四库全书本．2a—3a．《大测》为邓玉函所著，但该书经过在历局工作的中国学者的润色，并由徐光启最终审订。序文中提到刘徽、祖冲之等给出的圆周率值。可见，中国学者应参与了该序言的写作。

② 邓玉函自己亦称："凡割圜四线，大抵皆不尽之数，无论全数不尽，即以畸零法命其分，亦不能尽。故《大测表》不得谓其不差。但所差甚少，不至半径全数中之一耳。"(见：邓玉函．大测．卷1．18b)

③ 员同圆。

成四线。共为八线,故曰割员八线也①。

梅文鼎对三角函数的定义确实较邓玉函给出的原始定义更为言简意赅。同时,梅文鼎念念不忘地指出,西方的三角法与古人的勾股割圆法是一致的。前四种三角函数(线)实际上构成两个勾股形,也即可以利用勾股术来计算这些线段。

对于八线表,也即三角函数表,梅文鼎称:

八线为各弧各角之句股所成,故八线表者,即句股形之立成数也。古人用句股开方,已尽测量之理,然句、股、弦皆边线耳,边之数无方,放之则弥四远,近之则陈几案,故所传算术,皆以一端示例而已,不能备详其数也。今变而用角,则有弧度三百六十以限之,而以象限尽全周,有合于举一反三之旨,又析象限之度各六十分,凡为句股形二千七百,角度五千四百,为正弦,为切线,为割线,共一万。而句股之形略备,用之殊便也②。

意谓三角函数表即勾股形运算捷表。中国传统数学的特点是只给出示例,并不面面俱到地备载全部运算数值。传入的西方数学利用角度,不过是对传统数学的引申,即"举一反三"。这样,相对于传统数学来说,三角函数表并不是全新的内容,不过通过它,则"句股之形略备,用之殊便"而已。

书中,梅文鼎还指出:"割圜之法皆作句股于圜内,以先得正弦,故古人只用正弦,亦无不足。今用割切诸线,而皆生于正弦。③"即,三角函数是中国传统割圆术的发展。而割圆方法,则早已备载于刘徽的《九章算术注》之中。质而言之,梅文鼎此言亦不全错。刘徽在《九章算术》注中给出割圆方法。书中,他以圆内接六边形起算,连续加倍圆内接正多边形的边数,以逼近圆周。在其注文中,刘徽明确指出以 3 为圆周率所算出的并非圆周长,而是圆内接正六边形的边长。所以,邓玉函在他的序言中所说的"古云径一围三,实围以内二径之六弦,非围也"对中国数学家来说,并不是新的知识。刘徽之后的中国数学家在弧矢计算方面也有一些新的成果,但并没有利用角度,亦未发明三角函数。以"几何即勾股"为立论基础,梅文鼎总是能够很快地发现西方数学与传统数学计算方法之间的相似之处,并由此引申出中国

---

① 梅文鼎. 平三角举要. 卷 1. 7a—8a.

② 梅文鼎. 平三角举要. 卷 1. 12b.

③ 梅文鼎. 平三角举要. 卷 1. 13b.

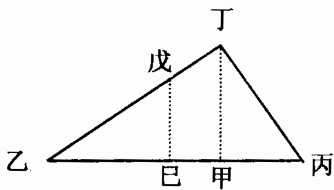
数学可以涵盖西方数学的论断。但他却也无法否认，利用西方的三角函数及三角函数公式，便可以在计算出数个特殊三角函数值后，利用公式得出其他三角函数的值，而不需要耗费大量时间和精力针对不同的角度去设计割圜方式及进行大量的运算。这很可能是梅文鼎在《平三角举要》中利用大量篇幅证明三角函数公式的原因。

虽然梅文鼎在书中反复强调西方三角学的理论与中国传统勾股术一致，勾股术为三角学的基础。但从《平三角举要》中，我们还是可以清楚地看到西方数学的影响。

《平三角举要》所探讨的主要内容是三角学知识，这是由西方传入的数学内容，所以书中除引用了一些中国传统数学知识外，主要内容并未超出《崇祯历书》及其他传教士翻译和撰写的著作。从该书的体例来看，全书首先给出测算名义及书中出现的术语的定义，并利用图示对每个概念给出解释。书中给出的命题多数为一般性论述，对于每个命题，梅文鼎大多利用辅助图形给出一般性的证明。如证明中用到的前文中的结论或引理，他也都给出加注说明。这种写作方式显然是受了《几何原本》等西方数学著作的影响。

最后，让我们来看看梅文鼎的证明方法。《平三角举要》卷四第 1 题为证明正弦定理。其设题曰：

> 问：各角正弦与各边皆不平行，何以能相为比例？曰：凡三角形，一边必对一角，其角大者正弦大，而所对之边亦大。角小者正弦小，而所对之边亦小。故边与边之比例，如正弦与正弦也。
>
> 两正弦为两边比例图
>
> 乙丙丁三角形，丁乙边大，对丙角，丁丙边小，对乙角。术为以丁乙边比丁丙边，若丙角之正弦与乙角之正弦。
>
> 解曰：试以丁丙为半径，作丁甲线为丙角正弦，又截戊乙如丁丙半径，作戊己线为乙角正弦。丁甲正弦大于戊己，故丁乙边亦大于丁丙。[1]



上文中，梅文鼎并没有将他的证明思路表述得很清楚。实际上，在上图中，乙戊等于丁丙。丁甲、戊巳均垂直于乙丙。这样，丁甲、戊巳二线分别是丙

① 梅文鼎. 平三角举要. 卷 4. 1a—b.

角和乙角相对于以丁丙为半径的圆的正弦。丁甲、戊巳因同垂直于乙丙,所以它们必然是平行的。这样,戊巳:丁甲 = 乙戊:乙丁。而戊巳和丁甲分别是丙、乙两角的正弦,又乙戊与丙丁边相等,故乙戊:戊巳相当于两角对边的比。由此,他就证明了正弦定理。

在这段证明后,梅文鼎又解释了丁甲和戊巳何以是角丙和角乙的正弦。

从上题来看,梅文鼎的证明虽然可以被认为是一个严格的证明,但其叙述方式却不如王锡阐的证明严谨。梅文鼎采取这样的叙述方式很可能是为了遵循中国传统数学说明式或讲解式的证明模式①。在他看来,上述说明已经达到了证明正弦定理正确的目的,他并不需要古希腊式的为了预防别人的辩诘而采取的严谨但啰嗦的论述方式。此外,梅文鼎不肯对上述证明做详细叙述的原因,亦或许是因为他不想在其证明中加入平行线或相似三角形等来自西方的数学理论②。

王、梅之后,还有一些数学家研究三角学。如江永在《数学续》中专门讨论三角问题,设34题探讨解平面三角和球面三角的方法,其中多题用到三角函数。书中内容并没有超过西方引入的和王、梅等数学家已述的内容,且多不含证明与推导过程。③1718年,年希尧撰成《三角法摘要》,后陈訏又撰成《句股引蒙》,但多引梅说,没有自己的发明④。梅瑴成在其《赤水遗珍》中给出了正切定理的新证明⑤。

本节的最后,我们简要地介绍一下《数理精蕴》中介绍的有关三角函数的内容。

《数理精蕴》(1723)下编卷十六专门讨论三角函数。该卷分《割圆八线》、《六宗》、《三要》、《二简法》、《八线相求》、《求象限内各线总法》6个部分。《数理精蕴》中所含的三角函数知识大多皆已为前人所述,只是书中对相关概念和知识做了进一步的总结,其论述也更为明确、系统。但书中"六

---

① 梅文鼎的几何证明方法一般均较为严谨。他还利用外接圆提供了另一个正弦定理的证明。本书无意以此例比较梅文鼎与王锡阐证明的严谨性。选择此例只为说明梅文鼎会通中、西数学的方式。关于梅文鼎的几何证明的具体方法,详见:李迪,郭世荣.清初著名天文数学家梅文鼎.171;刘钝.梅文鼎的会通中西数学思想.数学史研究文集.第六辑.1998.56—64.

② 关于梅文鼎的《平三角举要》,参见:刘钝.平三角举要提要;刘钝.梅文鼎在几何领域中的若干贡献;李迪,郭世荣.清初著名天文数学家梅文鼎.

③ 江永.数学续.四库全书本.

④ 李俨.三角术和三角函数表的东来.中算史论丛.第三集.198.

⑤ 详见:李迪,郭世荣.清初著名天文数学家梅文鼎.209.

宗”、“三要法”、“二简法”、“八线相求”等内容均是以代入具体数字的计算说明公式的来源及割圆方法，不含一般性的证明。《数理精蕴》中引入的新内容为在“六宗”之外，给出求圆内接正十八边形和正十四边形的方法，这相当于给出 20°、(360/14)°的正弦[①]。此外，书中还给出由本弧通弦求其三分之一弧通弦的方法，相当于已知 $\sin\alpha$，求 $\sin\frac{\alpha}{3}$ 的方法[②]，此法为《数理精蕴》中引入的新法。此后，焦循、明安图等都引用过这个公式。

《数理精蕴》出版之后，三角学知识得到了更好的普及，出现了一些探讨这方面内容的著作。如屈曾发《数学精详》卷十一为《三角形边线角度相求法》和安清翘(1759－1830)的《矩线原本》卷二都引用了梅文鼎的著作和《数理精蕴》中的三角学知识。

第三节 乾嘉数学家对三角函数的研究

一、乾嘉时期的弧矢割圆研究

由于三角函数在天文历法计算中的重要作用，使得关于三角函数和割圆术的研究一时成为显学，同时，随着三角学研究的深入及更多的传统数学著作被重新整理和理解，传统数学中关于割圆术和弧矢级数的研究亦成为活跃课题。乾嘉时期一些著名的经学家如江永、戴震、凌廷堪等均在这方面有所著述，当时的数学专家焦循、李锐、汪莱、罗士琳等也都对三角学或传统弧矢术有所研究。

戴震的《句股割圆记》为当时一部较为独特的著作。《句股割圆记》三卷，卷上为平面三角学内容，卷中和卷下为球面三角学内容。戴震之友吴思孝在该书序言中称：

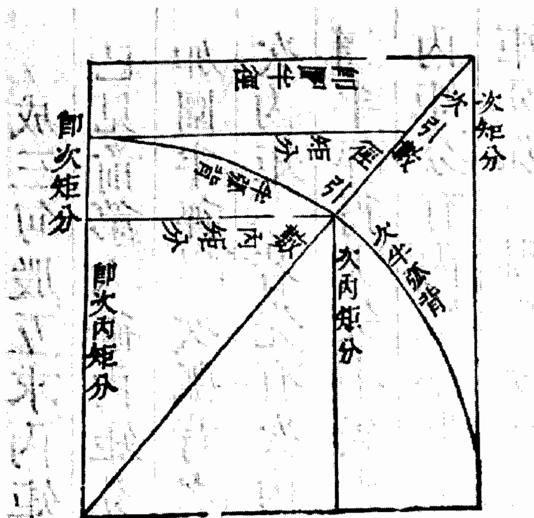
> 今夏初(1758)，戴君(戴震)以所为《句股割圜记》示余，读其文辞，殆非秦汉已后书。其于古今步算之大全，约以二千言而尽。可谓奇矣。戴君自识于终篇曰：“因《周髀》首章之言，衍而极之”。然则记中立法称名一用古义，盖若刘源甫之礼补亡，欲踵古人传记之

① 数理精蕴．下编．卷 16．29a—31a，39a—41a．

② 数理精蕴．下编．卷 16．47b—53a．

后体，固不得不尔也。余独虑习今者未能骤通古，乃附注今之平三角弧三角法于下。①

戴震为了表示其书为古《周髀算经》的续篇，在书中使用大量的古词古字，使得该书看起来像是先秦著作。然而，如此古简的文风当然不易为18世纪中叶的学者所理解，于是，吴思孝便以当时流行的三角学为该书做注解。《句股割圜记》便是以加入同代学者的注释的方式出版的。戴震在《句股割圆记》中沿用了王锡阐在《圜解》和《晓庵新法》中的词汇，如以矩折称直角，并在此基础上创造了一系列新的术语，如称正弦为内矩分，余弦为次内矩分等等。书中多处引用传统数学著作对其中的命题和概念给出解释，但却很少有一般性的证明。



戴震 名目图，《句股割圆记》，卷上，图十七，微波谢本

对于《句股割圆记》的行文方式，凌廷堪于在1796年至焦循的信中提出了直接的批评：

戴氏《句股割圜记》惟斜弧两边夹一角及三边求角用矢较不用余弦为补梅氏所未及，其余皆梅氏成法，亦即西洋成法，但易以新名耳。如上篇即《平三角举要》也，中篇即《堑堵测量》也，下篇即

① 吴思孝．句股割圜记序．句股割圜记．微波谢本．1a—b.

《环中黍尺》也。其所易新名，如角曰觚，边曰矩，切曰矩，弦曰内矩分，割曰径引数，同式形之比例曰同限互权，皆不足异。最异者经、纬倒置也……于西人本法初无所知，转足以疑误后学，又记中所立新名，惧读之者不解，乃托吴孝思以注之，如矩分今曰正切云云，夫古有是言而云今曰某某可也，今戴氏所立之名皆后于西法，是西法古而戴氏今矣。而反以西法为今，何也？凡是皆切所未喻者。①

据罗士琳称，凌廷堪认为西方数学中最难为学者理解的为弧三角，也即球面三角学。他曾有意撰《弧三角指南》以便初学。但后来因事未能成稿。② 焦循特别将凌廷堪的信作为其《释轮》的序言刊出，可见，他是同意凌氏对戴震的批评的。焦循后来撰有《释弧》一书。焦循自称：弧三角形之术"非覃思冥索，未易言得。梅徵君文鼎著《弧三角举要》及《环中黍尺》以启发其旨趣，戴庶常震又为《句股割圆记》以衍极《周髀》之旨。乃梅书撰非一时，繁复无次叙，戴书务为简奥，变易旧名，恒不易了。"③焦循认为梅文鼎的著作系统不够清晰，而戴震的《句股割圆记》又为了追求古奥而改变三角学的名目，令读者很难理解其内容，于是决定自己撰著《释弧》一书来阐释平面三角学及球面三角学的理论、方法及如何利用三角学进行计算。在该书中，焦循提出，

《周髀算经》曰：数之法出于圆方，圆出于方，方出于矩，矩出于九九八十一。九九者，数也，以数相加减，不出乎矩；以数相乘除，不出乎方。故开方、句股，均可以乘除之理言之。由方而圆，则以形生形，必依形以求义。古人既明以图，复象以器，以形故也。乃《九章算术》方田章有圆田、弧田之术，圆为弧之合，弧为圆之分，于此可见。其术有周径，有半周半径，有矢、有弦，为割圆弧矢之术所从出，亦即三角八线之理所不能外也。④

可见，随着对古算书的进一步研究，焦循等乾嘉数学家对西方三角学知识与传统数学的关系做了更为详细的分析与探讨，从中我们也可以清楚地看到焦循试图以传统数学规划西方三角学理论的设想。焦循在书中详细介绍了

---

① 凌廷堪．至焦循．释轮．里堂学算记本．3a—4a.

② 罗士琳，《凌廷堪》，《畴人传续编》，卷49，17b.

③ 焦循．释弧．卷上．里堂学算记本．1a—b.

④ 焦循．释弧．卷上．里堂学算记本．2a—b.

刘徽的割圆术,并经常引用《周髀》、《九章》等古算经及梅文鼎等的著作来解释说明三角学命题和方法。但同时,他还是坦诚地承认来自西方的"二简法"等三角公式的优越性,并沿用了随欧洲几何学和三角学的传入出现的概念和名词。①

1798年,李锐撰《弧矢算术细草》。该书是在李锐校勘《测圆海镜》及《益古演段》之后所成,主要以天元术详演顾应祥《弧矢算术》②。汪莱在三角学方面有创意的工作则主要在球面三角学领域③,本章中对他们的工作不做详细论述。

1843年,罗士琳著《弧矢算术补》,《弧矢算术》主要阐明已知弦、矢、圆径、弧背、残周及截积6项中的2项求其余诸项的方法。原书中有11题,13术。李锐撰《弧矢算术细草》时仅就原有算题给出天元术细草,并没有对书中的内容作进一步的整理和补充。罗士琳针对这一问题,系统分析了《弧矢算术》的结构并补足所缺诸术。④罗士琳曾试图以天元术为基础将三角学的研究代数化,著成《三角和较释例》,但他的书中只给出算题和最后的开方式,没有给出其得到开方式的过程,亦未有具体的以天元术立术的草文,该书并未引起当时数学家们的重视。⑤

二、明安图对三角函数幂级数展开式的研究

中算家关于三角函数幂级数展开式的研究起源于法国传教士杜德美介绍的杜氏三术。1701年,法国传教士杜德美(P. Jartoux,1668—1720)带来了三个幂级数展开式,此即中算史上著名的杜氏三术,这三个展开式被称为"圆径求周"、"弧背求正弦"和"弧背求正矢"术,分别相当于圆周率的幂级数展开式、半径乘以正弦相对于圆心角所对的弧长和半径的展开式及正矢相对于弧长和半径的展开式。这三个公式中,第1式是牛顿(I. Newton,1642—1727)在1676年给出的,2、3式是由格里高利(J. Gregory, 1638—

---

① 焦循. 释弧. 里堂学算记本.

② 李锐. 弧矢算术细草. 李氏遗书本.

③ 关于汪莱在球面三角学方面的工作,参见:李兆华. 汪莱球面三角成果讨论. 古算新论. 255—276.

④ 罗士琳. 矢算术补. 1843年刊本.

⑤ 罗士琳. 三角和较算例. 观我生室汇稿. 关于《三角和较算例》的内容,参见:郭世荣. 罗士琳《三角和较算例》简介.

1675)在1667年提出的。明安图对杜德美传入的三角函数幂级数展开式评价曰：

> 今之法所以密于古者，以其能用三角形也。然三角形非八线表不能相求，若一时不得其表，虽精于其法者亦无从措手。惟用此法以之立表则甚易。以之推三角形则不用表而得数，与用表者同。其用可谓溥矣①。

从中可以看出，中算家关注三角函数幂级数展开式的原因正是因为利用这些公式可以方便地求出三角函数。故笔者将清代数学家三角函数幂级数展开式的研究列入三角函数在中国的传播的范围之中。

有证据表明，在1720年以前，梅瑴成已经知道了杜德美的三个公式，他曾将它们录入其《赤水遗珍》。并赞之曰："割圆旧术屡求句股至精至密，但开数十位之方，非旬日不能办。今立乘除之数以求之，得之顷刻，与屡求句股者无异。故称捷法。又曰：弧矢之术，有弧背即可求弦矢，《大测》割圆之法，理精数密，然不能随度以求弦矢。今任设奇零之弧分度，不必符乎六宗法，不必依乎三要，而弦矢可得，斯诚术之奇而捷者也。"②但这些公式却并未被收入《数理精蕴》。这很可能与《数理精蕴》的结构有关，《数理精蕴》只收入"可靠"的数学知识。杜德美虽然介绍了这三个公式，但并没有给出它们的证明及其推导方法，所以该法在当时还不能被视为"可靠"的知识。③

约半个世纪后，明安图在其《割圆密率捷法》中证明了杜氏三术，并自己发明了6个新的三角函数幂级数展开式。这9个公式后来被合称为杜氏九术。

据明安图的学生陈际新称，明安图"自童年亲受数学于圣祖仁皇帝"，也就是说，明安图早年就在宫中学习数学，他毕生工作于钦天监，所以，他必然会与传教士们有很多交往。在得到杜德美所传的三个幂级数展开式后，他认为这三个公式"实古今所未有也"。所以"亟欲公诸同志"。然而，杜德美仅传给他这三个公式，却"未详其义"，也就是说，没有讲明其间的算理。明安图为了证明这几个公式耗费了大量精力，至去世时，仍"未能卒业"。于是，他叮嘱其学生陈际新等"务续而成之"。明安图死后，陈"际新寻绪推究，

---

① 明安图．圆密率捷法．卷2．1839年岑建功刊本．1a.

② 引自：阮元．杜德美．畴人传．卷46．5b—6b.

③ 参见：詹嘉玲著．清代初期和中期的数学教育．田淼译．法国汉学。

质以平日所闻面授之言，遇有疑义则与先生之季子景致及门人张良亭相与讨论，而良亭、景致亦时同推步校录，越数年，甲午(1774)始克成书”。[①]

《割圆密率捷法》4卷，分“步法”，即书中所涉及的公式；“用法”，即幂级数公式的使用方法举例；“法解”，即公式的证明三部分。

在“步法”部分，除杜德美的三个幂级数公式外，明安图又给出了“弧背求通弦”、“弧背求矢”、“通弦求弧背”、“正弦求弧背”、“正矢求弧背”、“矢求弧背”六术，相当于弦对于弧长的展开式、矢对弧长的展开式、弧长对弦的展开式、弧长对正弦的展开式、弧长对正矢的展开式和弧长对矢的展开式。除此之外，明安图还给出了“余弧求正弦正矢”、“余矢余弦求正弧”、“借弧求正、余弦”、“借正弦余弦求弧背”之法。按明安图的说法，“遇设数大者，推算次数较多，故增后法”[②]。此四法实际上是利用同角三角函数公式进行转化，以求简化运算。

本节所关注的焦点是明安图对9个幂级数展开式公式的证明方法。据陈际新称：

> 先生初闻杜泰西圜径求周、弧背求弦、求矢之法，知其义深藏而不可不求甚解。欲自立一法以观其同异。因思古法有二分弧法，西法有三分弧法，则递分之，亦必有法也。由是思之，遂得五分弧及七分弧。次列三分弧、五分弧、七分弧三数观之，见其数可依次加减而得，遂加减至九十九分弧。然其分数皆奇数也，又思之遂得二分弧，依前法递推至四分弧，六分弧，加减至百分弧，则偶数亦备矣。然犹分而不能合也。又思之，奇偶可合矣。然逐层求之，数多则繁，若累至于千万分，犹未易也。又思之，其数可超位而得。则以二分弧五分弧得十分弧，以十分弧求得百分弧，以十分弧百分弧求得千分弧。以十分弧千分弧求得万分弧，既得百分弧、千分弧、万分弧三数，然后比例相较而弧矢弦相求之密率捷法于是乎成。及其成也，与杜泰西之法无异，遂以是为解焉。[③]

对于不熟悉割圆术术语及方法的读者来说，上述引文可能很难理解。由于明安图的证明方法对于我们阐述18世纪至19世纪中期中国数学家对三角

① 陈际新．割圜密率捷法序．割圜密率捷法．1839年刊本．1a—b.

② 明安图．割圜密率捷法．卷1．10a.

③ 明安图．割圜密率捷法．卷3．1a—2a.

函数幂级数展开式的研究至关重要，所以，我们将在下文中对他的方法做一详细分析。

陈际新提到的二分弧法和三分弧法分别相当于求半角和三分之一角通弦的方法。所谓“西法有三分弧法”指的是上文中提到的《数理精蕴》中介绍的求“有本弧之正弦求其三分之一弧之正弦”的方法。利用该法可以整理出全弧通弦和三分之一弧通弦的关系式，这个关系式相当于公式：

$$c = 3c_{1/3} - \frac{C_{1/3}^{3}}{r^{2}}$$

所谓明安图自立的五分弧及七分弧法，即明安图利用与《数理精蕴》中相仿的方法推导出的本弧通弦和五分之一弧通弦的关系式及本弧通弦和七分之一弧通弦的关系式，相当于：

$$c = 5c_{1/5} - \frac{C_{1/5}^{3}}{r^{2}} + \frac{C_{1/5}^{5}}{r^{4}} \text{及} \ c = 3c_{1/7} - \frac{C_{1/7}^{3}}{r^{2}} + \frac{C_{1/7}^{5}}{r^{4}} - \frac{C_{1/7}^{7}}{r^{6}}$$

把这三个公式列在一起，明安图发现，本弧通弦可以由一个 M 分之一弧通弦的多项式来表达，也即其数“可依次加减而得”。但这里的 M 只能是奇数。此后，明安图要考虑 M 为偶数的问题。于是，他得到以二分弧通弦表示全弧通弦的方法。据陈际新说，此法为“古法”。确实，刘徽在其《九章算术》注中详细论述了割圆方法，他以圆内接六边形为基础，通过累次加倍分割边数逼近圆周，二分弧正是刘徽割圆的基本方法。然而，明安图在他的行文中并没有提到刘徽的或其他传统割圆方法。在明安图从事割圆术研究时，他很可能并没有见到《九章算术》全文①。陈际新是《四库全书》数学部分的分校官，他应该比明安图更了解《九章算术》及其他传统数学著作。所以，很可能正如陈际新所说，关于二分弧通弦与全弧通弦的关系式是明安图自创的。利用推导奇数分弧与全弧通弦关系的方法，明安图将与二分弧相关的成果推广至四分弧、六分弧，甚至加减至百分弧。到这一步，明安图所得到的是奇数系列和偶数系列的两套算法和公式，经过进一步思考，他得到了“奇、偶”相合的方法。这样，他便将其成果推广至全部自然数系，以他和陈际新对数系的认识，即全部的奇、偶数。然而，上述方法步步推导还是非常繁琐，于是，明安图得到了超位求数的方法，也即是，利用二分弧、五分弧

① 陈际新为《四库全书》馆天文算学部分的分校官，通过对《四库全书》中收录的数学书籍的研究，他应该比明安图对古代的数学方法有更全面的了解。

的公式,平分每个五分弧,便可以求得十分弧的公式,以十分弧的成果可以得到百分弧的成果。再由十分、百分可以得到千分弧,并进而得到万分弧通弦与全弦的关系式。当对弧的划分越来越细时,分弧通弦便逐渐逼近弧背。对此,刘徽在公元263年注《九章算术》时称:“割之弥细,所失弥少,割之又割以至于不可割,则与圆周合体而无所失矣。”①对于明安图来说,则是:“弧、圜线也;弦,直线也,二者不同类也。不同类,虽析之至于无穷,不可以一之也。然则终不可相求乎? 非也。弧与弦虽不可以一之,苟析之至于无穷,则所以不可一之故见矣。得其不可一之故,即可因理以立法,是又未尝不可以一之也。何为而不可相求乎?②”在明安图的叙述中,弧和直线二者不同类,不可相通,是西方数学引入的观念。这与刘徽给出的自然的“至不可割则与圆周合体”的思考方式是不同的。清代从事割圆术研究的数学家多有与明安图类似的言论,可见,虽然传统割圆术及刘徽关于割圆术的注文在清中叶已广为人知,但西方数学中的一些严格的概念已深入人心。

明安图利用千、万分弧通弦与全弧通弦的关系式进一步得出弧背求通弦的方法。在当时的定义体系下,通弦即正弦的两倍。以此重新整理所得到的求通弦的公式,便可得到杜德美传入的正弦的幂级数展开式。此外,利用级数回求,明安图可以从弧背求通弦的方法推导出“通弦求弧背”术。将正弦的幂级数展开式代入“通弦求弧背”术,便可得到弧背对正弦的表达式。此后,取特殊数值,弧度为 $\alpha=\frac{\pi}{6}$, $r\sin\alpha=\frac{r}{2}$, $\alpha=\frac{r\pi}{6}$,便可得到幂级数展开式。仿照前法,可以得出“弧背求正矢”的方法。这便是杜德美传入的三个公式的证明过程。利用这些结果,明安图又进一步得出了他六个幂级数展开式,构成清中叶著名的“杜氏九术”③。

据陈际新所说,明安图的证明方法开始时是尝试性的。弧背求弦术是明安图为了证明杜德美公式而设计的,是一个中间结果。该术成为杜氏三术证明的基础,根据这个公式,明安图最终得到了与杜德美公式完全一致的结论。

综上所述,明安图证明和推导“弧背求通弦术”的过程为证明其它公式的基础。下面,我们就具体地看一下他的证明方法。

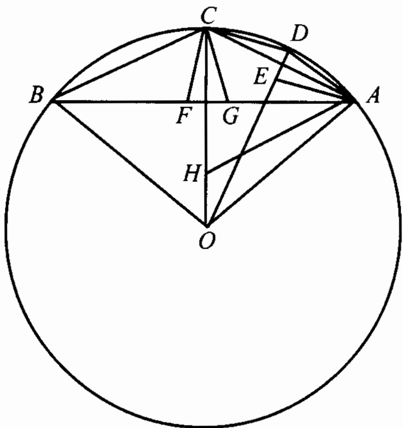
---

① 刘徽. 圆田术注. 九章算术. 武英殿聚珍版. 卷1. 15a.

② 明安图. 弧背求通弦率数法解. 割圜密率捷法. 卷3. 49a.

③ 此处参照了钱宝琮的《中国数学史》(301—306)。

明安图首先给出利用圆半径和二分弧通弦求全弧通弦公式的证明。其证明过程如下：AB 为一段圆弧，平分于 C。现欲求得弦 AB 关于半径和半弧通弦 AC 的表达式。



将 AC 弧两平分于 D，连接 OD、AD 和 CD。作 AE 等于 AD，则三角形 OAB 相似于三角形 AED①。次截 BG、AF 分别等于 BC、AC，连接 CF、CG，则三角形 ACF 与 CFG 及三角形 BCG 和 CGF 分别为相似三角形，且均与 OAD 和 ADE 相似②。这样，

$$\frac{OA}{AD}=\frac{AD}{DE}=\frac{AC}{FC}=\frac{FC}{FG}$$

又，$\dfrac{OA}{DE}=\dfrac{AC(BC)}{FG}$

这样，　$FG=\dfrac{DE\cdot AC}{OA^2}$

而　　$AB+FG=2AC=2BC$

则　　$AB=2AC-\dfrac{DE\cdot AC}{OA^2}$

然而，题设中并没有给出 DE。所以，这一结果与所要求的结果并不一致。下一步，明安图试图用 AC 来表示 DE。与前面的证明方法类似，添加一定辅助线并得出一系列相似三角形之后，明安图得到 DE 与 AC 的关系式为

$$DE=\frac{AC^2}{4OA}+\frac{AC^4}{4\cdot 16OA^3}+\frac{2AC^6}{4\cdot 16^2OA^5}+\cdots$$

将之代入原弧通弦 AB 的表达式，便可得到：

$$AB=2AC-\frac{AC^3}{4OA^2}-\frac{AC^5}{4\cdot 16OA^4}-\frac{2AC^7}{4\cdot 16^2OA^6}+\cdots$$

---

① 明安图原文中注称，《数理精蕴》中有这两个三角形相似的证明。见：明安图．割圜密率捷法．卷3．3b．

② 这六个三角形之间的相似关系很容易证明。明安图以注文的形式给出了其严格证明。见：明安图．割圜密率捷法．卷3．3b．

这样,便得到了全弧通弦和半弧通弦之间的表达式。①

此后,明安图又以如上所述的严格的几何方法导出并证明了全弧通弦与三分弧通弦之间的关系式、全弧通弦与四分弧通弦之间的关系式及全弧通弦与五分弧通弦之间的关系式。以 c 表示原弧通弦 AD,以 $c_{1/h}$ 表示分弧通弦,明安图得到的五分弧通弦公式相当于:

$$c = 5c_{1/5} - 5\frac{c_{1/5}^3}{r^2} + \frac{c_{1/5}^5}{r^4}$$

把每个二分通弦五等分,即将上式代入二分弧通弦与原弧通弦关系式,便可得到原弧通弦与十分弧通弦的公式。

$$c = 10c_{1/10} - 165\frac{c_{1/10}^3}{4r^2} + 3003\frac{c_{1/10}^5}{4\cdot 16r^2} - \cdots$$

同样,将十分弧通弦公式再引入十分弧通弦公式,可得到百分弧通弦公式,再将十分弧通弦公式代入百分弧通弦公式可以得到千分弧通弦与原弧通弦的关系式。如此,亦可以得到万分弧通弦与原弧通弦关系式。

$$c = 10000c_{1/10000} - 1666,6666,5000\frac{c_{1/10000}^3}{4r^2} + 333,3333,0000,0000,3000\frac{c_{1/10000}^5}{4\cdot 16r^4} + \cdots$$

明安图认为第二项系数 $\frac{1666,6666,5000}{4}$ 约等于 $\frac{1}{4\times 6}$,第三项系数约等于 $\frac{1}{16\times 120}$,仿此,则第四项系数约等于,$\frac{1}{64\times 120\times 42}$……如果将原弧继续分割至 m 份,明安图认为可以得到公式:

$$c = 2a - \frac{(2a)^3}{4\cdot 3!\ \ r^2} + \frac{(2a)^5}{4^2 5!\ \ r^4} - \frac{(2a)^7}{4^3 5!\ \ r^4} + \cdots\cdots$$

其中,$2a$ 为弧长。明安图对于系数的简化及其取近似分数的方法很可能受了后文欲推导的公式系数的启发,即通过这一近似,明安图可以凑成他所要证明的结果②。从上面的叙述可以看出来,除涉及极限理论的部分及近似

① 明安图. 弧矢弦相求图解. 卷 3. 2b—13a.

② 董祐诚称:"其书(《割圜密率捷法》)释连比例诸率分弦矢为二术,皆先设百分千分万分诸弧,如本法乘除之,弃其畸零,以求合于矢之十二、三十、五十六,弦之二十四、八十、百六十八诸数,遂谓递加一数以为除法者。特取其易知而便于记忆,则其于立法之原似未尽也。"见:董祐诚. 割圆连比例图解跋. 割圜连比例图解. 董方立遗书本. 1a.

分数代替小数系数的步骤以外，明安图的全部证明和推导都是严格的欧几里得几何式的论述。可以说，《割圆密率捷法》是一部以西方方法证明西方数学成果的著作。此外，值得注意的是，明安图在证明过程中坚持使用一般三角形的性质和相似关系，没有利用直角三角形，也即勾股术。中国传统割圆术主要是以勾股术入算的，且利用勾股术确实可以使得推导过程更为简单。明安图在求二分弧通弦与全弧通弦关系式时称："此题用勾股法求之甚易，然不能与诸法相通。故设此问，观者依次求之，则知其不可易矣。"①可见，明安图是为了追求全书算法的一致性而在所有的题目中均使用一般三角形进行推导的。但实际上，利用勾股术也可以对全书中的公式做一致的推导。此外，由于证明过程非常复杂，明安图使用了西方代数方法"借根方法"辅助推导。这可能是清中叶数学家利用"借根方"法推导三角函数幂级数展开式的仅有尝试。前文曾经提到，稍晚于明安图，罗士琳曾以传统代数方法天元术研究三角学。但他们将代数方法应用于三角学的工作并没有引起同辈及以后的数学家的重视，明安图之后研究三角函数幂级数展开式的数学家似乎并未利用代数方法。

《割圆密率捷法》著成后，并没有很快被出版。当时的数学家如汪莱、董祐诚等均未见过全书。道光初年，罗士琳从其师戴敦元处抄得原书。后由岑建功算校加案，于1839年出版。罗士琳为其撰跋曰：

> 割圜肇自《九章》，大测生于八线。旧传弧背求矢，滥饬已久，然非密率。自西士入中土，设六宗三要诸术，为割圜八线起算，法始大备……彼（西法）之割圜，仍不外屡求句股，究亦本诸中法，以故中学兴而西人退。然西法亦有不可没者。如弧矢八线，以密率圜周为用，列表既便，测圜较确，复因八线积数太多，乘除匪易，设连比例求对数，以加减代乘除，为用尤捷。斯二者，术之最善者也。故至今并重于世。是书摒却屡求句股旧法，亦设连比例术，弦取偶率，矢取奇率，别创乘除诸母，寓中法之理于西法之中。士琳曾据术推演，其得数与表无异。因之互校八线对数，得表中列数刊错者凡五条……是此书不独可舍表以求八线，且可据八线以核表中刊刻之误，交相成而迭为用，辅益是资，洵割圜不易之金鍼。其视八

① 明安图. 割圜密率捷法. 卷3. 2b.

线表也，宜益加珍重。又安得目为西法而忽之邪。[1]

可见，作为当时中法派的代表，罗士琳并未因《割圆密率捷法》中专用西方数学方法而贬低该书的成就，而是对该书给出了客观的评价。从这一点，我们也可以对乾嘉时期数学家的数学研究态度有更进一步的了解。

第四节　清代数学家对三角函数幂级数展开式的研究

早在《割圆密率捷法》出版之前，数学家董祐诚已独立地给出上述 9 个三角函数幂级数展开公式的另一种证明方法。董祐诚通过梅瑴成的《赤水遗珍》读到杜德美传入的 3 个幂级数公式，但认为梅氏所录“语焉不详，罕通其故”。所以，他欲创“通法”，即一般方法，可以直接进行弦、矢、弧间的互求计算。1819 年，董祐诚从其友朱鸿处见到抄本的杜氏九术，然“九术以外，别无图说”。他“反覆寻绎，究其立法之原”。他认为，九术之法“即圆容十八觚之术，引伸类长，求其累积，实兼差分之列衰、商功之堆垛，而会通以尽句股之变”。[2]也就是说，他认为杜氏九术的推导于传统差分术及垛积术有关。董祐诚所著的《割圆连比例术图解》(3 卷)即是解释和证明杜氏九术的。书中，董祐诚给出的 4 个幂级数展开式：“有通弦求通弧加倍几分之通弦”、“有矢，求通弧加倍几分之矢”、“有通弦，求几分通弧之一通弦”、“有矢，求向分通弧之一矢”4 个公式，董氏指出，通过这 4 个公式可以推导出杜氏九术。

与明安图一样，董祐诚的三角函数幂级数研究也是从构造连比例线段探求全弧通弦与分弧通弦的关系入手的。所不同的是，董祐诚是设全弧通弦为本弦，求其倍弧通弦。

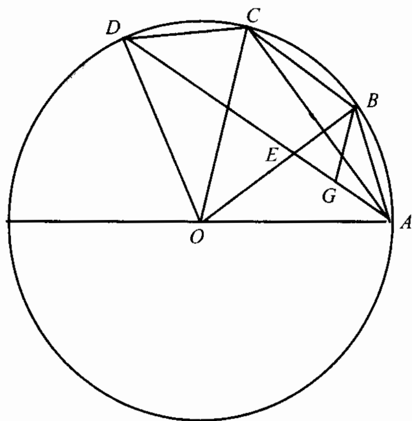
下页左图中，AB 为本弦，AC、AD 分别为其倍弦和三倍弦。BG 平行于 OC，交 AD 于 G。BF 为二分弧的正矢，$BE=2BF$，董祐诚称之为二分倍矢。董祐诚首先以欧氏几何方法，证明了$\triangle OAB$ 相似于$\triangle ABE$，及$\triangle ABE$ 相似于$\triangle BEG$，由此得到：

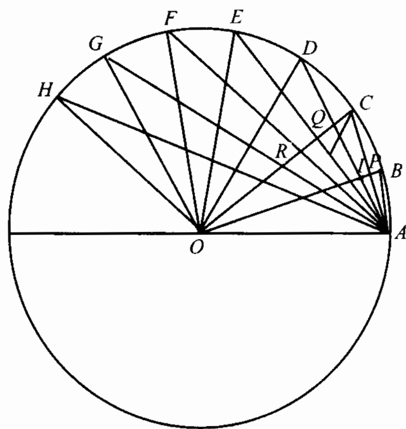
$\frac{OA}{AB}=\frac{AB}{BE}=\frac{BE}{EG}$，则 $BE=2BF=\frac{AB^2}{OA}$，且 $AD=3AB-EG$

董祐诚将这些关系式推广到一般情形，即如下页右图，在以 r 为半径的圆周

① 罗士琳．割圆密率捷法跋．割圆密率捷法．2a—4a．

② 董祐诚．割圆连比例术图解序．割圆连比例术图解．1a—b．





上，设 AB、BC、CD、DE、EF 等均为相等的弧分，从圆心 O 和 A 点到各点作联线，AC 和 OB 交于 P，AE 和 OC 交于 Q，AG 交 OD 于 R，则

$$2BP=\frac{AB^2}{OA},AD=3AB-\frac{AB^3}{OA^2},2CQ=4\frac{AB^2}{OA}-\frac{AB^4}{OA^2},AF=5AB-\frac{5AB^3}{OA^2}+\frac{AB^5}{OA^4},2DR=4\frac{AB^2}{OA}-\frac{AB^4}{OA^2}$$

董祐诚设计了一系列比率数，令半径 r 为一率，我们记之为 r_1；一分弧通弦为 AB 为二率，记为 r_2；二分弧二倍矢，$BE=2BF=\frac{AB^2}{OA}=\frac{r^{22}}{r_1}$ 为三率，记为 r_3；$\frac{r_2r_3}{r_1}$ 为四率，记为 r_4；$\frac{r_2r_4}{r_1}$ 为五率，r_5；……以此类推，$r_n=\frac{r_2r_{n-1}}{r_1}$。

利用相似三角形线段比例关系递推，董祐诚得到：

三分弧通弦为：$AD=(r_2-r_4)+2r_2$

五分弧通弦为：$AF=(r_2-3r_4+r_6)+2(2r_2-r_4)$

七分弧通弦为：$AH=(r_2-6r_4+5r_6-r_8)+2(3r_2-4r_4+r_6)$

……

二分弧倍矢为 $BI=r_3$

四分弧倍矢为 $CR=(2r_3-r_5)+2r_3$

六分弧倍矢为 $(3r_3-4r_5+r_7)+2(3r_3-r_5)$

……

在计算到十七分弧之后，董祐诚确信各分弧通弦及各分弧倍矢的表达式中

各率系数的变化与三角垛有关。就通弦来说,如果我们把通弦公式分成两部分,则其前、后两部分系数分别呈下列变化趋势:

```
      p=0                         p=1
     1 /  p=2                  2 (1)/  p=3
   1 /-1 /  p=4              2 ( 2 /-1)/  p=5
  1 /-3 / 1 /              2 ( 3/ -4 / 1)/
 1 /-6 / 5 /-1                 ……
   ……
```

而各倍矢的变化为:

```
      p=1                         p=2
     1 /  p=3                  2 (1)/  p=4
   2 / -1 /  p=5             2 ( 3 /-1)/  p=6
  3 /-4  / 1 /             2 ( 6 /-5 /1 )
 4 /-10 / 6 /-1                ……
   ……
```

与三角垛做比较:

```
                 p=0
                1 / p=1
              1 /  1 /  p=2
            1 /  2 /  1 /  p=3
          1 /  3 /  3 /  1 /  p=4
        1 /  4 /  6 /  4 /  1 /  p=5
      1 /  5 / 10 / 10 /  5 /  1 /  p=6
    1 /  6 / 15 / 20 / 15 /  6 /  1
              ……
```

(三角平垛图,贾宪三角形)

分析可以看出,通弦公式中各率系数的前一部分与三角垛的偶数斜行的排列一致,只不过通弦公式的偶数斜行的系数是负的。同样,其后一部分相当于三角垛奇数斜行各数,其偶数行系数的符号为负。在各倍矢公式中,前一部分各系数变化与奇数行的三角垛一致,偶数行的系数也是负数,后一部分的系数变化与三角垛偶数行一致,其偶数行系数亦为负。

这就是董祐诚在序言中称杜氏九术兼差分和垛积之意的原因。由于董祐诚的各率均是由前一率递加递乘而来,所以,各系数变化必然会遵循递加递乘的规律。三角垛表,即贾宪三角形,实际上也是二项展开式系数变化图,所以,董祐诚所设计的各率的系数与其有一定的联系是正常的。我们可以证明,他所认定的各分弦通弦、倍矢公式中各率系数与三角垛之间的关系

是正确的。[1]董祐诚把这些数字称为“递加数”，也可以看出他对其中的原因有所理解。但他只是通过对一至十七分弦的结果进行分析而归纳得出了结论，并没有进行理论推导。

董祐诚曾撰有一部《堆垛求积术》(1821)一卷，书中给出了方锥堆和纵方堆的求和公式。董祐诚自称：“予释割圆捷法，更得求诸乘方所成之方锥堆术。继复以纵方锥推之，而得诸乘方所成之纵方堆数”。可见，他的垛积术工作正是其阐释和证明割圆公式的副产品。利用三角垛公式，董祐诚整理出整倍数分弧通弦和正矢相对于一分弧通弦和倍矢的展开式：

$$l_{2n-1}=(2n-1)l-\frac{(2n-1)[(2n-1)^2-1^2]}{3!\ 4r_2}l^3+\frac{(2n-1)[(2n-1)^2-1^2][(2n-1)^2-3^2]}{5!\ 4^2r_4}-\cdots$$

及

$$b_{2n}=\frac{n^2}{2!}(2b)-\frac{n^2(n^2-1^1)}{4!\ r}(2b)^2+\frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{6!\ r^2}(2b)^3-\cdots$$[2]

综上所述，在《割圆连比例术图解》中，董祐诚还是试图以欧氏几何的证明方法来验证他所得出的4个幂级数公式的。但与明安图不同的是，董祐诚对中国传统数学有着更深的理解，所以，他能敏锐地观察到倍弧通弦及倍矢对分弧通弦、倍矢之表达式中的各率系数变化与三角垛之间的关系。从而将三角函数幂级数展开式的研究与传统垛积术联系起来。但同时，我们也可以看出，董祐诚并不是有意要以传统数学方法来阐释西方数学内容的，他联系中、西数学的方法是非常自然的，从计算过程中观察得到的。同时，通过对三角函数幂级数展开式的研究，董祐诚又进一步深化了垛积术的研究。董祐诚之后的数学家多利用垛积成果进行幂级数研究，李善兰更是在这两方面都做出了突出成果，并发展出尖锥术。

董祐诚之后，项名达、徐有壬、戴煦、夏鸾翔、李善兰、顾观光等都在幂级数展开式的研究方面有所发明。

项名达在《象数一原》中记录了他研究三角函数幂级数展开式的过程：

方圜率古不相通也……自杜氏术出，而方圜之率始通其术。用连比例，一率半径，二率通弦，三率倍矢，由是递求诸率。有径即

---

① 关于具体证明，参见：李兆华．董祐诚垛积术与割圜术述评．古算新论．113—117．

② 李兆华．中国数学史．270—274．

得周，自弦矢即得弧，有弧亦即得弦矢。其算捷，其数亦最真。顾是术也，梅氏《赤水遗珍》载焉而未释，明静庵先生《捷法》解释焉，而未抉其原…… 自董氏（董祐诚）术出，而方圜率相通之理始显。术凡四，曰求倍分弦矢，求析分弦矢，审定乘除法以明率数。倍分率，圜所以通方也；析分率，方所以通圜也。其释倍分率以方锥堆，而方锥堆实出于三角堆，弦之二率即两堆根相关数，四率即两立积相并数，矢之三率即两平积相并数，五率即两三乘积相并数，四、五率以下，多乘积以还，莫不如是。故递次乘除，皆求堆积法也。而即以之求弦矢，弦之分有奇无偶，矢之分奇、偶俱全，至析分率则三角堆无其数，即假倍分之率较量而反释之，可为独具只眼矣。所疑者，堆积既与率数合，何以有倍分无析分？倍分中弦率又何以有奇分无偶分？且弦矢线联于圜中，于三角堆何与？蓄是疑有年，丁酉归自茗南，舟中偶念此，恍然曰，三角堆数起于一，递加一得堆根，递加根得平积，递加平积得立积，盖递加数也。弦矢率由圜中两等边三角挨次比例而生，亦起于半径之一，半径即一率，递加一率得二率，递加二率得三率，递加三率得四率，亦递加数也。①

项名达的幂级数展开式研究是在对董祐诚的《割圆连比例术图解》的深入思考的基础进行的。他对分弦通弦及倍矢何以可通过垛积术与其倍分通弦和矢线建立起数值关系感到困惑，因为从表面上看来，割圆与垛积之间完全没有联系。经过长期的思考，项名达终于明白了二者之间的关系。从此可以看出，19世纪初，中国数学家没有盲目地接受西方数学传入的内容，他们对传入的数学内容都力图给出严谨的证明。同时，他们也不再满足于归纳法所得到的结论，而是要深入地思考算法的内在原理。上文已经提到，董祐诚指出，明安图在证明通弦公式时，为了得到欲证明的结果将小数化为近似分数是不明立法原理所致。此处，项明达又由于对董祐诚将三角垛结果用于三角函数幂级数展开式研究而长期疑惑，从而得到对垛积术更深的理解，并进一步在三角函数幂级数展开式方面得出新的成果。

针对董祐诚只给出含奇数倍弧分的全弧通弦和分弧通弦之间的表达式，项名达得出：全弧分为 n 份，无论 n 为奇、偶，其通弦均可展形为分弧通弦的幂级数，析分弦矢和倍分弦矢理本一贯。这样，董祐诚的4个公式便可

① 项名达．象数一原序．象数一原．上海高斋汇刻本．1a—2a．

归纳为如下的 2 个公式：

$$c_n = n\frac{c_n}{m} + \frac{n(m^2-n^2)}{4\cdot 3!\ r^2}(\frac{c_m}{m})^3 + \frac{n(m^2-n^2)(3^2m^2-n^2)}{4^2\cdot 5!\ r^5}(\frac{c_m}{m})^5 + \cdots$$

$$b_n = \frac{n^2}{2!}(\frac{2b_m}{m^2}) + \frac{n^2(m^2-n^2)}{4!\ r}(\frac{2b_m}{m^2})^2 + \frac{n^2(m^2-n^2)(4m^2-n^2)}{6!\ r^2}(\frac{2b_m}{m^2})^3 + \cdots$$

其中，m，n 分别是所知度、所求度，取 $m=1$ 或 $n=1$ 就可推得董祐诚的 4 个公式。此外，项名达还讨论了弦矢求八线术[①]。除了三角函数幂级数展开式之外，项名达还得出椭圆求周术和圆周求径术等其它幂级数公式。

项名达继承了董祐诚利用三角垛公式研究幂级数展开式的研究方法。在《象数一原》中，他将贾宪三角形更名为"递加图"，以递加数的原理探讨该图的构成及其与幂级数的关系。[②]通过他的工作阐明了幂级数研究和垛积术的理论联系。[③]

项名达之后，戴煦和李善兰亦对幂级数展开式做了深入研究。戴煦继续项名达的工作，从二项式展开式入手，求开方式的幂级数展开式，此后，结合《数理精蕴》中给出的屡次开方求对数法，给出对数及三角函数的对数的幂级数展开式。在三角函数的幂级数展开式方面，戴煦在《外切密率》中讨论了正切、余切、正割、余割四线与弧度间的相互关系，给出其幂级数展开式。但他的成果多已由徐有壬推得。

李善兰在幂级数方面工作主要集中在他所著的《方圆阐幽》、《弧矢启秘》和《对数探源》三书中。在《弧矢启秘》中，李善兰给出了正弦、正矢、正切和余切的幂级数展开式。其中关于余切对弦的展开式是他自创的。李善兰在对幂级数展开式的证明中创造出尖锥术。其理论与微积分学的一些基础理论相类。虽然李善兰对尖锥术的原理和来源没有做详细的说明，但史学家们普遍认为尖锥术正是以垛积术为基础的。所以，我们可以说，李善兰的幂级数研究方法也是在董祐诚将垛积术和三角函数的幂级数展开式相结合的基础上发展而来的。[④]

与戴煦和李善兰同时的徐有壬也是在幂级数展开式方面颇有成果的数学家。徐有壬自称："旧法有八线表，有对数表，万算皆从此出。表之用大矣

① 参阅：钱宝琮．中国数学史．309—312；李兆华．中国数学史．274—275．

② 关于递加数的数学意义，参见：特古斯．清代中算家的递加数．

③ 项名达．象数一原．上海高斋汇刻本．1888．

④ 关于李善兰尖锥术与垛积术的关系，参阅：李兆华．李善兰垛积术与尖锥术略论．

哉。惜其创造之初，取径纡徊，布算繁赜，不示人简易之方，令学者望洋兴叹。如八线对数一表，至今无人知其立表之根者，不可谓非缺事也。余读《四元玉鉴》，究心于垛积招差之法，推之割圆诸术，无所不通。盖垛积者，递加数也。招差者，连比例也。合二术以施之割圆，六通四辟，而简易之法生焉。导源于杜德美氏，发挥于董方立氏，旁推交通于项梅侣氏、戴鄂士氏、李秋纫氏，几无遗蕴矣。是书集诸家成说，参以管见，简益求简，凡五术，以就正有道君子。"①徐有壬幂级数的研究多收录于《割圆八线缀术》、《测圆密率》、《造表各简法》等书中。徐有壬的著作多只给出计算方法，而对推导算法的过程及算法成立的根据则几乎无一语涉及。李善兰曾批评他"于术甚精，而其立法之原不以示人"。徐有壬自己亦以李说为然。很可能正是意识到自己著作在这方面的缺陷，他在论述三角函数对数造表法的《造各表简法》中，简单地叙述了他推导公式的过程。虽然其行文仍很简约，但可以看出，徐有壬主要是应用垛积术和招差术两种传统算法的成果进行公式推导的。徐有壬在三角函数幂级数展开式方面的主要贡献是给出正弦、正切、正割、正矢等四个函数的"八线互求"12 式，"大小八线互求"18 式及三角函数对数求法 6 式。

至 19 世纪中叶，各三角函数相对于弧长的幂级数展开式及三角函数间的互求公式已基本齐备。下面是李兆华先生给出的至 19 世纪中叶中国数学家所得到的三角函数幂级数展开式方面研究的统计表：

已知＼所求	α	$\sin\alpha$	$\tan\alpha$	$\sec\alpha$	$\mathrm{vers}\alpha$
α		杜德美	徐有壬	李善兰	杜德美
$\sin\alpha$	明安图		徐有壬	项名达	项名达
$\tan\alpha$	徐有壬	徐有壬		徐有壬	徐有壬
$\sec\alpha$	李善兰	徐有壬	徐有壬		徐有壬
$\mathrm{vers}\alpha$	明安图	徐有壬	徐有壬	徐有壬	

① 徐有壬．造各表简法序．造各表简法．务民义斋算学本．1a—b．

知＼求	$\sin\alpha$	$\sin\frac{\alpha}{n}$	$\tan\alpha$	$\tan\frac{\alpha}{n}$	$\sec\alpha$	$\sec\frac{\alpha}{n}$	$\mathrm{vers}\alpha$	$\mathrm{vers}\frac{\alpha}{n}$
$\sin\alpha$	董祐诚	董祐诚	徐有壬	徐有壬			徐有壬	徐有壬
$\tan\alpha$	徐有壬	徐有壬	徐有壬	徐有壬			徐有壬	徐有壬
$\sec\alpha$	徐有壬	徐有壬					徐有壬	徐有壬
$\mathrm{vers}\alpha$	徐有壬	徐有壬	徐有壬	徐有壬			董祐诚	董祐诚

从上表中不难看出，至18世纪中叶，中算家关于三角函数幂级数的研究已接近完备。当然，从三角函数幂级数展开式研究引发的对数的幂级数展开式研究以及受其影响而更为活跃的垛积术、尖锥术研究还方兴未艾。但如仅从三角学及与三角函数相关的课题的研究来看，中算家们急需开辟新的课题和方向。然而，历史并没有给中国数学家自己寻找三角学研究新课题的时间和环境，西方三角学的新知识被传进来了。

第五节　清代末年传入的三角学知识及中国数学家对三角函数概念的认识

一、《代数术》和《三角数理》中传入的三角函数知识

1873年，傅兰雅与华蘅芳合译的《代数术》中含有系统的三角学知识。在本书第三章中，我们已经介绍过，《代数术》主要是以第八版《大英百科全书》中华里司的《代数学》译出的。书中卷二十四至卷二十五专论三角函数。

《代数术》介绍的三角学内容主要是如何利用代数学方法计算三角问题。其第217款称：

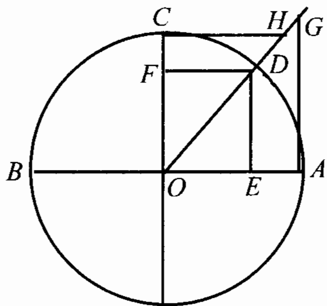
> 八线数理在解明各几何之题用处最广，可甚省。古时为几何格致。各题所专设之繁图，盖几何之理。若用近时所设之代数法解之，已可极其明白。即如哥斯（高斯，Gauss）所设平圆内作十七等边形之题，亦可不繁言而解。又如，用八线入代数，可将方程式之诸理廓充至最广，又如天文之家，可得甚简便之法，以推算各行星与慧星之动角，及所行之各道。

讲明利用代数法解决三角问题的优势。

《代数术》中介绍了两种三角函数概念。首先介绍的是与《大测》中一样的是线段的概念。在将各三角函数的线段概念讲明之后，在第229款中，又介绍了三角函数的比例概念。书中称：

> 弧之弦矢切割，亦为角之弦矢切割。又因弦矢切割四正四余之八种线各有比例，故可任取各线之名，以代其各数之相比。而以分数明之。

也就是说，由于八种三角函数之间存在着比例关系，所以可以以其间的比例表示各三角函数。翻译成图中的记号，《代数术》中给出的分数表达的三角函数为：对于弧 AD，



如$\frac{AD}{OA}$为其度数，$\frac{DE}{OD}$为其正弦，$\frac{FD}{OD}$为其余弦，$\frac{AG}{OD}$为其正切，$\frac{OH}{OA}$为其正割，所以，余切为$\frac{OD}{AG}$，余割为$\frac{OA}{OH}$。这与我们现在常用的三角函数定义已无区别。紧随着这些新的定义形式，《代数术》中给出以分数形式表示的三角函数的优势，“可见，各式相比与各线之相比同，以可见同式相比之理。如其……角之大小不变，则其正、余之弦、矢、切、割八种线，准本款之理，无论平圆之大小如何，其理无异”。而“用代数以究八线几何之理，其初大半恃所设之各式”①，即，利用比例定义，三角函数的值便可以不受圆半径大小的影响。代数方法研究的主要是以分数形式定义的三角函数。《代数术》第二十四章的主要内容就是以代数方法推演各三角学公式及三角函数幂级数展开式。

《代数术》除引入三角函数的代数法表示法、以代数法推演三角函数公式的方法，以及以比例形式定义的三角函数法之外，还将三角函数的概念推广至全象限。在此之前，引入中国的三角学知识及中算家的研究主要是集中在第一象限的，这样也就不涉及三角函数的符号问题。《代数术》中以不同象限中八线方向相反为理由，引入正、负号作为标记②。在《代数术》卷二十五中，依据该书前面所讨论的负数开方及虚数问题等相关内容对三角学

---

① 华里斯著.代数术.傅兰雅，华蘅芳译.1889年刊本.卷24.9a—b.

② 华里斯著.代数术.傅兰雅，华蘅芳译.1889年刊本.卷24.7a—b.

进行理论性探讨，介绍了棣模根公式：

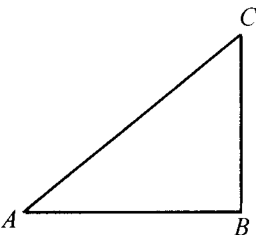
$$\text{con}nA \pm i\sin nA = (\cos A \pm i\sin A)^n$$

书中还以代数方法介绍了其他一些三角学公式及三角函数幂级数展开式。

1877年，傅兰雅又与华蘅芳合译了《三角数理》，该书底本为海麻士（J. Hymers，1803—1887）于1863年出版的《平面和球面三角》（*Treatise on Plane and Spherical Trigonometry*）。《三角数理》共12卷。卷一，"论三角法中比例数之理，以数明线与角之几何"，专门介绍三角函数的定义、理论及利用三角函数表达线段长短和角度大小的方法。卷二，"论两角或多角之各比例数"，即两角或多角和、差的三角函数。卷三，"论造三角比例表之法"，介绍三角函数造表法，实际上，也即是三角函数的求法。卷四，"论平三角形之各种解法"，即解平三角形方法。卷五，"论各角之比例数乘约变化之理"。卷六，"专论对数"。卷七—卷八为三角学习题及解。卷九—卷十二讨论球面三角学。

《三角数理》中给出了完全脱离圆的三角函数概念：

> 无论何角，若从其为界之两条直线上任取一点，自点作线，与彼线为垂线，或与彼线引长之线为垂线，则能成直三角形。有界说三：对正角之边与对本角之边比为斜/高，是谓本角之正弦；本角所倚之底边与本角所对之边比为底/高，是谓本角之正切，本角所倚之底边与对正角之边比为底/斜，是谓本角之正割。①



在上述引文中，有两点需要说明，第一，绝大多数清末译书及著作都是沿用李之藻译《同文算旨》时的分数记法，即，分母在上，分子在下。所以，引文中所谓的斜/高，实际上应为高/斜。第二所谓的正角，即是直角。这样，上文所给出的定义便可解释为：对于任意角，从其两边上任一边取一点，向另一边作垂线，便构成一直角三角形。则对边比斜边（即直角所对的边）为正弦，底边（即邻边）比对边为正切；斜边比底边的比为正割。即在上图中，

$$\sin A = \frac{BC}{AC}, \tan A = \frac{BC}{AB}, \sec A = \frac{AC}{AB}$$

此外，《三角数理》中又以余角的正斜、正切、正割定义了角的余弦、余

① 海麻士辑．三角数理．华蘅芳，傅兰雅译．江南制造局刊本．1877．8a—b.

切、余割,并给出其表达式分别为:

$$\cos A = \frac{AB}{AC}, \mathrm{ctg} A = \frac{AB}{BC}, c\sec A = \frac{AC}{BC}$$

书中正矢和余矢的概念是以正矢为一减余弦,余矢为一加余弦给出的。

《三角数理》中也是以代数方法推演三角函数公式的。书中内容与《代数术》大致相同,但作为一部三角学专著,该书显得更为具体亦更有系统。

如果仅从内容上来讲,《代数术》和《三角数理》中与三角函数相关的内容多已为中国数学家所已知或已涉及。两书中最重要的是引入了利用符号代数处理三角学问题的方法。如前章所述,清代末年,代数学方法一经传入便得到了李善兰、华蘅芳等数学家的充分重视,并在清代末年逐步取代传统的天元、四元术而成功地在中国立足。但以代数学方法取代几何方法的符号代数式的三角函数研究是否也能立即得到中国数学家的认同呢? 下面,我们就来看一下中国数学家在这方面的反应。

二、清末数学家对三角函数概念的认识

读者也许会奇怪,为什么上文我们没有详细了解《代数术》和《三角数理》中与三角函数相关的内容,而一再强调《代数术》和《三角数理》中对三角函数概念的介绍。同时,受过现代数学训练的读者更会觉得,以比例数来定义三角函数的概念可以给出函数确定的数值,以其计算非常方便,而明末介绍的以线段表示三角函数的定义则显得要复杂得多,且以弧度而非角度来定义三角函数,使得三角函数的值依赖于弧度所属于的圆的半径,造成了其数值的不确定性。实际上,明末清初出版的三角函数表都要注明半径的长度。所以,新的三角函数概念的优势是一目了然的,自然应该得到中国数学家们的欢迎。然而,数学发展及传播的历程绝不是直线性的先进成果的累积,一种新的更为优越的数学方法有时要经过长时间的反复比较和争论才能取代旧的方法。从清末中国数学家们对三角函数概念的理解,我们也可以约略看到这样的情况。

同文馆《算学课艺》为京师同文馆数学学生的课艺集,是由同文馆副教习,也是同文馆学生的贵荣、席淦编辑,由同文馆算学教习李善兰阅订的,从书中的内容及所用到的数学方法我们可以推测出李善兰教学内容之大概。

同文馆《算学课艺》卷二的第 10、11 两题与三角函数有关。题目为“有大小二弧之正弦、余弦,求其和弧较弧之正弦、余弦”及“有大小二弧之正切,

求大小较弧之正切”。二题均是求三角函数的和、较的算题。值得注意的是,题中均称“弧”的正弦、余弦及正切,从题目即可以看出,李善兰讲授的三角函数还是早期的以弧度定名的概念。书中收入了同文馆副教习贵荣和席淦的课艺。二人均将三角函数作为线段,通过作几何辅助图形完成了公式的推导和证明。

1895年,即李善兰去世13年后,京师同文馆大考题中有如下两道试题:

> 一、大、小二弧,其和、较二正弦之和乘半径之半,等于大弧正弦小弧余弦相乘积,试解之。
>
> 一、大小二弧,二正弦相乘,二余弦相乘,二积相加,以半径除之,得较弧余弦,试解之。①

上述两问题以现代数学符号表示即为,求证公式:

$$r[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]=\sin\alpha\cos\beta$$

$$(\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta)/r=\cos(\alpha-\beta)$$

很明显,这两个公式只有在三角函数是以线段为定义的情况下才能够成立。

同样,《简易庵算稿》所录求志书院1898年夏季考题的第1、2题分别为:

> 半余割内减倍正弦等于半径,问正弦角度。
>
> 今有两弧,其一正余弦相加等于圆径,其一正余切相减等于圆径,问两弧角度各几何②

译成现代表述法,上述两题分别为已知$\frac{\csc\alpha}{2}-2\sin\alpha=r$,求$\sin\alpha$;有两段弧$\alpha$和$\beta$,$\sin\alpha+\cos\alpha=r$,$\tan\beta-\cot\beta=r$,求$\alpha,\beta$。这两个问题也只有在正弦、正割、正切和余切均为线段的时候才能成立。与李善兰不同的是,虽然刘彝程仍然以线段来定义三角函数,但他的解答中主要是以符号代数法推算的。

是什么原因使得李善兰在以符号代数处理三角学问题的方法传入中国之后仍坚持使用更为繁琐的几何方法来解决三角函数问题,而刘彝程亦一直将三角函数视为线段呢?首先我们可以肯定,他们并不是不了解以代数法推导三角函数公式的方法或三角函数的比例概念。李善兰虽然没有翻译

---

① “同文馆大考试题”,引自:朱有瓛主编. 中国近代学制史料.

② 刘彝程. 戊戌夏一题. 简易庵算稿. 卷4.

过三角学方面的书籍，但他曾译过《代数学》和《代微积拾级》，所以，他对代数方法有很深的理解，他应该会对华蘅芳翻译的《代数术》及《三角数理》有所了解。而刘彝程本人就是《代数术》和《三角数理》的校算。华蘅芳曾坦陈其所译书中原本算式错误甚多，刘彝程对它们做过大量的校改。所以，刘彝程不可能不清楚地知道三角函数的比例定义法。那么，是否他们是因为反对西方数学而拒绝使用符号代数方法呢？不可否认，以线段定义三角函数，确实使得西方的三角学和中国传统的垛积术、勾股术及割圆术等紧密地联系了起来。上文我们已经看到中国数学家是如何将这些方法用于三角函数公式及幂级数展开式的推导过程之中的。但是，李善兰和刘彝程均不会为了维护传统数学方法而拒绝承认西方代数学的优越性。早在《代微积拾级》和《代数学》被译成之时，李善兰曾对代数学方法大加赞扬，在他任同文馆算学教习时，曾令学生以代数法演《测圆海镜》和《四元玉鉴》中的算题。同文馆《算学课艺》中即录有以代数法解天元术、四元术问题的多篇课艺。李氏自称，《测圆海镜》为对其早年影响最大的一部算书。既然他鼓励其学生以符号代数重新阐释《测圆海镜》中的数学问题，则他不可能为了拒绝西方方法而不令学生以符号代数解决从西方传入的三角学问题。刘彝程的情况也是一样。至1890年，他给出垛积术的代数学表达式，正是在他和他的学生们的手中，中国传统数学的最后堡垒——垛积术被代数化了。所以，同样，刘彝程也不是一个为了维护传统数学的地位而无视数学内容的人。

除上述两种理由外。李善兰和刘彝程也有可能是为了维护他们自己成就的地位而拒绝接受以比例为定义的三角函数概念。前文已述，李善兰在三角函数幂级数展开式研究方面做出过一些贡献，并以对幂级数展开式的研究为起点发展出尖锥术。一旦接受了新的三角函数概念，李善兰以前的工作便显得过时而没有意义。刘彝程也面临着同样的问题。①刘彝程早年学过数学，但他真正的数学研究工作也是以三角函数的幂级数展开式起步的。1864年，刘彝程随侍其父赴任广东，途中于长沙结识了著名数学家丁取忠，并读到董祐诚、项名达、徐有壬、戴煦等人的著作，“惊为得未曾有”。前文已述，董、项、徐、戴均在三角函数幂级数展开式研究上取得了突出的成果，刘彝程不数年即撰著《割圆阐率》（一卷）、《开方阐率》、《对数问答》（一

---

① 李恭简修．魏俊，任乃庚撰．刘彝程传．续修兴化县志．1943年铅印本．

卷)”。[①]其《割圆阐率》即与三角函数幂级数展开式有关。则他所“惊为得未曾有”的必定是前四人在此方面的著作。与李善兰一样,接受新的三角函数概念,便意味着对他以前工作价值的否定。所以,他们二人都有可能为了维持自己著作的价值而拒绝接受新的三角函数概念。然而,这个理由似是而实非。同文馆《算学课艺》中所收录的四元术类课艺多是以符号代数为解法的。李善兰并不介意他的学生放弃他在《四元解》中所创的四元术方法。可见,他并无意过分维护他自己著作的价值。刘彝程最出色的成果是在整数勾股形和垛积术两个方面,但他整数勾股形中的很多问题即是以符号代数入算的,且他在给出其最出色的垛积成果后主动引入垛积公式的符号代数表达式,也证明他并不担心由于符号代数方法的引入使得他以前的工作失去价值。所以,这个理由也是不成立的。

那么,究竟是什么原因使得当时中国最出色的数学家中的两位对新的三角函数概念的优越性视而不见,或拒绝采纳的呢?刘彝程对中、西数学评价的一段话很可能是解开这个谜团的钥匙。刘彝程曾在《简易庵算稿》跋中称:

> 夫泥于中法者,恒纠缠文字,论说则不简明,泥于代数者,恒展卷即演算式,绝不穷其源委。余力矫此,务溯源于撰题本旨,揭以示人[②]。

刘彝程认为代数法的算式不能阐述算题的原委,而其原委即是他所给出的算题的内在理论。《代数术》中曾明确给出过三角函数的线段定义,然后称将这些名称指于比例式,这句话使得中国数学家们很容易理解为三角函数的本质含义还是线段,只是为了符号代数推导的方便才别命其为比例式。通过几何方法作图,我们可以确实看到各个概念的几何意义及各公式的几何含义,从而,便可以明白问题的“源委”。所以,刘彝程虽然可以接受以符号代数法推导三角函数公式,但确还要保留住三角函数的线段概念,以利于他解说其算题的内在算理。这很可能正是李善兰和刘彝程不肯接受抽象化的符号代数式的三角函数新概念的理由。实际上,在西方符号代数刚刚兴起之时,围绕着是否要用无意义的符号代替具有几何意义的量,当时最出色的数学家和哲学家们也存在着严重的分歧。所以,李善兰和刘彝程有这样

① 刘彝程. 简易庵算稿序. 简易庵算稿. 江南制造局刊本. 1900.
② 刘彝程. 简易庵算稿跋. 简易庵算稿. 江南制造局刊本. 1900.

的疑惑是完全可以理解的。

李善兰和刘彝程的态度很自然地会对他们的学生们有所影响。前面我们提到,在李善兰去世13年后,京师同文馆的算题中出现的三角函数还是线段的概念。李善兰的得意弟子席淦于清末完成了一部《弧矢启秘图解》,书中借助繁复的图形以割圆术证明了多组三角八线公式。①李善兰的另一个学生萧开泰在《游艺课草初集》(1897)中取半径为一千万计算三角函数值。②作为继任的京师同文馆算学教习及陕西游艺学塾的数学教师,席淦和萧开泰又会影响到他们的学生。

然而,当时的中国数学家并不全都拒绝新的三角函数概念。广方言馆《算学课艺》中即含有以线段和比例两种方法定义的三角函数的课艺。

广方言馆《算学课艺》第3题为:"三角形三角为角、亢、氐,其三正切连乘等于三正切相加,试证其理。"书中辑入了李鸿杭的课艺。

我们以 A、B、C 表示题中的三个角;以 x,y,z 表示天元、地元和人元;以 tan,sin 和 cos 符号取代当时常用的符号正切、正弦、余弦,便可以将书中给出的课艺严格地翻译成如下形式:

令 $\tan A = x, \tan B = y, \tan C = z$

准《代数术》中的公式③:

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$$

得 $\tan(A+B)=\dfrac{x+y}{1-xy}$,

令, $A+B=A', B=C$,

则 $\tan(A'+C)=\dfrac{\tan A'+\tan C}{1-\tan A'\tan C}$

由此得 $\tan(A+B+C)=\dfrac{\tan(A+B)+z}{1-\tan(A+B)z}=\dfrac{\dfrac{x+y}{1-xy}+z}{1-\dfrac{x+y}{1-xy}z}$

又, $=\dfrac{\dfrac{x+y+(1-xy)z}{1-xy}}{\dfrac{1-xy-(x+y)z}{1-xy}}=\dfrac{x+y+z-xyz}{1-xy-xz-yz}$

① 席淦. 弧矢启秘图解. 古今算学丛书.

② 萧开泰辑. 游艺课草初集. 1898年刊本.

③ 此为引用《代数术》中的定理。

因为 $A+B+C=180^{\circ}$　$\tan=\frac{\sin}{\cos}$

而 $\cos180^{\circ}=-1, \sin180^{\circ}=0$

所以，$\tan(A+B+C)=\frac{0}{-1}=0$

可知，$\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-xz-yz}=0$

即，$x+y+z-xyz=0$

即，$x+y+z=xyz$①

在上题的解题过程中用到的三角函数概念显然是以比例数定义的，否则，题中引用的《代数术》中的三角函数定理便不能成立。

然而，有趣的是，同样在《广方言馆算学课艺》中，李鸿杭也曾利用三角函数的线段定义解题。《广方言馆算学课艺》第6题为："三十度余弦与正割比若三与四比，三十六度余弦与正割比若五之平方根加三与八比，试证之。"②

李鸿杭给出该题前半部分的解为：

> 草曰：依题前半别得六十度通弦为六等边形之一边，等于半径。半之为三十度正弦，因八线表半径为一，则二除一为三十度正弦，因半径幂内减正弦幂为余弦幂③……

其意为，六十度的通弦为圆内接正六边形的边长，等于半径。半之为三十度的正弦。由于三角函数表中取半径为1，则三十度的正弦为1/2。由于半径平方内减去正弦平方为余弦平方，所以，

$$\cos^{2}30^{\circ}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

所以 $\cos30^{\circ}=\sqrt{\frac{3}{4}}$，　　因为 $\csc=\frac{1}{\cos}$ 则 $\mathrm{ccs}30^{\circ}=\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}$

比例：$\cos30^{\circ}:\mathrm{scs}30^{\circ}=\sqrt{\frac{3}{4}}:\frac{1}{\sqrt{3/4}}$

三、四率各以$\sqrt{3/4}$乘之，

得 $\cos30^{\circ}:\mathrm{scs}30^{\circ}=\frac{3}{4}:1$

---

① 沈善蒸辑.广方言馆算学课艺.上海：上海著易堂书局刊本.3a—b.

② 沈善蒸辑.广方言馆算学课艺.上海：上海著易堂书局刊本.5a.

③ 沈善蒸辑.广方言馆算学课艺.上海：上海著易堂书局刊本.5a.

显然,在上题中,虽然因为半径值被取成1,使得半径符号没有在解题过程中出现,但题中的三角函数是线段的概念。①

我们知道,刘彝程长期任广方言馆的算学教习。李鸿杭应该是刘彝程的学生。依照刘彝程的《简易庵算稿》,我们可以肯定刘彝程自己并不使用比例式的三角函数定义。然而,《代数术》是由江南制造局译成出版的,必会成为坐落于局内的广方言馆的参考书。这样,李鸿杭熟读该书并能熟练引用其中的定理和概念便不足为奇。从李鸿杭对两个三角学算题选用不同的三角函数定义系统,而沈善蒸又将这两篇课艺同时选入《广方言馆算学课艺》,我们可以看出,清代末年,两种三角函数概念是杂用的。

1898,曹汝英、潘应祺辑成《算学杂识》一书,书中卷四为"平弧三角"(此部分为曹汝英撰),从其中所用之三角公式可以看出该书中的三角函数均是以比例定义的。②支宝枬《上虞算学堂课艺》中之设题及三角公式亦为比例概念,他还应用了完全脱离单位圆的三角函数概念。华世芳主讲龙城书院时,选用《三角数理》为参考书,《龙城书院课艺》中出现正切天 + 正切地 = 1 - 正切天正切地,即 $\tan\alpha + \tan\beta = 1 - \tan\alpha\tan\beta$, $\mathrm{th}\alpha + \mathrm{th}\beta = 1 - \mathrm{th}\alpha\,\mathrm{th}\beta$ 等三角函数公式③。这两个公式只有在正切函数为比例的情况下才有意义。可见清代末年中国数学家对三角函数概念的认识上已有了变化。④

宣统元年,潘慎文辑译《八线备旨》一书,其中于第三至八款介绍八线概念(半径用一),又于第十三款介绍八线比例概念。此后书中以八线比例入算。⑤

戊戌变法之后,各地兴起大小学堂,很多学堂选用登州文会馆翻译的各类数学书籍作为教科书。《八线备旨》中介绍的比例概念便随着该书成为三角学教育的通用教材得到普遍接受。20世纪初,大批数学教科书由日文,进而由英文或德文、法文等译成中文。这些书籍中的三角函数均是以比例数定义的,并采用符号代数方法进行计算与证明。以线段定义的三角函数概念、与之相联的几何系统的三角函数公式的证明方法及与之相关的传统割圆术、垛积术等亦渐渐淡出人们的记忆。

---

① 为了说明问题,本节中我们只给出该题前半部的证明。

② 曹汝英,潘应祺.算学杂识.卷4.1898年广州刊本.

③ 华世芳辑.龙城书院课艺.1901年刊本.

④ 支宝枬辑.上虞算学堂课艺.1901年刊本.

⑤ 罗密士撰.八线备旨.潘慎文,谢洪赉译.美华书馆铅印本.

综上所述，三角函数是纯粹的西方数学内容。虽然与之相关的某些内容曾从印度传入中国，但在当时并未引起中国数学家的特别关注，亦未对中国数学和天文学的发展起到很大的影响。明代末年，耶稣会士们将三角函数作为天文学中的基本数学计算方法传入中国。西方早期以线段定义三角函数，邓玉函、罗雅谷等传入的三角函数正是这种以线段为定义的概念。由于明末清初传入的三角学知识是依附于天文历法的制订及测量的，所以引入的内容本身并不系统完备。中国数学家王锡阐、梅文鼎等在此基础上进行了系统的论述及进一步研究。一般来说，三角函数的定义和计算通常依赖于直角三角形的性质，以线段为定义的三角函数的求法亦与传统割圆术有相似之处。中算家很容易在三角函数与中国传统数学方法间建立起联系。梅文鼎的"几何即勾股"的论断正是在根据这样的中、西数学的相关性建立起来的。但从总体上来说，当时的中算家们是依据欧几里得几何式的证明模式研究三角函数的。

清代中叶，中算家对三角函数的研究主要集中在三角函数幂级数展开式方面。与前期传入的关于三角函数的概念和性质的知识的论述方式不同，传教士并没有给出幂级数展开式证明的示例，而受西方数学注重严谨性证明及乾嘉学派考证方法的影响，当时的中算家不能接受未加证明的西方的知识。所以，他们自己尝试着寻找方法证明传入的三角函数幂级数展开式、阐述其理论基础及推导新的公式。在这方面，钦天监学习和工作的明安图采取了欧几里得式的证明方式并借鉴西方割圆方法给出他对传入的幂级数公式及其自创的公式的证明。他的著述中所含的 9 个幂级数展开式公式虽然很快流传开来，但他的证明发表得很晚。民间的学者数学家们找出另一种途径和方法解释和证明这些公式。董祐诚通过观察和归纳将三角函数幂级数展开式的研究与传统垛积术联系起来。董祐诚选择这样的研究方法自然与其熟悉当时已被重新整理和理解的传统数学方法有关。所谓函数幂级数本质上是利用无穷级数的线性表达式来表述三角函数和其他非线性函数的方法，在传统数学中，垛积术是专门研究级数求和问题的一个分支，且其递加的性质正可与三角函数幂级数的计算建立起对应关系。此后，利用垛积术研究幂级数展开式成为当时的主要方法。

1873 年，三角函数的比例概念及利用符号代数研究三角函数的方法被系统地介绍到中国。李善兰、刘彝程等数学家并未立即接受新的三角函数

概念,他们依然利用八线的概念阐述三角函数,但刘彝程已经开始利用符号代数法推导三角公式了。受他们的影响,他们的一些学生亦仍继续沿用三角函数的线段概念,并以割圆方法求三角函数或证明三角公式。但也有一些数学家完全接受了新传入的三角函数概念及符号代数的计算和证明方法。当时已出现了两种函数概念混用的情况,且三角函数的比例概念逐渐取代了线段概念,到20世纪初,很少有人再以传统割圆术、垛积术研究三角函数了。

总而言之,三角函数及三角函数幂级数展开式传入之后,中国数学家们为了理解和证明这些内容,将传统数学中的成果与这一西方的数学方法结合起来,取得了一定的研究成果。至清代末年,随着近代三角学的系统传入,中国传统数学的研究方法和内容逐渐从三角函数的研究中被剥离出来,三角学研究恢复了其纯粹西方数学知识的面目。

第七章　中国传统数学分支的西化历程——清代垛积术的演变

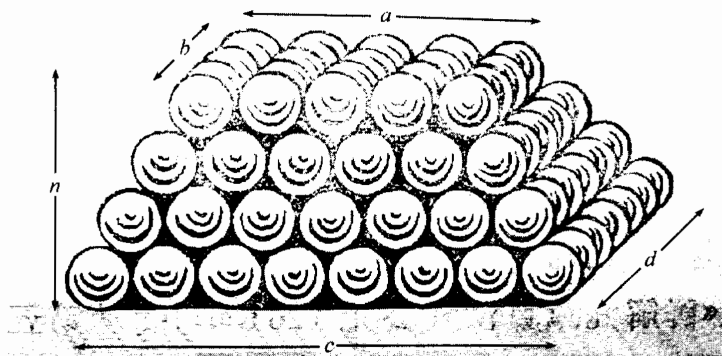
垛积术是中国传统数学中成就颇丰的一个研究领域。16世纪以后，从总体上来说，中国数学已远远落后于欧洲数学，垛积术可能是惟一的在此后取得领先于世界成果的中国传统数学分支。关于清代垛积术的成果和方法，已有多篇文章做过详细的分析与论述。本章主要关注这一分支被西方数学取代的过程。

第一节　17世纪以前垛积术发展概述

从现代数学分类来看，中国传统垛积术的研究内容属于高阶有限级数求和问题，其中许多成果可以被表述为组合公式。

从现存史料分析，垛积术始于北宋沈括的隙积术。11世纪，沈括(1031—1095)在《梦溪笔谈》卷十八中给出他自创的“隙积术”。沈括称“算术求积尺之法，如刍萌、刍童、方池、冥谷、堑堵、鳖臑、圆锥，阳马之类，物形备矣。独未有隙积一术……隙积者，谓积之有隙者。如累棋、层坛、酒家积罂之类。虽侣(似)覆斗，四面皆杀，缘有刻缺及虚隙之处，用刍童法求之常失于数少。予思而得之，用刍童法为上行，下行别列下广，以上广减之，余者以高乘之，六而一，并入上行。”[①] 解决下页图所示形状的立体的求积问题是沈括发明隙积术的主要目的。沈括意识到解决隙积问题不能完全套用实体体积计算公式，经过思考，他得到了求解这类问题的计算方法。用现代语言和符号表述，沈括的成果相当于下述公式：设一个长方台形垛的顶层宽为 a 个物体，长为 b 个物体，底层为 c 个物体，长为 d 个物体，高为 n 层。则物体的总个数应该为

① 沈括.梦溪笔谈.1631年马元调刊本.卷18.2b—3b.



隙积图，引自：钱宝琮《数学史研究》

$$v=\frac{n}{6}[(2b+d)a+(2d+b)c]+\frac{n}{6}(c-a)$$①

从沈括的叙述中我们知道，他的"隙积术"公式是在《九章算术》中的"刍童"术，即上、下底面都是长方形的棱台体体积的计算式中加入$\frac{n}{6}(c-a)$一项而成。对于他加入该项的理由，沈括只是简单地说：因为这样的立体"有刻缺及虚隙之处"，并没有做详细的说明。通过观察和归纳可以得出沈括的隙积术公式。这种通过改造已知连续型立体的体积公式，解决求离散性立体体积问题的方法，在北宋著名数学家杨辉那里得到了进一步发展。

13世纪下半叶，杨辉在他的《详解九章算法》(1261)商功章方堡壔、方亭、方锥、堑堵、阳马等立体问题之后，分别以比类的方法得出相应的8个垛积计算公式②。举例来说，对于方锥问题及与其比类的果子垛，杨辉是如下叙述的：

> 今有方锥，下方二丈七尺，高二丈九尺，问积几何？
>
> 答曰：七千四十七尺。
>
> 术曰：下方自乘，以高乘之，三而一。
>
> ……

---

① 《九章算术》中的刍童公式相当于：$V=\frac{1}{6}[(2b+d)a+(2d+b)c]h$，取 h 为 n，加上沈括所给出的后一部分，便可得到此公式。

② 杨辉.详解九章算法，宜稼堂丛书本.70—78.



解题：形如餅斛，比四隅垛①。

比类：果子一垛，下方一十四个，问计几何？答曰，一千一十五个。术曰，下方加一乘下方为平积，又加半为高，以乘下方为高积。如三而一。②

《详解九章算法》中的方锥与现代意义的方锥完全一致。其体积公式为

$$V = \frac{1}{3} a^2 h$$

《九章算术》中已给出过此公式，杨辉于比类给出的是一种成方锥形的果子垛的求积方法，杨辉得出的体积计算公式为：

$$V = \frac{1}{3}(a+1)(a+\frac{1}{2})a$$

杨辉并没有对该公式的由来给出任何解释。只是在刍童术比类的果垛公式后解释曰："果子乃是圆物，与方积不同，故增入此段。"③即，刍童形果子垛公式与刍童体积公式之所以不同是因为果子为圆物，所以要再加入一项。当然，方锥形果子垛与方锥体积求积公式的差异也是由这一原因造成的。但像沈括一样，他也没有解释两个公式之间何以会有他所给定的差别。

1303 年出版的朱世杰所著的《四元玉鉴》中也包含一些由已知体积公式推衍出来的垛积公式。诸如，该书《果垛叠藏》第 7 题讨论圆锥垛的求积，第 10 题和第 11 题分别为刍童垛和刍甍垛的求积问题等。④朱世杰没有描述他所讨论的垛积的形状及其垛积运算方法的推导过程。书中相关问题几乎都是直接设未知数以天元术计算的。《四元玉鉴》中引起数学史家重视的是朱世杰构造的垛积系统。举例来说，《四元玉鉴》中有下列两种垛名：

茭草垛、茭草落一形垛（亦称三角垛）、三角落一形垛（亦称撒星形垛）、撒星更落一形垛（或称三角撒星垛）、三角撒星更落一形垛；

四角垛、四角落一形垛……

这些名称显然是互相关联且成系统的。朱世杰的三角垛系相当于下述级数：

---

① 餅，古同饭．

② 杨辉．详解九章算法．73b—74a．

③ 杨辉．详解九章算法．78b．

④ 朱世杰．四元玉鉴．卷中．1a—9a．

$$1, p+1, \frac{2(r+1)}{2}, \cdots, \frac{r(r+1)\cdots(r+p-1)}{p!}, \cdots$$

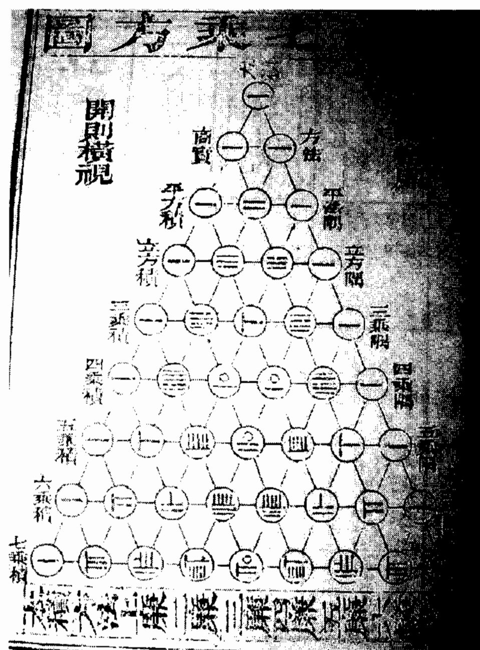
当 p 等于 1 时，该级数是朱世杰所称的茭草垛，当 p 等于 2 时，相当于茭草落一形垛，当 p 等于 3 时，为朱世杰的三角落一形垛，同样，当 p 等于 4 时，该级数与朱世杰的撒星更落一形垛一致，当 p 等于 5 时，该级数便化为朱世杰的三角撒星更落一形垛。数学史上将这个垛系称为三角垛系。本章中，我们也将使用这个术语。

朱世杰的四角垛实际上是前述杨辉的方锥比类果子垛，即相当于求通项为 r^2 的有限和。四角落一形垛相当于求通项 $\frac{1}{3}r(r+1)(2r+1)$ 的有限级数的和。这两个垛都属通项为

$$\frac{r(r+1)\cdots(r+p-2)(2r+p-1)}{p!}$$

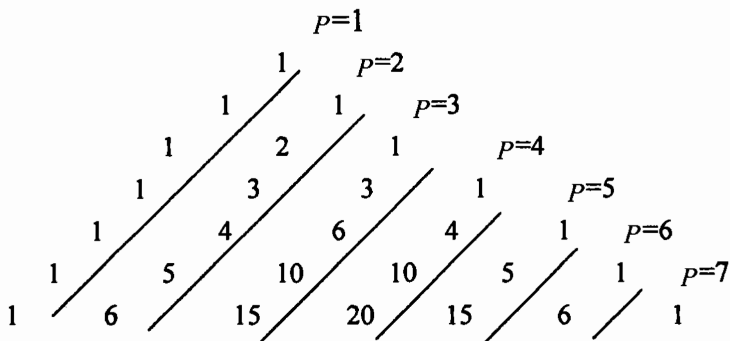


开方作法本原图，采自《永乐大典》



古法七乘方图，采自《四元玉鉴》

的级数系列。除上述两组垛系之外,朱世杰还研究了三角垛和四角垛的反垛及岚峰形垛等变垛系列。史学界公认朱世杰的垛系与贾宪三角形有关。在第五章中,我们已经介绍过,贾宪三角形原名为“开方作法本原图”,本是贾宪为“立乘释锁开方法”绘制的算表。朱世杰《四元玉鉴》中的“贾宪三角形”比杨辉《详解九章算法》中的原图多了一些斜线。正是这些斜线,构成了朱世杰的三角垛系统。



上图第 p 行斜线上的数列,恰好对应第 p 个三角形垛各层的数目,且 p 条斜线上前 m 个数字之和正是 $p+1$ 条斜线上的第 m 个数①。

朱世杰对诸垛系求积公式的推导方法没有给出详细的解释。实际上,《四元玉鉴》的全书均非常简略,我们以该书下卷《果垛叠藏》门第 6 题为例看一下朱世杰的叙述方式:

> 今有三角撒星更落一形果子积九百二十四个,问底子几何?
>
> 答曰:七个。
>
> 术曰:立一元一为三角撒星更落一底子,如积求之,得六十六万五千二百八十为益实,一百二十为从方,二百七十四为从上廉,二百二十五为从二廉,八十五为从三廉,一十五为从四廉,一为正隅,五乘方开之,合问。②

从上题中,除可以确知朱世杰是以天元术解决垛积问题这一点之外,我们几乎得不到其他信息。不过,从其间设数逆推原方程式的形式,我们可以判

---

① 朱世杰.四元玉鉴.

② 朱世杰.四元玉鉴.卷下.2b—3a.

定，朱世杰给出的前五个三角垛及四角垛的运算方法都是正确的。以此为根据，我们认为朱世杰已经得到了三角垛求和的一般公式：

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{r(r+1)\cdots(r+p-1)}{p!} = \frac{n(n1+)\cdots(n+p-1)}{(p+1)!}$$

即便如此，我们对朱世杰是以什么样的方法得到这些公式的，还是一无所知。但无论如何，朱世杰垛积研究在数学史上的意义则是公认的，借助于宋元时期已发展完备的天元术，朱世杰可以脱离垛积的具体几何形状讨论其求积问题，利用一个数字图形直接考察高阶等差级数之间的数量关系。三阶以上的等差级数没有可与之比类的几何图形，所以，只有脱离沈括—杨辉的利用实体几何图形的体积推导垛积公式的方法，垛积研究才能得到进一步的深入。同时，相较于沈括—杨辉的方法，朱世杰的垛积术更为纯粹化和抽象化。

朱世杰还讨论了多个垛逐层求和所得的新垛的求积问题。其所有研究课题均在清末由李善兰的《垛积比类》和刘彝程的《简易庵算稿》中得到继承和发展。此外，《四元玉鉴》中，朱世杰还将垛积成果应用于招差术，得到了正确的高次招差公式。招差术在历法计算中有很重要的应用。清代梅文鼎在《授时平立定三差详说》中以堆垛术阐释招差法的原理。刘彝程在他的《简易庵算稿》中收入了一些与朱世杰招差问题类似的算题。本章主要关注垛积术的流传、发展及西化的情况，故不再讨论与招差相关的内容。①

沈括—杨辉方法和朱世杰对以贾宪三角形为基础构建的垛系的研究代表了中国垛积术的两种研究方法。傅大为认为，这两种垛积方法分别继承了《九章算术》的商功章和少广章的传统。②

14世纪之后，虽然有一些数学著作中包含垛积内容，如王文素的《算学宝鉴》(1524)③、程大位的《算法统宗》(1592)等④，但从研究成果上来讲，这些著作中很少有新的进展。⑤ 明代数学家主要是重复了杨辉的一些公式，朱

---

① 关于梅文鼎的《授时平立定三差详说》的内容，见：李俨．中算家的级数论．中算史论丛．3．360—361．

② 傅大为．中算史垛积源流新论——“商功”与“少广”两条线索的演化．异时空里的知识追逐．69—113．

③ 王文素．算学宝鉴．稿本．

④ 程大位．算法统宗．1716年刊本．

⑤ 关于中国数学家在垛积术方面的成就及其方法，参见：钱宝琮．中国数学史．187—205，327—329；杜石然．朱世杰研究；李兆华．中国数学史．131—133，158—159，181—190，316—324．

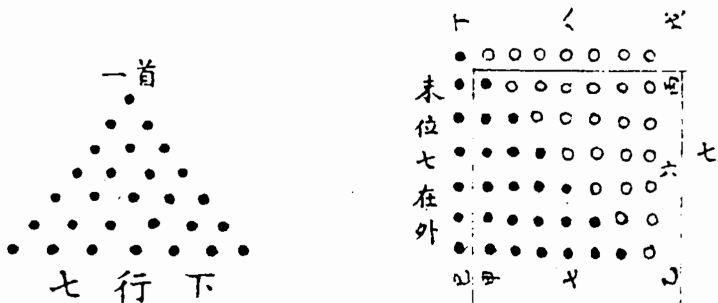
世杰的垛积方法则没有被提到。

第二节　沈括—杨辉方法在 17 世纪的发展情况

清代初年，具体来说，在 17 世纪中叶，方中通（1633—1698）在《数度衍》（1661）中收入了多个级数求和公式。其递加求积法相当于求以 1 为公差的自然数列的有限和，也即，$\sum_{i=1}^{n} i$ 的公式。对于该题，方中通给出如下叙述：

> 顺加求积法：
>
> 式下行阔十五，问总积几何？曰：一百二十。术取最下二位，十四、十五，相乘，得二百一十，半之，得一百〇五。即十四以至首位一之积也。再并末位十五，得一百二十，为总积。又术，以末位十五，与下位十六相乘，得二百四十，半之，得一百二十，亦合。

为了解释他的方法，方中通给出如下图形：



顺加求积图，引自：《四库全书·数度衍》

借助上图，方中通为他的方法做出如下解释：

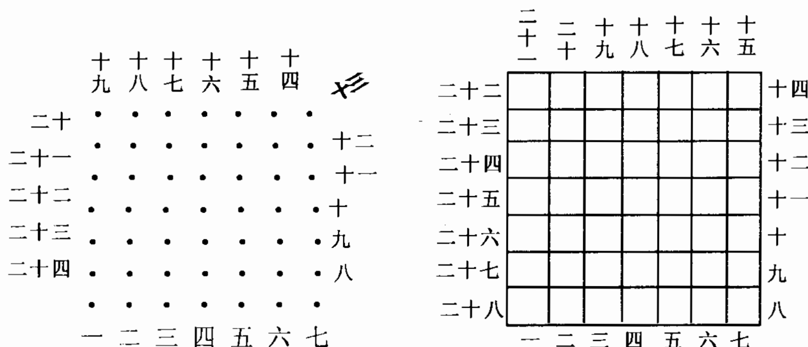
> 通曰：相乘得其倍数者，变三角为四角也。半之，则仍还三角矣。如末位系七，以六七相乘，则末位七在外，成甲乙丙方形，折半，止得六位之积，以末位七与下位八相乘，则末位七在内成丁戊己方形，折半，故得七位之积也。①

从现代数学观念来看，上述引文不能算作一个证明。但是，至少它清楚地告

① 方中通．数度衍．11．4a—5a．

诉我们方中通得到递加求积公式的过程。从严格意义上来讲，方中通的工作也许并不确定是属于垛积术范畴，因为他所关注的是递加数列的有限求和，并未使用与垛积相关的术语。我们之所以要首先介绍方中通的工作，是因为由此我们可以更清楚地理解杜知耕处理垛积问题的方式。

17世纪末，杜知耕在《数学钥》(1681)中给出更多的垛积公式，这些公式多已在杨辉的书中提到。引起我们注意的是，杜知耕为这些公式给出了一些证明性的，或者更确切地说，是阐释性的说明。杜知耕首先给出平方堆垛（相当于杨辉的四角垛）、三角平堆（等腰三角形垛）的求和法，然后，他利用这两个公式得到梯形平堆垛及六边平堆的解释。也就是说，他以平方堆和三角平堆作为形状为平面图形的垛积研究的基础，以两者间的分合移补解决其它形状垛的求和问题。杜知耕关于平方堆计算方法的解释如下：



平方堆图，采自：《四库全书·数学钥》

> 设平方堆周二十四，求积法曰：置周，四归之得六，加一得七，自乘得四十九，即所求。
>
> 解曰：四归者，求一边之数也。加一者，每角尚缺一枚也。如上为方堆，下为方田，纵广皆七而方田之周得二十八，方堆之周止得二十四，以周数有连根、除根之异故也①。

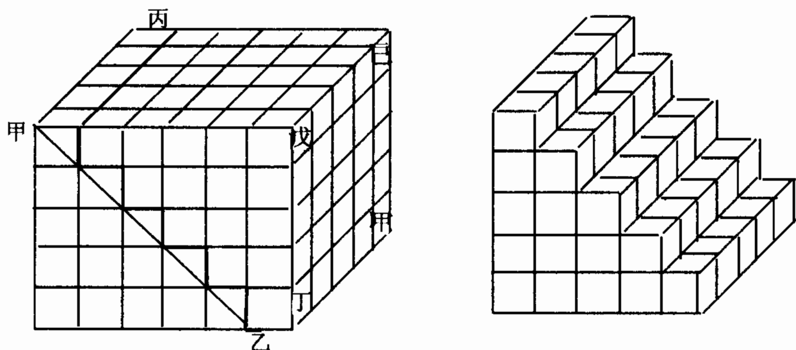
该题为已知正方形平面堆的周长，求堆积的问题。杜知耕简单地给出其计算方法：以四除周长，得数加一，再自乘，即得所求堆积。杜知耕在“解”中

① 杜知耕. 数学钥. 4. 36b—37a.

称:所以要用四除,是为了求出边长。而每边加一的理由是方堆与正方形不同,因为平方形的边是连续的,而方堆的边则是离散的,为了说明他每边加一的计算法是正确的,杜知耕完全按题中的数据绘制出图形。这样,他以图示的方法,给出了其方法正确性的解释,或者说验证。

在此之后,杜知耕又给出了一些立体垛的求积方法及对这些方法的解释,其中包括堑堵、方底高堆、三角高堆、三角锐面堆、直底高堆及直底锐面堆等。杜知耕对立体垛的解释方式主要如下:首先,他将一些垛分割组合构成正方体,此后,利用后者的求积公式得到前者的计算公式。马若安(J.C. Martzloff)在他的《中国数学史》(*History of Chinese Mathematics*)中分析了杜知耕方锥垛求积公式的证明过程(杨辉的四隅垛)。[1]为了更清楚地了解方中通的方法,本书再引入下面的例子:

> 设堑堵高堆底方五(凡高堆底阔即层数,故不言高)[2],求积法曰:置五加一(共六)为实,以高五乘之(得三十),再以阔五乘之(得一百五十),折半,得七十五,即所求。



堑堵高堆图,引自《数学钥》,《四库全书》本

杜知耕对他的方法给出下述解释:

> 解曰:堑堵体为等高同底方体之半,而堑堵堆不为等高同底方堆之半。何也?堑堵体以甲乙线为界,其边整齐,故倍之即为等高

---

① Jean-Claude Martzloff, *A History of Chinese Mathematics* (Translated into English by Stephen S. Wilson, Springer-verlag. 303—304.

② 原书注. 杜知耕. 数学钥. 44 则. 4. 40a—41a.

同底之方体。若堑堵堆,以丙乙线为界,其边不齐,每层多半枚,高五层,多二枚半。阔五层,共多十二枚半。倍之,则多二十五枚。恰是丁戊已庚一面之积也。今并两堑堵成一高五长六阔五之直堆,若减丁戊已庚一面,则成方堆与堑堵同底等高矣。反之于堑堵堆,求同底等高之方堆,增出丁戊已庚一面,折半则得堑堵堆。法置五加一为实者,即增此一面之法也。后或加一,加半,皆此意也。不能尽为图解,俱依此例推之。①

杜知耕称,堑堵的体积为与其同高同底正方体体积的一半。但堑堵堆的积却并不是同高同底的方堆的一半。他对此给出的解释是:实体的堑堵以甲乙直线为对分线,这样,其二倍便是一个等高同底的方体。但堑堵堆的截边为折线,与直线相比,每层的每一列均多0.5个小立方体,这样如果高是5,则每列共增2.5个小立方体。如假设宽亦为5,那么全垛共增12.5个小立方体。在这个基础上加倍,便多出25个小立方体。这正是堑堵堆的求积公式与堑堵体积公式不同的原因。

对于底边和高均为5的堑堵垛的求和问题,杜知耕给出的解释应该算是一个完整的证明。对于一般堑堵垛求积公式来说,杜知耕的“解”仅是利用一个特例对其方法给出解释,不能算作是给出了严谨的一般性的证明。但是,在解释过程中,他给出了堑堵高堆公式的全部推导过程,使得读者可以由此理解他的计算方法,同时也可以检验该公式的正确性。马若安指出,杜知耕的方法来源是不清楚的,因为杜知耕没有给出有关他的方法来源的任何线索。马若安是有一定理由的,因为在16世纪,部分欧洲数学方法已经被引入中国,且杜知耕非常熟悉这些欧洲方法。马若安进一步论曰:“然而,就我们所知,没有任何证据表明,十九世纪以前在欧洲有类似于杜知耕的这种计算三维拟形数求和的想法。”②所以,杜知耕不可能从欧洲数学著作中找到他的垛积运算方法。在没有史料支持的情况下,马若安先生不肯轻易下结论,这样严谨的治学态度是值得尊敬的。但是,虽然17世纪欧洲数学已经传入中国,然而杜知耕是一个中国数学家,所以,除了学习欧洲数学知识以外,他必然也会学习中国传统数学知识和方法。这样,在探讨17、18世纪中国数学家的工作来源时,不仅要检验是否欧洲当时已经有了同样

---

① 杜知耕.数学钥.四库全书.4.40a—41a.

② Jean – Claude Martzloff, *A History of Chinese Mathematics*. 304.

的数学方法和成果,还应该分析中国传统数学中是否有类似方法。事实上,在垛积术起始之初,沈括和杨辉就是以已知体积公式推导出垛积求和公式的。一个堑堵是与它等底等高的正方体的体积的一半,方锥是一个与它同底等高的正方体的体积的三分之一,这两个公式早在《九章算术》(公元前1世纪)中已经出现,并于公元263年被刘徽证明。杨辉的《详解九章算法》中含有计算堑堵和阳马体积的问题,并在其后以比类的方法给出相应的垛积公式。杜知耕的《数学钥》卷四中包含了这些结果。同时,借助特例来阐明自己的推理方式也是中国数学家在证明和解释一个算法正确性时常用的方法。所以,我们有充分的理由认为,杜知耕的方法是来自中国传统的,他对垛积公式的阐述很好地复原了杨辉传统的垛积运算方法。①

1723年,《数理精蕴》编成。书中第三十卷专论《堆垛》,其中包括了一些公式及其证明。书中的证明方式与杜知耕的方法是一致的②。

当然,欧洲数学确实对方中通和杜知耕有着很大的影响。正如上文所称,17世纪中叶以前,我们很难找到有关垛积方法的解释或证明。然而,到17世纪下半叶,两名数学家几乎同时在他们的著作中给出解释他们垛积计算法的推理过程及验证其方法正确性的说明。这是不是偶然的呢?

前文已述,16世纪末,耶稣会士来到中国,并引入了欧洲数学。当时,一些宋元数学家的出色成果都已湮没无闻,很多早期数学著作也已失传,或不再能被理解。1607年,欧几里得《几何原本》的前六卷被译成中文,此后,又有一些欧洲数学科学著作传入中国。即使在明清朝代交替的混乱时期,一些学者也被西方知识所吸引。方中通和杜知耕都是这样的学者。他们二人都很熟悉当时传入中国的欧洲数学知识,并且试图将西方数学融入中国传统数学之中,《数度衍》和《数学钥》就是他们这方面努力的代表作。③将西方数学纳入中国传统数学体系,或者以中国数学涵盖西方数学,是当时很多中国学者及数学家的愿望。关于这方面的情况,我们在本书第二章中已有较为详细的介绍。然而,在以中国数学诠释西方数学的过程中,中国天文学家和数学家不仅学习了来自西方的天文数学知识,也在一定程度上改变了

---

① 傅大为以与杜知耕类似的方法复原杨辉垛积方法。参见:傅大为.中算史垛积源流新论——"商功"与"少广"两条线索的演化.69—113.

② 数理精蕴.卷30.1723年刊本.

③ 关于方中通、杜知耕,详见本书第二章。参见:Peter M. Engelfriet. *Euclid in China, The genesis of the First Translation of Euclid' s Elements in 1607 and it' s Reception up to 1723*. 56—342,383—401.

自己的著述风格和研究方法。《四库全书·提要》中描述《数学钥》和《数度衍》曰：

> 其书(《数学钥》)列古方田、粟布、衰分、少广、商功、均输、盈朒、方程、勾股九章，取今线、面、体三部之法隶之，载其图解，并摘其要语以为之注。与方中通所撰《数度衍》用今法以合九章者体例相同。而每章设例必标其凡于章首，每问答有所旁通者必附其术与条下，所引证之文必著其所出，搜辑尤详。[①]

确如《四库全书·提要》所称，虽然《数学钥》全书仍遵《九章》体例，但每卷之前均著凡例，凡例的内容皆是按《几何原本》等西方数学著作的叙述方式给出该卷用到的主要命题和概念。书中各题除问题和计算方法之外，大部分算题均附有含几何图形的"解"，该解实际上可被视作问题解法的证明或说明。此外，在《数学钥》中，如在某题的"解"中需要引用其他的数学著作或前文已述过的命题和方法，杜知耕总是以注解的方式指明出处和内容。可以说，该书的推理形式与《几何原本》的模式非常相似。所不同的是，《数学钥》中的命题(则)并不是定理，而是计算程序。[②]《四库全书·提要》中称，杜知耕和方中通的著作是"用今法以合九章者体例"。那么这个"今法"是何所指呢？提要署名为总纂官纪昀、陆锡熊、孙士毅，总校官陆费墀，但他们应该并不是上文的实际撰稿人。《四库全书》历算部分主要由天文、算学纂修官和分校官负责。具体到《数学钥》，该书由钦天监博士张尚鑑详校，灵台郎倪廷梅覆勘，朱钤为总校官，五官灵台郎陈际新任校对官。除朱钤外，其他人均是钦天监官员。作为《数学钥》的校阅官，他们很可能对该书提要的撰写有些贡献。自入清以来，钦天监人员便主要是随来华传教士学习西方天文数学方法，所以，他们很自然地将来自西方的根据线、面、体进行数学分类的方法称为"今……之法"。这样，他们所说的《数度衍》和《数学钥》用今法以合九章之体例，正是指明，虽然这两部著作的体例均取法古九章，但其内在结构和论述方式则遵循西方数学的体例。方中通和杜知耕的这种著述方式得到了稍晚于他们的梅文鼎的赞赏。梅文鼎称，"方位伯(方中通)《数度衍》于九章之外搜罗甚富，杜端伯(杜知耕)《数学钥》图注九章，颇中肯。系

---

① 纪昀，陆锡熊，孙士毅，陆费墀．数学钥提要．数学钥．四库全书．子部六．天文算法类2.1a—b.

② 参见：Peter M. Engelfriet，389—405.

可为算家程式”①。梅氏认为方、杜的著作可以成为数学著作的“程式”，也即规范，当是因二书正可成为他会通中、西数学研究之范本。我们再回到方中通和杜知耕的垛积方法上来。对于《数度衍》和《数学钥》中与垛积相关的算题，方、杜二人也是按照全书的体例给出一般性的方法及图解，在图解部分，他们重构了上述的垛积方法。②

在本节的最后，我们再次强调，方中通、杜知耕二人的级数和垛积术研究的方法属中国传统方法，他们很好地复原了沈括—杨辉垛积法。但就其相关问题的论述方式上来看，他们已受到西方数学的影响。

第三节 朱世杰方法在清代中期的发展

在清代垛积术研究中，陈世仁(1676—1722)的《少广补遗》是一部很有特点的算书。陈世仁，字元之，号换吾，海宁人，1715 年中进士，后辞官养母。好学且精数学。《少广补遗》可谓是一部级数求和公式集。该书分七篇，第一篇“平立方员开三角及诸尖 12 法”的第一法为平尖，“置倍实平方带一纵开之，得本数之底数与其径数”③。这实际上相当于公式：

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} n(n+1)$$

以类似的方式，陈世仁给出多组级数求和公式。其中有些公式已非常复杂，如抽偶再方尖，相当于求奇数的立方之和公式：

$$\sum_{i=1}^{n} (2i-1)^3 = n^2(2n^2-1)$$ ④

陈世仁对他所得出的这些公式几乎没有给出任何解释。所以，我们无法得知这些公式的具体来源及公式的推导方法。虽然当时《四元玉鉴》等算书已

① 梅文鼎.九数存古十卷.勿庵历算书记.四库全书本.50a—b.

② 关于欧洲科学对方中通和杜知耕的影响，参见：Peter M. Engelfriet. *Euclid in China, The genesis of the First Translation of Euclid's Elements in 1607 and it's Reception up to 1723*. 关于欧洲数学在康熙时代的传播，参见：韩琦.康熙时代传入的西方数学及其对中国数学的影响.

③ 陈世仁.少广补遗.四库全书.1a.

④ 关于陈世仁《少广拾遗》中所含的垛积公式的详细情况，参见：李俨.中算家的级数论.中算史论丛.1.366—384.

很难得见，但却尚有流传。[①]。陈世仁并不是绝无可能读到过《四元玉鉴》。其书中包含的一些公式也可与朱世杰的垛积公式建立起联系[②]。但他给出的各尖的名称与朱世杰垛积名称完全不同。从他的诸尖名称上来看，虽然他也有意进行系统的垛积研究，但他似乎还未将其诸尖与贾宪三角形建立起联系。由此推论，陈世仁的垛积术很可能是在《九章算术》、《少广章》所给出的级数求和公式的基础上发展起来的，这一点从书名《少广补遗》亦可略见端倪。所以，我们可以把陈世仁的研究归于《九章算术》的"少广"传统。

我们很难为汪莱的垛积术研究定位。18世纪末，在其《递兼数理》中，汪莱(1768—1813)第一次给出了三角垛的一般公式：

> 凡平三角堆，以根数加一与根数相乘，折半得积数。立三角堆，以根数加一与根数相乘，又以根数加二乘之，得数六归之，得积数。此定法也，至三乘以上，则未有其术，故立为通法。
>
> 法取根数，用一、二、三、四、五、六、七、八、九、十以至百千万亿相挨诸数分别加之，至如其乘数而止，为累乘法。乃置根数，以累乘法累乘之，得数为实，又置一为法，首用二、三、四、五、六、七、八、九、十，以至百千万倔相挨诸数，累乘之为诸乘三角堆之除法，以所求乘数相当之除法除前实，得积数[③]。

其公式相当于：

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{r(r+1)\cdots(r+p-1)}{p!}=\frac{r(r+1)\cdots(r+p)}{(p+1)!}$$

是三角垛求和的一般公式。汪莱很可能是中算史上第一个明确给出该公式的数学家。但汪莱并没有给出其公式的证明或解。汪莱还将三角垛与排列组合联系起来，相当于得出如下的公式：

---

① 一些明清学者的著述及少数藏书家目录中曾引述《四元玉鉴》中的部分内容或提到《四元玉鉴》名目．梅瑴成《赤水遗珍》(1761)"天元一即借根方"一条对天元术给出了阐释。在该条之后，梅氏又解释了《四元玉鉴》中的"或问歌彖"一门的第一问和第三问。可见，稍晚于陈世仁的梅瑴成至少见过部分《四元玉鉴》。关于《四元玉鉴》在清代的流传，参见：杜石然．朱世杰研究；田淼．《四元玉鉴》的清代版本及清人对《假令四草》的校勘．

② 陈世仁的"平尖"相当于朱世杰的"茭草垛"，其立尖相当于朱世杰的"茭草落一形"或"三角垛"，"方尖"相当于朱世杰的"四角垛"，"方尖准立尖"相当于"四角落一形"垛，"抽奇方尖准立尖"相当于朱世杰的"四角落一形的四倍"；"立尖还准立尖"法相当于朱世杰的"三角落一形"。

③ 汪莱．递兼数理．衡斋算学．4．11b—12a．

$$C_m^n = \frac{m!}{n!\ (m-n)}$$①

汪莱书中有"平三角堆"、"立三角堆"及"三乘以上"等术语。可见,无论是否是他自己的发现,他显然都清楚地了解三角垛系的存在及其特点,并进而给出三角垛一般求和公式。所以,从研究内容上来看,他的工作应该是属于朱世杰传统的。我们将汪莱的垛积成果置于此处的另一个原因是他的工作很可能对其后数学家的研究有很大的影响。对此,我们将在相关段落中再做交待。

《四元玉鉴》在 19 世纪初被重新发现之后,引起了当时数学家的广泛关注。张敦仁(1754—1834)是其中之一。由于他不能理解书中的垛积类题目,他写信给李锐,并要求他研究这些题目。1816 年,李锐给张敦仁回信,并在信中详细解释了书中的垛积方法。②提供上述信息的阮元并没有讲明李锐所给出的解释是关于朱世杰垛系研究方法的重构或解释,还是仅以沈括—杨辉传统的方法对书中的垛积问题因题演草。李锐在一年后去世,没有留下相关资料,张敦仁亦未出版过相关的著作,所以,对这个问题我们很难有一个明确的答案。李锐之后,沈钦裴、罗士琳撰成《四元玉鉴》全本的细草。然而,从他们的著作中,似乎看不出他们是否已经理解了朱世杰三角垛系和四角垛系结构和计算方法。罗士琳曾撰写一部《台堆积演》阐明《四元玉鉴》中的垛积类算题。但该书中的研究方法属于杨辉传统。③ 清代中期,垛积术成为一个活跃课题,它之所以引起当时数学家的普遍关注与中算家对幂级数展开式的研究有关,在此过程中,《四元玉鉴》中的垛积方法亦开始得到阐释和发展。

就可能读到的文献分析,最早理解《四元玉鉴》中朱世杰垛积传统的清代数学家很可能是董祐诚。上一章中我们已经提到,董祐诚将垛积术与三角函数幂级数展开式的研究结合在了一起。在其《堆垛求积术》中,董祐诚称:"予释割圆捷法,更得求诸乘方所成之方锥堆术,继复以纵方堆推之,而

---

① 关于汪莱《递兼数理》中关于组合问题的研究,参见:李兆华.汪莱《递兼数理》、《三两算经》略论.古算新论.52—79.朱世杰应该已经掌握了一般的三角垛公式,但是,他没有给出一般性的公式。汪莱很可能没有读到过《四元玉鉴》,从他自己的叙述可以看出,他是独立发现该垛积公式的。

② 阮元.李尚之传.4.483.

③ 罗士琳.台堆积演.观我生室汇稿.

得诸乘方所成之纵方堆术。亦谓此两术又汪氏所未发也。”① 可见他在垛积方面的工作实际上是由他的幂级数研究中衍生出来的。

董祐诚书中给出了两组垛的求积公式,其一为方锥堆垛,其二为纵方锥垛。他给出了方锥堆垛数字表,相当于

1,4,9,16,25,36

1,5,14,39,55,91

1,6,20,50,105,196

1,7,27,77,182,278

这实际上是级数系列:$1,\cdots,\frac{1}{(p+1)!}r(r+1)\cdots(r+p-1)(2r+p-1)$的前四个垛。董祐诚在给出了这四垛的求和方法后称:“五乘以上,层数倍层数并同,皆以层数递加一数乘之,倍层数亦递加一数,又于除数上递加一数除之。”② 可见,他完全清楚这四个垛之间的数字关系,董祐诚得出了该系列垛的一般求和公式:

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{(p+1)!}r(r+1)\cdots(r+p-1)(2r+p-1)=\frac{1}{(p+2)!}n(n+1)\cdots(n+p)(2n+p)$$③

董祐诚所谓的纵立锥相当于以$3,\cdots,\frac{1}{(p+1)!}r(r+1)\cdots(r+p-1)(2r+3p+1),\cdots$为一般形式的垛系。董祐诚同样在给出这个系列垛的前四垛求和公式之后给出其一般求和公式:

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{(p+1)!}r(r+1)\cdots(r+p-1)(2r+3p+1)=\frac{1}{(p+2)!}n(n+1)\cdots(n+p)(2n+3p+4)$$

董祐诚为他所研究的诸级数命名为堆垛,由此可知,他自觉将其工作视为垛积术。他的成果究竟该算是属于杨辉传统还是朱世杰的传统,并不是一个很容易说清的事情。董祐诚自谓:“平方锥堆,如斜置平方形,本以层数自乘得积,今设此者,欲与诸乘方通为一术。”可见,他开始研究时仍是以有具体形状的堆垛为起点的。但他明确地给出其研究的两类垛的一般形式及一般的求和公式,且为了使研究的各垛可以“通为一术”,在全书中,他经常

① 董祐诚．堆垛求积术序．堆垛求积术．董方立遗书本．1a．

② 董祐诚．堆垛求积术序．堆垛求积术．1a—2a．

③ 李兆华．董祐诚垛积术与割圆术述评．古算今论．103．

要对书中的计算公式的形式和叙述方法加以适当的调整，由此可以看出，董祐诚已意识到他所研究的是两组垛系而不是个体的垛。此外，他是以级数列的形式给出各垛的具体数值而不再纠缠于各垛的具体形状。所有这些都与杨辉传统借助实体几何图形的求积公式通过观察、归纳求出堆垛公式的研究方法有本质的不同。

董祐诚在《堆垛求积术》的序言中也特别提到了《四元玉鉴》，称“近读《四元玉鉴》《茭草形段》、《果垛叠藏》诸问，求其天元如积之原，则与诸术皆一一符合。”① 即在得到了两组垛的求积方法之后，董祐诚发现《四元玉鉴》中的“天元如积之原”与他自己的方法一一符合。这意味着他至少理解了朱世杰三角垛和四角垛是成系统的，于是，他要做这篇《堆垛求积术》，以“为读《四元玉鉴》者助”。当然，我们还不能说他已经理解了朱世杰的垛积术与贾宪三角形之间的联系。从这个角度来说，董祐诚的工作虽然并不是在朱世杰工作的基础上的继续发展，但是将之纳入朱氏垛积传统之中，应该是合乎情理的。遗憾的是，董祐诚在书中并没有给出他推导垛积公式的过程。项名达称董祐诚的“方锥堆实出于三角堆，弦之二率即两堆根相关数，四率即两立积相并数，矢之三率即两平积相并数，五率即两三乘积相并数，四、五率以下，多乘积以还，莫不如是”。② 给出董氏方锥堆与三角垛之间的关系。严敦杰先生亦曾给出董祐诚的两个垛系与三角垛之间的关系式。③ 李兆华先生在《董祐诚垛积术与割圆术述评》中借助该关系式证明了董氏两个公式的正确性。④当然，这并不表明董祐诚肯定是通过对三角垛的变换得到两个垛系的求和公式的。从董氏的叙述我们可以看出，他是在已得到两个垛系的求积公式之后才读懂朱世杰《四元玉鉴》中的相关问题的，且他自称，通过与汪莱的三角垛公式比较，他发现汪莱并未研究过他所探讨的两种垛系。这样，似乎他在得到其垛积公式之前并没有参考过三角垛一般求和公式。

项名达长期思考何以幂级数展开式可以和堆垛术有联系。1837 年，他恍然意识到：“三角堆数起于一，递加一得堆根，递加根得平积，递加平积得立积，盖递加数也。弦矢率由圜中两等边三角挨次比例而生，亦起于半径之

① 董祐诚. 堆垛求积术序. 堆垛求积术. 董方立遗书本. 1a.

② 项名达. 象数一原序. 象数一原. 1888 年上海高斋汇刻本. 1a—2a.

③ 严敦杰. 李善兰恒等式. 411.

④ 李兆华. 董祐诚垛积术与割圆术述评. 古算今论. 103—108.

一,半径即一率,递加一率得二率,递加二率得三率,递加三率得四率,亦递加数也”。①项名达自己在幂级数研究中也用到了垛积术,为此,他还对垛积术进行了比董祐诚更为系统的研究。在《象数一原》卷一中,项名达给出了计算到12层的“贾宪三角形”,并称之为“递加图”。他详细地介绍了该图的构造方法,并给出“递加数有根求积法”,即三角垛的求和公式。项名达的公式与汪莱的完全一致,但其叙述方式较汪莱的更为简捷,他还进一步给出了 n 乘垛积公式与 $n-1$ 乘垛积的计算法之间的关系。此后,与幂级数公式的推导相应,项名达还构造出多种递加数表。②虽然项名达没有提到《四元玉鉴》及汪莱的三角垛求和公式,但对于他来说,这些著作并不难得到。前文已述,董祐诚在《割圆连比例图解》序言中提到过《四元玉鉴》和汪莱的著作,项名达应该会对它们做过研究。项名达还提到《递加图》与乘方根的廉隅的关系,我们知道,贾宪三角形的本名为《开方作法本原图》,其所列各项正是各次方根的廉隅。由此可知,项名达至少见到过贾宪三角形,进一步,我们可以推测,项名达完全理解朱世杰的垛系与贾宪三角形的关系。

徐有壬明确指出,《四元玉鉴》中的垛积术方法对他研究幂级数展开式起到了很大作用。“余读《四元玉鉴》,究心于垛积招差之法,推之割圜诸术,无所不通。盖垛积者递加数也。招差者连比例也。合二术以施之割圜,六通四辟,而简易之法生焉。导源于杜德美氏,发挥于董方立氏,旁推交通于项梅侣氏、戴鄂士氏、李秋纫氏,几无遗蕴矣”。③从徐有壬的《造各表简法》的内容来看,他在垛积术方面并没有做进一步的研究,只是将垛积、招差的成果应用到了幂级数展开的研究之中。徐有壬的《造各表简法》亦名《垛积招差》,他尚有一部未刊印的著作名为《堆垛测圆》④,由这两部著作的书名我们就可以看出,垛积术是徐有壬三角函数及对数的幂级数展开式研究的基础。

将清代垛积术的研究推向顶峰的数学家是李善兰。前文已述,李善兰在幂级数展开式方面也有出色的成就,他在幂级数研究中构造出一种尖锥

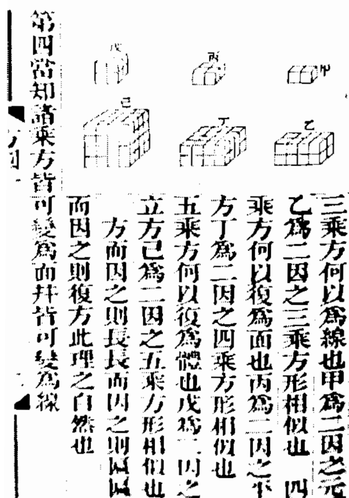
① 项名达.象数一原序.象数一原.1a—2a.

② 项名达.象数一原.

③ 徐有壬.造各表简法.务民义斋算学.1.1a—b.

④ 据韩琦推测,《堆垛测圆》很可能是《割圆八线缀术》的底本.《割圆八线缀术》是在徐有壬去世后由吴嘉善、左潜等人整理成书的.韩琦.《务民义斋算学》提要.中国科学技术典籍通汇·数学卷.5.647.

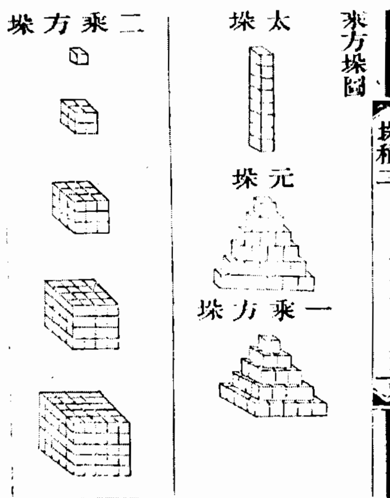
术。《方圆阐幽》是李善兰阐述其尖锥术方法的专著。该书由十条“当知”组成，在前三当知中，李善兰称，“点、线、面皆不能无体”，“体可变为面，面可变为线”①。李善兰在为了讲解这两条当知所绘的图形中，以小立方体分割立体图形，其具体形状与他在《垛积比类》中绘制的垛积示意图几乎完全一致。


第四當知諸乘方皆可變爲面幷皆可變爲線

三乘方何以爲線也甲爲二因之元乙爲二因之三乘方形相似也　四乘方何以復爲面也丙爲二因之平方丁爲二因之四乘方形相似也五乘方何以復爲體也戊爲二因之立方己爲二因之五乘方形相似也
　方而因之則長長而因之則扁扁而因之則復方此理之自然也

尖锥图

采自:《方圆阐幽》



乘方垛图

采自:《垛积比类》

李兆华分析，尖锥术实际上是李善兰将传统的极限思想应用于垛积术所产生的，李善兰的尖锥术公式亦可以由垛积公式导出。② 在求对数函数的幂级数展开式时，李善兰运用了他新创的尖锥术方法。故李善兰的垛积术研究亦与幂级数研究有着密切的关系。但与董祐诚和项名达及徐有壬等不同的是，李善兰的垛积术工作并不单纯是幂级数研究的附属成果。换句话说李善兰的垛积研究是自成系统的。

李善兰的《垛积比类》可以说是一部系统的垛积术专著。该书被收于《则古昔斋算学》(1867)之中，但我们不清楚其具体成书年代。李善兰在《垛

---

① 李善兰. 方圆阐幽. 则古昔斋算学本. 1a—b.

② 李兆华. 李善兰垛积术与尖锥术略论. 古算今论. 80—101.

积比类》序中称：

> 垛积为少广一支，而元郭太史以步躔离，近汪氏孝婴以释递兼，董氏方立以推测圜，西人代数、微积分中所有级数大半皆是，其用亦广矣哉①。

可见，该书的成书还在其翻译西方代数、微积分著作之后。李善兰认为，垛积术于“历来算书中不恒见，惟元朱氏《玉鉴》、《茭草形段》、《如象招数》、《果垛叠藏》诸门为垛积术，然其意在发明天元一，故言之不详，亦无条理。汪氏、董氏之书有条理矣，然一但言三角垛，一但言四角垛，余皆不及，则亦不备。今所述有表、有图、有法，分条别派详细言之，欲令习算家知垛积之术于九章外别立一帜，其说自善兰始”②。可见李善兰已经了解了前代算家朱世杰、汪莱、董祐诚等的垛积成果。他所要做的是系统地探讨垛积术的方法和成果，使之成为九章之外另一个研究分支。从《垛积比类》的内容和结构来看，李善兰所言不虚。

《垛积比类》共 4 卷，每卷构成一个独立的系统。第一卷讨论三角垛及其变垛。书中首先给出三角垛表——贾宪三角形，并介绍了该表的造法。紧接着，李善兰指出，“欲知某乘垛每层之积，视乘数层数二行相交之格，即是”③。这相当于指出，任一 p 乘三角垛前 n 项的和即是第 $p+1$ 乘三角垛的第 n 个数值。这是贾宪三角形的一个重要性质，李善兰很可能是第一个明确给出三角垛此性质的数学家。此后，李善兰未做任何解释地给出了三角垛求和的一般公式：“凡有高求积者，置高以高递加一累乘之，加至如本乘垛数乘之而止为实，以一、二、三诸数连算至视本乘垛数多一而止为法，实如法而一得积”④。此公式与汪莱给出的公式是一致的，但其表达则明显地更为简捷确切。

在给出三角垛求和公式之后，李善兰利用该公式及天元术得出前四个三角垛有积求高的方法，他给出了详细的天元术运算过程，即“草”。最后，综合其计算结果归纳出“三角垛有积求高开方廉隅表”，利用这个表格，我们

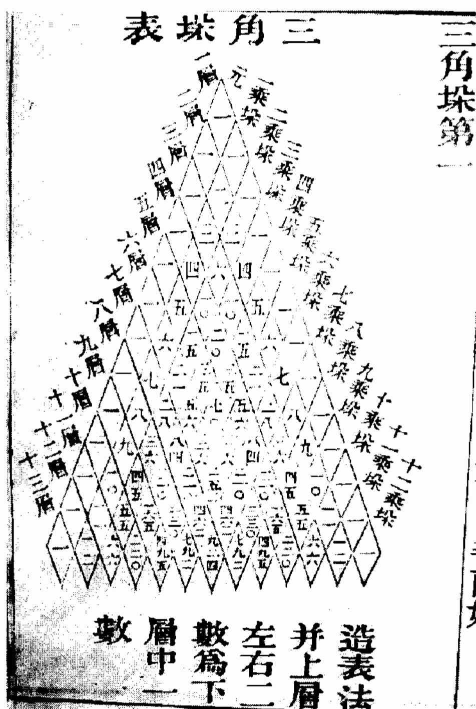
---

① 李善兰. 垛积比类序. 垛积比类. 则古昔斋算学本. 1a.

② 同上.

③ 李善兰. 垛积比类. 卷 1. 2a.

④ 李善兰. 垛积比类. 卷 1. 4a.



三角垛表,采自:《垛积比类》



三角垛有积求高开方廉隅表,采自《垛积比类》

就可以列出各乘垛高与有限和的天元(代数)关系式。该卷的后一部分讨论三角垛支垛,所谓三角垛支垛是利用几个三角垛错层或同层相加构成的新垛。李善兰关于这些垛的介绍形式与其对三角垛的介绍完全一样,给出垛表、垛图,不加任何解释和证明的支垛有高求和公式及在以知各支垛积的情况下求垛高的过程。《垛积比类》的第二卷讨论乘方垛及其变垛,第三卷讨论三角自乘垛及其变垛。这两卷的结构和叙述方式均与卷一相同。①

李善兰的乘方垛公式相当于公式:

$$\sum_{r=1}^{n} r^{p+1} = \sum_{i=1}^{n} A_i^p \sum_{r=1}^{n-i+1} \frac{1}{(p-1)!} r(r+1)\cdots(r+p)$$

其中 A_i^p 相当于欧拉数(Eulerian numbers),是下页右图第 p 行的第 i 个数字。

① 李善兰. 垛积比类.

李善兰的三角自乘垛公式相当于公式

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{p_i}r(r+1)\cdots(r+p-1)\right]^2=\sum_{i=1}^{p+1}C_i^p\sum_{r=1}^{n-i+1}\frac{1}{(2p)!}r(r+1)\cdots(r+2p-1)$$ [①]

其中 C_i^p 是下左图第 p 行的第 i 个数字，如，C_2^3 为 4.

1				
1	1			
1	4	1		
1	9	9	1	
1	16	36	16	1
……				

（三角自乘垛廉隅表）

1				
1	1			
1	4	1		
1	11	11	1	
1	26	66	26	1
……				

（乘方垛廉隅表）

如上所述，李善兰确实在垛积术的研究上取得了很多重要成果，通过《垛积比类》，中算史上垛积术的成果第一次得到了系统的整理及表述，成为一个独立的研究分支。然而，虽然相比于其他传统数学著作《垛积比类》显得更为系统，但该书的基本著述方式与古代数学著作并没有本质上的区别。首先，虽然李善兰已经了解了当时新传入的符号代数方法，但他并未将符号代数表达式引入垛积术，书中算题和计算公式都是由文字叙述的。更为重要的是，虽然李善兰以天元术给出了已知各类垛积有积求高的一般性方法的具体推导过程，我们可以将这个过程视为相应算法的代数证明，但对于更为基本的各垛求和公式，李善兰却没有给出任何说明或证明。在这方面，李善兰沿袭了古代数学著作的写作方式。正因如此，我们无法了解他垛积研究的方法。[②]

综上所述，至 19 世纪中叶，《四元玉鉴》中所蕴含的垛积运算方法已得到了完全的理解及长足的发展。但，重构朱世杰传统的垛积计算方法的著作还没有出现。

---

① 1939 年，章用在其《〈垛积比类〉疏证》中将李善兰三角自乘垛公式改写为 $\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}^2\binom{r+2p-i}{2p}=\binom{r+p}{p}^2$，并给出一个证明。后匈牙利数学家杜兰(Paul Turán)也给出该式的一个证明。此式即数学史上的李壬叔恒等式。见：章用．〈垛积比类〉疏证．科学．23．11．1939．关于李善兰的垛积研究及其公试的证明，参见：王渝生．李善兰研究．明清数学史论文集．386—401；罗见今．《垛积比类》内容分析．内蒙古师大学报；傅庭芳．对李善兰《垛积比类》的研究．

② 关于李善兰的《垛积极比类》，详见：王渝生．李善兰研究．明清数学史论文集．386—401；罗见今．《垛积比类》内容分析．内师大学报；傅庭芳．对李善兰《垛积比类》的研究．

李善兰之后，刘彝程在垛积研究方面取得了很大进展。刘彝程的《简易庵算稿》中共有26个与垛积相关的问题。作为一部试题集解①，《简易庵算稿》不可能像《垛积比类》那样对垛积术给出系统全面的论述，但在这26个算题中，刘彝程几乎探讨了传统垛积术中涉及的各种类型的计算问题，并均有进一步的发展。在纯粹垛积方法的研究中，刘彝程得出很多新垛的求和公式，较为系统地探讨了截积问题，书中的公式和算法多是以一般形式给出的，刘彝程还对书中探讨的垛积计算公式给出了证明性的解释。此外，书中亦含朱世杰《四元玉鉴》中讨论的招差类问题。

刘彝程垛积术研究中最重要的成果是他得出了任意两三角垛逐层相乘的乘积垛的求和方法。

为了说明刘彝程的推理过程，我们把此题的全文照录如下：

> 假如三角寅垛与三角卯垛相乘，求乘得之寅加卯减一垛高递减一诸倍数。设卯小于寅，法以一为一级，卯减一为二级，置二级；以卯减二乘之，二除之，为三级；置三级，以卯减三乘之，三除之，为四级。下皆如是，至卯减尽而止。列左幅。次以一为一级，寅减一为二级，乃以同理求得诸级，至与左幅同级而止。列右幅。乃以左右二幅，一级与一级，二级与二级，逐级相乘为乘得式。此乘得式，一级即寅加卯减一垛同高之倍数，二级即高减一之倍数，三级即高减二之倍数。以下类推。有此简法，则《则古昔斋》自乘诸法可废。即李君所未思及之相乘诸法亦可由该式证其理。

这段文字相当于给出算题的题目和答案。所谓三角寅垛与三角卯垛相乘，是指一个寅乘三角垛和一个卯乘三角垛逐层相乘。刘彝程的问题是求乘得的新垛的求和公式。令寅为 p，卯为 q，二垛的高为 n，这个问题可以表述为

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{p!}r(r+1)\cdots(r+p-1)\cdot\frac{1}{q!}r(r+1)\cdots(r+q-1)=?$$

刘彝程的答案为，二垛相乘所得的结果为一组阶数不同的 $p+q-1$ 乘垛的不同倍数的和。刘彝程颇费笔墨地描述了这些系数。首先设 q 小于 p（乘法满足交换律，所以，令 p 小于 q 并不使其结果失去一般性），以1为一级，$q-1$ 为第二级，$(q-1)(q-2)/2$ 为第三级，$(q-1)(q-2)(q-3)/3\cdot2$ 为第四级，如此递推，至 q 被减尽，列于左侧。再以1为1级，$p-1$ 为二级，然后

① 关于《简易庵算稿》，详见本书第4章。

按前面的方法求到与左侧项数相同为止。列于右侧。两侧的数字逐级相乘,得到的一组数字,其第一个数字即是所得的 $p+q-1$ 乘垛高为 n 的项的系数,第二个数字即是 $p+q-1$ 乘垛高为 $n-1$ 的项的系数。以此类推。这相当于给出公式:

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{(p-1)!} r(r+1)\cdots(r+p-1)\cdot\frac{1}{(q+1)!} r(r+1)\cdots(r+q+1)$$

$$=\sum_{i=1}^{n+1} l_i^p \sum_{r=1}^{p-r+1} \frac{1}{(p+q-1)!} r(r+1)\cdots(r+p+q-3)$$

其中,

$$l_i^p=\frac{(p-1)(p-2)\cdots(p-i)}{i!}\cdot\frac{(q-1)(q-2)\cdots(q-i)}{i!} b_{q,i}, i \leqslant \min(p,q)$$

刘彝程对此公式给出解释曰:

考三角诸乘垛,内函不同高诸积。依项格降格书之,则

朵$_1^n = n$

朵$_2^n = n +$ 朵$_2^{n-1}$

朵$_3^n = n + 2$ 朵$_2^{n-1} +$ 朵$_3^{n-2}$

朵$^{四} = n + 3$ 朵$_2^{n-1} + 3$ 朵$_3^{n-2} +$ 朵$_4^{n-3}$ ①

....

若略其垛积,但取倍数列之,则得

朵^{五}所函	朵^{四}所函	朵^{三}所函	朵^{二}所函	朵^{一}所函
一	一	一	一	一
四	三	二	一	
六	三	一		
四	一			
一				

甲图

细观之,甲图,与降一乘方之廉隅表同(如朵^{二}所函与方^{一}廉隅

① 刘彝程原书中所用的为中国数字,举例来说,朵$_2^n = n +$ 朵$_2^{n-1}$。在《简易庵算稿》中被写成:朵 = 所函$^{高}_{朵=}$,刘彝程以位值的不同区分不同垛的高的不同。书中形式为作者依题意改写。下文同。

表同。朵^{三}所函与方^{二}廉隅表同)。可命甲图为各垛函倍数。

上文中,刘彝程分析了各乘三角垛的构成,得出三角垛实际上可以分解为不同高的低于其乘数的垛的和,而其每项的系数恰与低于其一次的乘方的开方廉隅表中的数字及排列方式完全相同,所谓开方廉隅表即贾宪三角形,亦即三角垛表。此后,刘彝程引用了李善兰的三角自乘垛的结果:

再考诸垛逐级自乘相乘所得各增乘积,或准前课诸题法,或取真数相乘以斜线分之,除高,与诸垛相乘,仍得一个原垛。此外,如

$朵_2^n\ 朵_2^n = 朵_3^n + 朵_3^{n-1}$

$朵_3^n\ 朵_2^n = 朵_4^n + 2\ 朵_4^{n-1}$

$朵_4^n\ 朵_2^n = 朵_5^n + 3\ 朵_5^{n-1}$

(一)

$朵_3^3\ 朵_3^3 = 朵_5^n + 4\ 朵_5^{n-1} + 朵_5^{n-2}$

$朵_4^n\ 朵_3^n = 朵_6^n + 6\ 朵_6^{n-1} + 3\ 朵_n^{n-2}$

$朵_5^n\ 朵_3^n = 朵_7^n + 8\ 朵_7^{n-1} + 6\ 朵_7^{n-2}$

(二)

$朵_4^n\ 朵_4^n = 朵_7^n + 9\ 朵_7^{n-1} + 9\ 朵_7^{n-2} + 朵_7^{n-3}$

$朵_5^n\ 朵_4^n = 朵_8^n + 12\ 朵_8^{n-1} + 8\ 朵_8^{n-2} + 4\ 朵_8^{n-3}$

$朵_6^n\ 朵_4^n = 朵_9^n + 15\ 朵_9^{n-1} + 30\ 朵_9^{n-2} + 10\ 朵_9^{n-3}$

(三)

细观一、二、三式中,乘得各垛指数即原两指数相加减一之数。如命原两指数为寅与卯,则乘得指数为:寅+卯-一,又取甲图中诸函倍数两相对列,有对者相乘,无对者去之,则乘得数与一、二、三式中不同高各倍数无异。

上文中,刘彝程给出三组计算结果,分别为二乘、三乘、四乘三角垛与二乘三角垛的乘积的求和结果;三乘、四乘、五乘三角垛与三乘三角垛相乘的求和结果及四乘、五乘、六乘三角垛与四乘三角垛相乘的求和结果。他指出,这三组结果均满足他给出的一般两三角垛相乘的求和公式,即,乘得的垛的乘数为两个三角垛乘数之和减一,且以前面给出的甲图中各垛所函其它垛的倍数表中的数值两两对列相乘,所得的结果与各结果中的数值完全一致。刘彝程进一步说明:

再，甲图中如命任垛指数为卯，则其函倍数之第二项等于卯减一，第三项等于卯减二之平垛，四项等于卯减三之立垛，以下类推。故任一垛之函倍数可以

$$一、卯-一、\frac{二}{(卯-一)(卯-二)}、\frac{二\cdot三\cdot}{(卯-一)(卯-二)(卯-三)}、\cdots\cdots①$$

为公式。又命另一垛之指数为寅，则其函倍数可以

$$一、寅-一、\frac{二}{(寅-一)(寅-二)}、\frac{二\cdot三\cdot}{(寅-一)(寅-二)(寅-三)}$$

……

为公式。如以三代卯，四代寅，则公式化为：一、二、一及一、三、三、一。而乘得之朵$^{四+三-一}$，即朵^{六}，其不同高各倍数为一、六、三，与二式中三、四朵相乘所得无异。

上文指出，甲图中各垛所函不同高的各乘垛的系数与他在任意两三角垛相乘的一般公式中给出的系数是一致的，这意味着他给出的公式对前文所述的九对相乘垛是正确的。据此，他归纳性地得出，其任意两三角垛相乘的一般公式是正确的。此后，刘彝程不无得意地说："此术乃自乘相乘垛至简至捷之诀，实开千古未有之奇。"② 即，他认为这是两三角垛相乘求积的最简便的方法，为千古未有之奇术。该题亦就此结束。从上文中，我们能清晰地看出刘彝程的推理及他得到任意两三角垛相乘求和公式的过程。他取大于二乘垛的最小乘的三个三角垛与二乘垛相乘，得到一级结果，此后，如法得出关于三乘垛和四乘垛的两组结果。通过对这 9 个公式的分析，他归纳出一般性公式。从其叙述可知，他对李善兰的三角自乘垛的结果非常熟悉，则李氏的公式肯定也会是他分析的内容。由此，我们可以确定，刘彝程是利用观察和归纳的方法推导出垛积运算公式的。然而，即使给出再多的算例，这种简单的归纳法得出的结论在数学上也是不确定的，刘彝程虽然充分说明了其运算方法并在一定程度上给出证明公式正确性的阐释。但这些说明均不能算是严谨的证明③。

---

① 此数列中，分数的写法与现代分数的表示法相反。

② 刘彝程．简易庵算稿．3．庚寅．2b—4a．

③ 关于任意两三角垛求和公式的证明，参阅：田森．刘彝程垛积术研究．70—81．

至此，我们在了解清代数学家垛积术研究方法方面已有了一点进步。虽然如此，上题中，刘彝程并没有给出他得到每组垛积运算结果的具体方法。他称："再考诸垛逐级自乘相乘所得各增乘积，或准前课诸题法，或取真数相乘，以斜线分之。"即，他的9个计算结果是由三角自乘垛公式、《简易庵算稿》中前面算题的结果和"真数相乘以斜线分之"的方法得到的。前两种方法对我们没有太大的启发，我们对第三种斜线划分的方法更感兴趣。《简易庵算稿》中确实有一些垛积算题是以斜线划分的方法推导出计算结果的。

求志书院1885年冬季试题的第一题的题目为求三角平垛倒置之，与他垛逐层相乘所得之新垛。刘彝程将此题收入《简易庵算稿》，并给出如下解答：

> 三角平垛倒置之，与他垛逐层相乘，所得为他垛之增一乘积。在《四元玉鉴》为散星形。三角或四角立垛倒置之，与他垛逐层相乘，皆为他垛之增二乘积。但四角乘得者，内多一个高减一之积。

三角平垛倒置与任一 p 乘垛逐层相乘，所得的结果为一 $p+1$ 乘垛，即《四元玉鉴》中的散星形垛。三角或四角立垛倒置，与任一 p 乘垛逐层相乘，所得的结果必为一 $p+2$ 乘垛。我们可以把刘彝程的结果整理成如下公式：

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{(n-i)(n-i+1+1)}{2}\cdot\frac{i(i+1)(i+2)\cdots(i+p-1)}{p!}$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+p)}{(p+1)!}$$

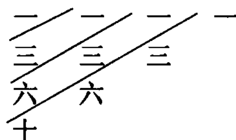
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{(n-i)(n-i+1+1)(n-i+2)}{3!}\cdot\frac{i(i+1)(i+2)\cdots(i+p-1)}{p!}$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+p+1)}{(p+2)!}$$

及

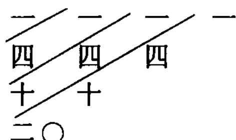
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{(n-i)(n-i+1+1)(n-i+2)}{3!}\cdot\frac{i(i+1)(i+2)\cdots(i+p-1)}{p!}$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+p+1)}{(p+2)!}$$

上述也是刘彝程新发现的一组新的垛积公式，但本书中，我们更关心他得到及解释或说明该公式的方法。刘彝程称：

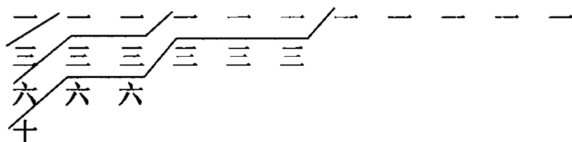
绘图明之：



一图



二图



三图

> 设以四层之平垛倒乘立垛，如一图。倒乘三乘垛，如二图。各以斜线分之，则一图为一、四、十、二十，即三乘垛。二图为一、五、一五、三五，即四乘垛，皆为原垛之增一乘积。又以立垛倒乘立垛，如三图。以斜线分之，得各层为一、五、一五、三五。即四乘垛。亦即原立垛之增二乘积。如以立垛更与别垛倒乘，则亦依三图作斜线分之，显见有条不紊。故三图外无庸再证。

高为四的倒置平垛与立垛逐层相乘，即，$4\times1+3\times3+2\times6+1\cdot10$。刘彝程将其绘成一图的形状，以斜线作如图的划分，每行斜线上的数字各构成一个立垛，而立垛的和构成一个三乘垛。因为三角 p 乘垛的 n 阶和为 $p+1$ 乘三角垛的第 n 个元。刘彝程类似地给出了三角平垛倒置与三乘垛逐层相乘结果的斜线分割法。同样，每个斜行上的数字构成一个三乘垛，这样，其总和为一个四乘垛。乍看之下，刘彝程所做的分割似乎匪夷所思，且没有理论根据。但经过进一步研究，我们发现，该划分可以被一般性地证明。任设三角垛的高度为 n，乘数为 p，我们以 $d_{p,i}$，$i=1,\cdots,n$ 表示该垛的第 i 个元。倒置的平垛各数值为 $n,n-1,n-2,\cdots,1$，这样，两垛逐层相乘，便是

$n\times d_{p,1}$

$(n-1)\times d_{p,2}$

$\cdots$

$1\times d_{p,n}$

其和可以表示为：$\sum_{i=1}^{n}d_{p,i}+\sum_{i=1}^{n-1}d_{p,i}+\sum_{i=1}^{n-2}d_{p,i}+\cdots+\sum_{i=1}^{2}d_{p,i}+d_{p,1}$，这正是刘彝程划分的数学意义，这个和构成一个 $p+1$ 乘 n 阶垛。倒置立垛与他垛逐层相乘的划分方式更为复杂。但我们也可以证明，刘彝程的结论是一般性成立的。首先，上述的划分是一般性的。倒置的立垛第 i 个数值为 $(n-i)(n-i+1)/2$，而

$$\frac{(n-i)(n-i+1)}{2}=\sum_{r=1}^{n-i}r$$

即，倒置立垛的第 i 元可以被分成 $n-i$ 阶的三角平垛的和。这正是刘彝程三图中给出的划分的一般形式。而

$$\sum_{i=1}^{n}d_{p,i}\sum_{r=1}^{n-i}r=\sum_{i=1}^{n}D_{p+1,i}=d_{p+1,i}$$

所以，刘彝程给出的倒置立垛与他垛逐层相乘求和的公式是正确的，其分割方式及基于该分割的计算是一般性成立的。此后，刘彝程称：

> 再，四角立垛，即一个三角立垛与一个高减一之三角立垛相并数，以与他垛倒乘同于用三角立垛倒乘，又多一个高减一之三角立垛倒乘数。其高减一之三角立垛倒乘，乃与他垛少一底积者相乘，故乘得数为他垛之增二乘高减一之积。以是推之，则四角平垛倒乘他垛所得必为他垛增一乘积，同高者一个，高减一者一个。又可见三角三乘垛，或四乘垛倒乘他垛，所得亦必为他垛之增三乘或增三乘积。①

利用一个四角立垛为一个三角立垛与一个高减一阶三角立垛的和的性质，刘彝程将倒置四角立垛与他垛逐层相乘的问题转化为两个三角立垛倒置与他垛逐层相乘，利用前面的结果，他给出了关于四角立垛的结果的一般性证明。这便是刘彝程在求任意两三角垛相乘求和公式时提到的斜线划分方法。《简易庵算法》中多次使用了这个方法。刘彝程也是利用该方法证明平方垛公式的。他将平方垛的第四个数字，即写成如下形式：

---

① 刘彝程，《简易庵算稿》，卷二，制造局刊本，光绪庚子，乙酉，8a—b.

L

1 1 1 1
1 1 1 1
1 1 1 1
1 1 1 1

L 斜线之左构成一个四阶平垛,其右侧则构成一个三阶平垛。

$$4^2 = \sum_{i=1}^{4} i + \sum_{i=1}^{3} i = d_{2,4} + d_{2,3}$$

$$\sum_{r=1}^{n} r^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{r=1}^{in} r + \sum_{i=1}^{i-1} r \right) = \sum_{i=1}^{n} d_{2,i} + \sum_{i=1}^{n-1} d_{2,i}$$

该结果与李善兰给出的平方垛求和公式的结果是一致的。我们也可以将刘彝程关于平方垛的划分推广致一般情况。

l

1 1 1 1 …… 1 1
1 1 1 1 …… 1 1
1 1 1 1 …… 1 1
1 1 1 1 …… 1 1
…………
1 1 1 1 …… 1 1

在得到平方垛求和公式之后,刘彝程利用该公式证明了其它乘方垛的结果。对于立方垛,刘彝程的证明相当于:

$$\begin{aligned} \text{由于 } r^3 &= r \cdot r^2 \\ &= rD_{2,r} + rD_{2,r-1} \\ &= rD_{2,r} + (r-1)D_{2,r-1} + D_{2,r-1} \\ &= D_{3,r} + 2D_{3,r-1} + D_{3,r-1} + 2D_{3,r-2} + D_{2,r-1} \text{①} \\ &= D_{3,r} + 4D_{3,r-1} + D_{3,r-2} \end{aligned}$$

所以,

---

① 刘彝程在 1885 年的试题中给出了该公式的证明。关于此公式的证明,详见:田淼,《刘彝程垛积术研究》,《数学史研究文集》,第五辑,70—81.

$$\sum_{r=1}^{n} r^3 = D_{3,n} + 4D_{3,n-1} + D_{3,n-2}$$ ①

刘彝程对于四次方垛和五次方垛也给出了类似的代数证明方法。此后，他得出结论，五乘方以上的乘方垛求和公式可以依此类推。

刘彝程除对传统垛积术涉及的问题均做出深入的研究外，还承汪莱之绪，利用三角垛公式探讨排列组合问题。求志书院1886年秋季课考的第一题的设题如下：

> 假如甲乙丙丁诸字，各一个，其诸字之和为卯，欲将诸字排列之，使不同色，则一个一排者，必有卯色；卯个一排者，只有一色，自一个一排至二个一排及三个一排，顺是以往求各排色数，可以三角诸乘垛术入之，亦可以开方廉隅表或二项例入之，试以少数代其卯而详证之。

题意为，有甲、乙、丙、丁等卯个字，以这些字做排列，如做一个字的组合，必有卯种排列结果。如做卯个字组合，则只有一个结果。刘彝程要讨论的是，如欲取两个字、三个字，或更多数目的字作组合，可以有多少种可能性。题中还要求对结论给出详细的论证。从设题来看，这是一个组合问题，刘彝程对于排列顺序不同所造成差别未予考虑。刘彝程给出的该题的答案为：

> 设卯为四，则一个一排者，必有甲、乙、丙、丁四色。二个一排者，必有甲+乙，甲+丙，甲+丁，乙+丙，乙+丁，丙+丁六色。三个一排者，必有甲+乙+丙，甲+乙+丁，甲+丙+丁，乙+丙+丁四色。四个一排者，只有甲+乙+丙+丁一色。其得四、六、四、一各色，设卯为三，则一个一排者有甲、乙、丙三色，二个一排者，有甲+乙、甲+丙、乙+丙三色。三个一排者，有甲+乙+丙一色，共得三、三、一各色。由是推之，设卯为五，必共得五、十、十、五、一各色，卯为六，必共得六、一五、二〇、一五、六、一各色，惟此诸色有序可求。若卯为四，可以四为垛积之高，则高减一之平垛必为六（即三之平垛），高减二之立垛必为四（即二之立垛），高减三之三乘垛必为一，（即一之三乘垛），无论卯为何数，其诸式之序，必合于三角诸垛，乘递增一，高递减一之积。

刘彝程详细给出了当卯为4,3,2时，各排列的具体情况，依其结果归纳出组

① 刘彝程，《简易庵算稿》，卷2.

合公式与垛积术公式的对应关系。此后，刘彝程又称：

> 又考廉隅表，以横行计之，为一⊥二⊥一，一⊥三⊥三⊥一 之类。若除去左边单一不用，则余数皆与排列所得相符。再廉隅表，如以第二斜行各数为诸垛之高，则第三斜行各数皆为高减一平垛，第四斜行各数皆为高减二立垛，顺是至高减尽而止。所以廉隅表以斜行计之，即垛积表也。

刘彝程通过比较得出欲求结果与三角垛表是完全一致的。所以，排列公式既与垛积术公式一一对应，则自然也与开方廉隅表一一对应。同样，在西方，二项式展开式的系数构成帕斯卡三角形，单从结构上来看，帕斯卡三角形与贾宪三角形完全相同，所以，排列公式与垛积及开方廉隅表所存在的关系对于二项式公式的系数表也是同样存在的。这便是刘彝程答案的下一段内容：

> 又如以卯为三角垛之高，则高减一之平垛为 $\frac{\text{二}}{\text{卯}(\text{卯}-\text{一})}$，高减二之立垛，为 $\frac{\text{二}\cdot\text{三}}{\text{卯}(\text{卯}-\text{一})(\text{卯}-\text{二})}$，准代数术二项例式，
>
> $$(\text{甲}+\text{天})^{\text{卯}} = \text{甲}^{\text{卯}}\left(\text{一}+\text{卯}\frac{\text{甲}}{\text{天}}+\frac{\text{二甲}^{\text{二}}}{\text{卯}(\text{卯}-\text{一})\text{天}^{\text{二}}}+\frac{\text{二}\cdot\text{三}\cdot\text{甲}^{\text{三}}}{\text{卯}(\text{卯}-\text{一})(\text{卯}-\text{二})\text{天}^{\text{三}}}\right.$$
>
> 如以甲/天 求得连比例各率，复依次以指数卯为高，而以高递减一乘递增一之垛积为各率倍数，即得。故排列之法，亦与二项例相通。①

汪莱在《递兼数理》中已讨论过上述公式。刘彝程所做的仅是以卯为 4，3，2 例举了相应的组合情况，得出组合公式与三角垛公式的对应关系。但从我们的视角来看，他的例举法虽然可以算作是对排列元的个数小于 4 的组合情况给出了详尽的说明，但这却不能算作是对一般性组合公式的证明。同样，刘彝程虽然通过分析得出贾宪三角形、三角垛表及二项式系数之间的关系，但亦未给出进一步证明。

从上文中我们知道，斜线划分的方法为刘彝程垛积术研究的基本方法。值得注意的是，刘彝程经常利用该法给出一些基本公式——如平方垛公式

---

① 刘彝程，《简易庵算稿》，卷二，制造局刊本，光绪庚子，丙戌，8a—b.

和倒置三角平垛及立垛与他垛逐层相乘公式——的解释，对于其他可以利用垛积性质转化为这些已知垛积公式的垛，他通常是首先论述转化的具体方式，然后以代数方法给出一般性的证明和解释。此外，在倒置三角平垛与立垛和他垛逐层相乘的解答中，刘彝程称："三图外无庸再证。"可见，他将其图解式的划分方法视作是对垛积公式的证明。我们认为，刘彝程的斜线分割法是中国传统方法。将一个图形分成不同部分，并利用这些部分得到一个立体的体积或平面图形的面积，是中国传统数学处理几何问题时常用的方法。不仅如此，在《四元玉鉴》中，朱世杰正是利用斜线划分贾宪三角形以得到三角垛系统的。所以，我们可以说，刘彝程的方法既是对朱世杰方法的发展，亦是对朱世杰方法的合理复原。

其次，斜线划分法很有可能是清代末年垛积研究的通用方法。1866年，刘彝程抵达上海，结识了李善兰。不久，李善兰至信华蘅芳，称刘彝程"为后生可畏者"[①]。在《简易庵算稿》中，刘彝程曾提到《垛积比类》，所以，李善兰的工作对刘彝程有着相当大的影响。不仅如此，刘彝程的垛积运算方法很可能也受到过李善兰的影响，换句话说，李善兰很可能也是以斜线分割法研究垛积术的。李善兰与罗士琳、戴煦、徐有壬等相识，所以，罗、戴、徐等可能也是使用同样的方法进行垛积研究的。也就是说，《简易庵算稿》中给出的斜线分割的垛积研究方法，很可能是清代末年朱世杰垛积传统的研究中的通用方法。

至清代末年，杨辉和朱世杰的垛积运算传统已得到了完全的理解、很好的复原以及长足的发展。但截止到1890年，中算家在垛积术的研究中还保持着传统的基本算法和传统的表达形式。李善兰的三角自乘垛公式和刘彝程任意两三角垛相乘的求和公式均是以传统方法得到的。从前面的两章我们已经看到，到1890年，中国的天元术已几乎被符号代数学所取代，而在三角学研究中，中国传统数学的内容和方法亦开始被逐步分离出来。垛积术是中国传统方法保留得最为持久和完全的数学领域。

① 李善兰，《至华衡芳》，转引自：严敦杰《李善兰年谱补遗》，《明清数学史论文集》，478.

第四节 1890年以后垛积术的发展

前文反复提到，19世纪中叶，符号代数学和微积分学已经传入中国。李善兰和刘彝程分别是《代数学》的翻译者和《代数术》的校算者，所以，二人均熟悉符号代数学方法。但李善兰在《垛积比类》中并没有使用符号代数表示法，而是以传统天元术进行计算的。这很可能是因为《垛积比类》中的大部分工作都是在李善兰翻译《代数学》和《代微积拾级》之前就已经完成的[①]。上文已述，刘彝程在推导垛积公式的过程中已用到代数学方法，但其基本计算和证明方法均属传统数学范畴，且书中的公式表达及证明的方式亦是传统数学的模式。[②] 可以说，直到1890年，垛积术研究的基本方法尚未受到传入的西方数学的影响。但此后，垛积术的研究方法及表述形式均发生了很大变化。这一变化是由刘彝程对三角垛公式的代数化开始的。

1890年，刘彝程在求志书院的课试中给出了4个三角垛公式的代数表达式，以现代数学符号表述，刘彝程对这4个公式可以表述为：

$$D_{p,n}=\sum_{r=1}^{n}\frac{p(p+1)\cdots(p+r-2)}{(r-1)!}$$

$$D_{p,n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{r(r-1)\cdots(r-i-1)}{i!}\cdot\frac{p(p-1)\cdots(p-i+1)}{(i-1)!}$$

$$D_{p,n}=\frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!}$$

及
$$D_{p,n}=\frac{n(n+1)\cdots(n+p-1)}{p!}$$

第一法中，$\frac{p(p+1)\cdots(p+r-2)}{(r-1)!}$即是$D_{p,n}$各层之数，故并诸级即为$D_{p,n}$

第二法，准1890年夏一题，$D_{p,n}=b_{p,1}D_{1,n}+b_{p,2}D_{2,n-1}+\cdots+b_{b,p}A_{p,n-p+1}$

---

① 李善兰全面论述尖锥术的著作《方圆阐幽》及利用尖锥术探讨对数和三角函数幂级数展开式的著作《弧矢启秘》、《对数探源》都是完成于1845年，尖锥术基本公式与《垛积比类》中的乘方垛和三角自乘垛等公式密切相关。所以，至少有一部分《垛积比类》中的工作是完成于1845年之前的。

② 上文中用到的类似代数表达式的垛积运算符号均是笔者改写的。

其中，
$$b_{p,n}=\frac{(p-1)\cdots(p-i+1)}{(i-1)!}$$

所以，
$$D_{p,n}=\sum_{i=1}^{p}\frac{(p-1)\cdots(p-i+1)}{(i-1)!}\ \frac{r(r-1)\cdots(r-i+1)}{i}$$

第三法：由 1887 年秋一题，设 $p<r$，

$$\frac{(p+1)\cdots(p+r-1)}{(r-1)!}=\frac{r\cdots p\cdots(p+r-1)}{(r-1)!\ \ p(p-1)\cdots r}=\frac{r(r+1)\cdots(r+p-1)}{p!}$$

第四法虽为常法，便一直未有证明。刘氏以乘方垛公式验证该式，称由 $n^2=D_{2,n}+D_{3,n}$

$$n+n^2=D_{2,n}+D_{1,n}+D_{3,n}=2D_{2,n}$$

$$D_{2,n}=\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$n^3=D_{3,n}+4D_{3,n-1}+D_{3,n-2}$$

$$n^3+3n^2+2n=D_{3,n}+4D_{3,n-1}+3D_{2,n}+3D_{2,n-1}+3D_{2,n-2}+2D_{1,n}$$

整理得：
$$n^3+3n^2+2n=6D_{3,n}$$

所以，
$$D_{3,n}=\frac{1}{3!}n(n+1)(n+2)$$

同理，
$$D_{4,n}=\frac{1}{4!}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

四乘以上，可依此类推①。

刘彝程给出的关于垛积计算公式的 4 个代数表达式的证明虽然并不完备，诸如，对于第四法，他只推导出前四个方垛的成果。他称以上诸乘垛可依此类推，理虽不错，但欲要证明这个结论却并不是一件容易的事情。且他以前关于诸乘方垛求积公式的证明本身也是不具一般性的。但是，刘彝程指出，第四法虽为常用之术，但在此前却未被证明，所以他试图证明该公式。刘彝程很可能是第一个提出这一早为中算家所熟知的三角垛基本公式是需要证明的数学家。不仅如此，他的全部证明过程均采用符号代数方法。所以，虽然他的证明并不完备，但该算题有两点突出之处。第一，刘彝程给出了垛积公式的符号代数表达式，此为垛积术之代数化，或曰西化的关键一步。第二，刘彝程试图以符号代数方法证明垛积术的基本公式，这意味着他欲以符号代数证明垛积术的基本公式，这势必会带动整个垛积方法的代数化。此外，刘彝程曾于 1888 年夏天的算题中引入了“Δ”作为三角垛的符号。

---

① 刘彝程. 简易庵算稿. 4.

下文中我们将看出，刘彝程的代数形式的垛积表达法及其表述三角垛的特殊符号均被其学生所继承。

刘彝程多年在求志书院、广方言馆及融斋书院任教，培养出一批学生。且求志书院的课考形式为公开出题，听人自备考卷参加考试，优胜者由巡道捐廉授奖，所以在上海及其附近地区有较大的影响。参加求志书院课考及曾随刘彝程学习的很多学生都在垛积术方面有所成就。其中崔朝庆和张爔二人所撰的《垛积一得》和《堆垛术》可称是垛积术的西化过程中的典型例证。

崔朝庆(1860—1943)自称："吾师兴化刘省庵(刘彝程)先生主讲上海求志书院，常以垛积题课士。"[①]可见，他曾在求志书院中随刘彝程学习过垛积术。1898年，崔朝庆出版了《垛积一得》。在该书序言中，崔朝庆称：

> 《玉鉴》中"茭草形段"、"如象招数"、"果垛叠藏"三门，推演垛积可谓曲尽变化之妙，《则古昔斋算学》中《垛积比类》图、表、法三者俱备，条分派别，详细言之，朱氏以后当首屈一指。余研究二书已非一日，依法推演，触处皆通，惟询其立法之理，则漫无以应。历来算书中亦无之。近忽有所悟，因取三角平垛、立垛、三乘垛演成代数细草。质之朋好，佥谓足传，盖各种变垛皆出于三角，诸垛之理即得以明，各种变垛之理神而明之。[②]

崔朝庆长时间研究《四元玉鉴》及《垛积比类》两书，以书中方法推演垛积算题已能做到"触处皆通"。但从这两书中，他却无法找到垛积术的立法之理。不仅如此，在其他算书中，他也未能找到满意的答案。于是，他自己取三角平垛、立垛和三乘垛公式，以代数方法演成细草。很显然，他认为他的细草即是这三个公式的立法之理。下面，让我们来看看他所给出的上述公式的立法之理。

以崔朝庆对三角平垛求和公式 $D_{2,n}=\dfrac{n(n+1)}{2}$ 的讨论为例，其叙述相当于下述算式：

由于，$n\times n=$	$1\times n$	即，$1\times(1+n-1)$
	$1\times n$	$1\times(2+n-2)$

① 崔朝庆. 垛积通术序.

② 崔朝庆. 垛积一得序. 垛积一得.

$$
\begin{array}{ll}
1 \times n & 1 \times (3 + n - 3) \\
\cdots & \cdots \\
1 \times n & 1 \times (n - 1 + 1) \\
1 \times n & 1 \times n
\end{array}
$$

将上式分来两幅，其中的一幅为

$$
\begin{array}{llll}
 & 1 \times 1 \text{ 即：} & & 1 \\
+ & 1 \times 2 & + & 2 \\
+ & 1 \times 3 & + & 3 \\
 & \cdots & & \cdots \\
+ & 1 \times (n - 1) & + & (n - 1) \\
+ & 1 \times n & + & n
\end{array}
$$

而另一幅为

$$
\begin{array}{llll}
 & 1 \times (n - 1) & i.e. & n - 1 \\
+ & 1 \times (n - 2) & & + n - 2 \\
+ & 1 \times (n - 3) & & + n - 3 \\
 & \cdots & & \cdots \\
+ & 1 \times 2 & & + 2 \\
+ & 1 \times 1 & & + 1
\end{array}
$$

这样，

$$n \times n = 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + \cdots + (n - 1) + (n - 1) + n$$

所以，

$$n^2 + n = 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + n - 1 + n - 1 + n + n$$

最终，崔朝庆得到

$$D_{2,n} = \frac{n(n + 1)}{2}$$

崔朝庆的证明可以被整理为如下形式：

$$
\begin{aligned}
n^2 &= n \times n \\
&= n + n + n + \cdots + n \\
&= \sum_{i=1}^{n} i + (n - i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} n - i
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n-1} i$$

这样，

$$n^2 + n = 2\sum_{i=1}^{n} i$$

所以，

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

崔朝庆用同样的方法给出另外两个公式的证明。①

崔朝庆的著作中不包括任何中国数学家没有得到的新发现。崔朝庆的证明方法可以说是刘彝程斜线划分法的代数化形式，所以，其解释和证明垛积术公式的方法亦未有突破前人之处。然而，通过他的序言和证明过程，我们可以看出，他继承了刘彝程对垛积方法的代数化和严谨化的追求。且更进一步，他将刘彝程的斜线划分的证明方式亦转化为代数表达式。不仅如此，崔朝庆所说的，他所有的朋友都觉得他的工作是有意义的，这显示出，垛积术或者更进一步说，数学基本计算公式是需要证明的，已成为与崔朝庆同代的学者和数学家的共识，而符号代数是他们普遍接受的严谨的证明方法。

1903 年，刘彝程的另外一个学生张爔，出版了他的《堆垛术》。关于张爔的生平和工作我们所知甚少。他发表了两部著作，即，《窃悟庵算稿》和《堆垛术》。《堆垛术》是一部垛积术专著，将之与李善兰的《垛积比类》做一比较，我们便可以发现，书中的表达形式及证明方法均有明显的不同。

开篇伊始，张爔称：

> 堆垛之代数式，以“朵”代任何垛。若专言三角垛，则以“△”易之。专言四角垛，则以“□”易之。
>
> 兹且勿分三角垛、四角垛，概以任何垛明之，如为任何甲垛天层之全积，甲为指数（又为本垛乘数加一），天为层数，然无庸拘泥，但观记于“朵”之上右角者，便为指数，记于“朵”之下右角者便为层数。②

这相当于给出了垛积算法中的一些特殊符号，例如，“朵”表示一个一般垛，

---

① 崔朝庆．垛积一得序．

② 张爔．堆垛术．1903．1a．

这样，朵$\overset{甲}{\underset{天}{}}$便表示一个甲乘天层垛。即本书中的 $D_{p,n}$，小三角形“△”表示三角垛，小四方形“□”表示四角垛①。在张爔的书中，

$$D_{p,n} = 1 + p + \frac{p(p+1)}{2!} + \cdots \frac{p(p+1)\cdots(p+n-2)}{(n-1)!}$$

被写成如下形式：

$$\triangle^{卯}_{天} = 一 \oplus \frac{一}{卯} \oplus \frac{一 \cdot 二}{(卯 \oplus 一)} \oplus \cdots \oplus \frac{一 \cdot 二 \cdot \cdots \cdot (天 - 一)}{卯(卯 \oplus 一)\cdots(卯 \oplus 天 - 二)}$$②

张爔的这个表达式与上文提到的刘彝程为垛积设计的4个代数表达式的第一式是一样的。在此式之后，张爔给出两条公理，其一为

$$D_{p,n} = \sum_{i=1}^{n} d_i \text{ 及 } D_{p,n-1} = D_{p,n} - d_n$$

其二为
$$d_n = D_{p,n-1}$$

此后，他利用这两个公理去证明下述公式：

$$D_{p-1,n} = D_{p,n} - D_{p,n-1}$$

《堆垛术》通篇都是均采用上述表示法，以此，他给出了50个公式及它们的代数证明。下文便是书中的一个题目：

由于，$D_{p-1,n} = D_{p,n} - D_{p,n-1}$

$D_{p-1,n-1} = D_{p,n-1} - D_{p,n-2}$

故，　$D_{p-1,n} - D_{p-1,n-1} = D_{p-2,n} = D_{p,n} - 2D_{p,n-1} + D_{p,n-2}$

所以，　$D_{p-2,n} = D_{p,n} - 2D_{p,n-1} + D_{p,n-2}$

$D_{p-2,n-1} = D_{p,n-1} - 2D_{p,n-2} + D_{p,n-3}$

故，　$D_{p-2,n} - D_{p-2,n-1} = D_{p-3,n} = D_{p,n} - 3D_{p,n-1} + 3D_{p,n-2} - D_{p,n-3}$

……

由此，则

---

① 在《简易庵算稿》中，刘彝程已经引入了这几个符号。

② 张爔仍采用分母在上分子在下的分数和分式的表达方式。在《堆垛术》中，$\oplus$号表述为⊥，－号表述为丅。这两个符号为清末数学家中所通用。

$$D_{p-i,n} = D_{p,n} - iD_{p,n-1} + \frac{i(i+1)}{2!}D_{p,n-2} - \cdots + (-1)^{n-1}D_{p,1}$$ ①

令 $i = -i$

$$D_{p+i,n} = D_{p,n} + iD_{p,n-1} + \frac{i(i+1)}{2!}D_{p,n-2} + \cdots + D_{p,1}$$

且

$$\Delta_{p-i,n} = \Delta_{p,n} + i\Delta_{p,n-1} + \frac{i(i+1)}{2!}\Delta_{p,n-2} + \cdots + \frac{i(i+1)\cdots(i+n-2)}{(n-1)!}\Delta_{p,1}$$

当 $p = 0$ 时，

$$\Delta_{i,n} = 1 + i + \frac{i(i+1)}{2!} + \cdots + \frac{i(i+1)\cdots(i+n-2)}{(n-1)!}$$

至此，张爔给出了三角垛求积公式的证明。

由于， $\Delta_{i,n} = 1 + i + \frac{i(i+1)}{2!} + \cdots + \frac{i(i+1)\cdots(i+n-3)}{(n-2)!}$

故，

$$\Delta_{i,n} - \Delta_{i,n-1} = \Delta_{i-1,n} = \frac{p(p+1)\cdots(p+n-2)}{(n-1)!}$$

所以，

$$D_{p-1,n} = D_{p,n} - \Delta_{i-1,2}D_{p,n-1} + \Delta_{i-2,3}D_{p,n-2} - \cdots + (-1)^{i}D_{p,n-i}$$

$$D_{p+1,n} = D_{p,n} + \Delta_{i-1,2}D_{p,n-1} + \Delta_{i-2,3}D_{p,n-2} + \cdots + D_{p,n-i}$$

且

$$D_{p,n} = D_{p+i,n} - \Delta_{i-1,2}D_{p+i,n-1} + \Delta_{i-2,3}D_{p+i,n-2} -+ (-1)^{i}D_{p+i,n-i}$$

$$D_{p,n} = D_{p-i,n} + \Delta_{i-1,2}D_{p,n-1} + \Delta_{i-2,3}D_{p-i,n-2} + \cdots + (-1)^{i}D_{p-i,n-i}$$ ②

上文为《堆垛术》中的第一组公式及其推导过程。本书中除将“朵$\genfrac{}{}{0pt}{}{甲}{天}$”改写为 $D_{p,n}$，将中国数字写为阿拉伯数字及将分数写法由分母在上分子在下改为分子在上分母在下，以方便现代读者阅读和理解之外，未做其他改动。从上文可以看出，在张爔的《堆垛术》中，垛积术已被彻底代数化了，也即是西化了。

1909年，周达(1878—?)，20世纪初活跃的中国数学家，亦发表了一部垛

---

① 张爔虽然试图完全以符号代数法给出垛积公式的证明．但他的证明方法仍是不完全归纳法．

② 张爔．堆垛术．1b—8b.

积专著—《垛积新义》。周达在该书自序中称：

> 垛积之术，滥觞于九章之商功少广，张氏《缉古》仅绎其绪①，朱氏《玉鉴》乃畅其流。国朝汪孝婴（莱）、董方立（祐成）、罗茗香（士琳）传九渊诸家，并有作述，至李秋纫（李善兰）氏著《垛积比类》，枝分条贯，推阐无遗，读者叹观止矣。顾因题立术，就术演草，仅明条段，未揭根源一贯之旨，或有间焉。金匮华若汀氏，以积较演垛积，不必逐步换形，但取本术如法布衍，无不曲折赴题，综诸杂糅，归于易简，所谓立法之法，造数之数，后来居上，讵不然欤？迩来研求泛倍数之理，积思所通，悟得垛积新义，创为三术。第一术，析诸垛为同层增乘各三角垛，与华氏用积求较者同。第二术，析诸垛为减层增乘各三角垛，视用同层者更形简易。第三术，迳析诸垛为多乘方，以免化法之繁，综是三术，不盈万言，所操至约，而所驭至博，凡一切无名庞杂之垛，任取入算，无不涣然冰释。六通四辟肆应无方，前人所目为至繁至难，今皆至简至易，以柢《比类》，较诸书，当仁不让，固自谓远过之矣。②

在该书中，周达给出了一种新的垛积运算方法。举例来说，周达对他的第一个公式给出如下叙述：

> 第一术
>
> 命任何卯乘之积，其高为天，其积为函（天），又命高为0之积为函(0)，高为一之积为函(1)，高为2之积为函(2)……，则可令：

$$
函(天) = 甲_0 + 甲_{一}天 \oplus 甲_{二}\frac{一\cdot二\cdot一}{天(天\oplus一)(天\oplus二)} \oplus \cdots \oplus 甲_{卯}\frac{一\cdot二\cdots(卯\oplus一)}{天(天\oplus一)\cdots(天\oplus卯)}
$$

其$甲_0$、$甲_{一}$$甲_{二}$……$甲_{卯}$为泛倍数。

周达以函数式表达垛积求和公式，以 A 代甲，以 x 代天，以函数符号 f 代替函（　），并将数字和计算符号改写成现代符号，我们可以将上文译为：

对任意 n 层三角垛，令其高为 x，并以 $f(x)$ 表示三角垛之积，我们可以得到

---

① 此处周达叙述有误。《缉古算经》为唐王孝通所撰。按前后文，此处所指应为张丘建的《张丘建算经》。

② 周达．垛积新义．抄本．1a—b.

$$f(x) = A_0 + A_1 \frac{x(x+1)}{2!} + A_2 \frac{x(x+1)(x+2)}{3!} + \cdots + A_i \frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{(n+1)!} \qquad (周1)$$

下面,我们继续以代数符号表述周达给出的求三角垛积的过程:

令 $x = 0$,则(周1)式变为 $f(0) = A_0$

将其代入(周1)式,得

$$f(x) = f(0) + A_1 x + A_2 \frac{x(x+1)}{2!} + \cdots + A_n \frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{(n+1)!} \qquad (周2)$$

令 $x = 1$,则(周2)式变为

$$f(1) = f(0) + A_1 + A_2 + \cdots + A_n \qquad (周3)$$

令 $x = 2$,则(周2)式变为

$$f(2) = f(0) + 2A_1 + 3A_2 + \cdots + (n+2)A_n \qquad (周4)$$

顺此类推,至令 $x = n+1$,可得

$$f(n+1) = f(0) + (n+1)A_1 + \frac{(n+1)(n+2)}{2!}A_2 + \cdots + \frac{(n+1)(n+2)\cdots(2n+1)}{(n+1)!}A_i \qquad (周\ n+1)$$

然后,以常法通过(周1)、(周2)、……(周 $n+1$)这 $n+1$ 个方程式求得 A_1、A_2、A_3……A_n,代入(周2)式,即可得到求垛积和的公式。①

周达推导垛积求和公式的方法为待定系数法,该方法在《代数学》中被引入中国,当时称为"迭代法"。② 与崔朝庆和张爔的著作一样,周达的《垛积新义》中亦不含有新的垛积成果。但他们三个人均以不同的方式试图将垛积术的基本计算方法建立在西方数学的基础上。从他们的著作风格可以看出,至清代末年,中国传统数学的最后一个阵地垛积术亦终于被西化了。

综上所述,1860年以后,符号代数和微积分学开始在中国传播,并逐渐扎下根来。曾得出很多出色成果的传统代数学——天元术和四元术几乎很快就被符号代数所取代。然而,垛积术的发展情况则与之不同。直至1885年,刘彝程还是以传统方法进行垛积术研究的。作为《代数术》、《微积溯源》、《三角数理》、《决疑数学》等著作的校算者,刘彝程熟悉当时传入的所有的西方数学内容,那么为什么他在垛积研究中选择了传统方法和表述形式呢?

---

① 周达.垛积新义.1b—3b.

② 棣么甘著.伟烈亚力,李善兰译.代数学.16.5a—14b.

实际上，不仅是刘彝程，清代从事垛积术研究的杜知耕、方中通、《数理精蕴》的编撰者及李善兰等都精通传入的西方数学，但无一例外地，他们均采用传统方法进行垛积研究。其间很重要的一个原因可能是，当时西方相关的内容和研究方法并没有传入中国。同时，我们也不能忽略另一个原因，即虽然李善兰、刘彝程等精通传入的西方数学知识，但他们均自幼学习传统数学，阅读传统的或当时学者撰写的传统模式的数学书籍。所以，他们很自然地以传统的思维模式考虑问题，同时，他们也习惯于传统著作的著述方式 —— 李善兰的著作中通常不含证明或证明性的解释，而刘彝程的著作虽然加入了解释性的证明，但他满足于一般归纳法及解释性的证明方式。

李善兰和刘彝程的学生们与他们的老师有着很大的不同。他们自幼接触西方数学，虽然他们的老师也传授给他们一些传统数学内容和研究方法，但他们的思维方式却强烈地受到西方数学著作的影响。刘彝程的两个学生均不满足于他们的老师所给出的垛积证明，他们要揭示出垛积术的基本定理的理论基础。虽然崔朝庆、张爔和周达在证明垛积术基本公式时所用的具体方法不同，但他们不约而同地将寻找垛积术的理论基础的目光投向了西方数学。当然，上述三人对垛积术公式的证明并不完备或严谨，实际上，数学归纳法是证明垛积术公式的最为有效的方法之一，在西方，“数学归纳法”的名称是在 1838 年才由棣么根给出确切定义的。在此之前，虽然数学家们已用该方法进行证明，但该方法当时还并不规范①。直至清代末年，中国数学家们似乎并未了解和掌握这个新的数学证明方法。

垛积术在清代的发展为我们提供了很好的理解和探讨一个传统数学分支的西化过程的素材。从本章的叙述可以看到，早期，虽然中国数学家受西方数学著作的写作方式和证明形式的影响，开始改变了他们自己的著述形式，但从总体上来说，他们还采用传统的计算、证明和表述方式。有趣的是，正是为了研究传入的西方数学知识，垛积术在清代中期成为一个活跃的课题，当时，董祐诚、项名达、徐有壬、戴煦、李善兰等利用垛积术成果从事三角函数的幂级数研究，但这一中、西融合的研究方式并未使得垛积术的基本研究方法和表述形式受到西方数学的影响。当符号代数传入之后，刘彝程等数学家在有些问题中利用代数方法推导计算公式。但，其基本的研究方法仍属于传统数学方法的范围，代数方法对于他们来说，不过是计算技巧。1890 年

---

① John, M. Dubbey, “DEMorgan”, Dictionaryofscientificbiography, IV, p.35.

以后,刘彝程及青年一代的数学家开始思考垛积术的理论基础,对于他们来说,符号代数不仅是有效的计算方法,也是一个基本证明方法。通过他们,在19世纪末,中国传统垛积术终于被彻底西化了。

结 语

作为全书的结语，我们想强调以下两点。

一、跨文化的科学交流并不是简单地传播科学知识的问题，在传播过程中，科学知识本身的优势也许并不起决定性作用。中国数学的西化历程便很好地说明了这一问题。

西方数学最初主要由耶稣会士引入中国。耶稣会士最大的目标是将中国基督化，为了达到这一目的，他们需要得到士大夫阶层的支持和中国皇帝对他们在中国居住，甚至公开传教的允许。传播数学知识是他们实现这一目标的手段。这样，他们对数学知识的传播便受到了其传教政策及他们在中国的地位的影响。在本书第一章中我们已经看到，负责中国耶稣会事务的利玛窦和龙华民的传教方式的不同对西方数学在中国的传播带来了怎样的影响。早期参与传播西方数学知识的中国学者多是皈依天主教的士大夫，他们学习和传播西方数学知识的目的亦不单纯。徐光启是为了扩大天主教的影响而传播科学的，当然，这并不意味着他要放弃儒家传统。他设想能够借助耶稣会士阐释的入世的天主教教义来补儒易佛，以拯救濒临崩溃的社会秩序。当时大部分信教的中国人很可能与徐光启有同样的希望。然而，天主教与儒学传统中的伦理观并不相同，当传教士们开始在民间传教并干涉到皈依者祭孔祀祖的程式之时，一部分中国士大夫看清天主教义中与中国传统伦理相悖之处，他们指出，佛教和道教的天堂地狱之说可以劝人孝弟，而示惩夫不孝、不弟、造恶业者。故对于儒家学说是有所补益的。而天主教劝人不祭祀祖先，是教人不孝也。由此，较之天主教，它们的道德伦理从根本上更接近于儒家传统。由此，引发了第一次大规模反天主教的事件。传教士们被勒令离开中国内陆，虽然仍有一些传教士潜伏在内地，但西方数学知识的公开传播就此中断。

此后，借辽东战事及历法改革的机会，耶稣会士回到北京，并进入宫廷

机构。西方三角学知识及计算工具亦随着火炮技术和西方治历方法传入中国。

耶稣会士地位的变化对西方数学知识的传播也有着决定性的影响。当耶稣会士得以进入历局参与修订历书和制造火炮之后，部分耶稣会士可以利用这两项工作得到在中国合法居留的权利，并以此保护在华传教事业。这使得他们不再热衷于在民间和学者间传播欧洲知识，同时，他们也不需要为了迎合学者们的不同需求传播相应的西方知识。这窄化了他们传播的知识的范畴。17 世纪传入的数学知识多与火炮制造和历法修订有关。

在中国方面，明代末年对数学知识本身有兴趣的学者并不多。接受及积极传播西方数学知识的主要是天主教的皈依者、对实学感兴趣的士大夫、钦天监官员及对各方面知识有兴趣的通儒型学者。出于各自不同的目的，他们对西方知识的取舍、态度及研究深度亦有不同。传播者和接受者双方的特点决定了西方数学知识传播的特点和内容。

清代初年，耶稣会士在中国宫廷中的地位更为稳固，但他们传播西方科学知识的热情反而降低。根据在明末传入的西方天文历法知识，他们已经获得稳定地位，这便使得传入新的知识变得没有必要。他们的下一步是要利用当时的地位皈化中国帝王，或者至少得到可以在中国公开传教的敕令。清代初年，只有波兰传教士穆尼阁引入了新的数学知识——对数。中国学者因他愿意传授天文、数学知识而不要求向他学习的学者入教而对他非常赞赏。

明代遗民出于对明代灭亡的反思提倡经世之学，并致力于儒家经典的复原。这使得他们一方面普遍关注西方传入的科学技术知识，另一方面则严格排斥西方的哲学和宗教。由于他们中的一些人拒绝为清廷服务，所以，他们可以有更多的时间从事天文、数学及其他学术研究。同时，夷夏之辩也促使他们对中、西知识进行更深入的比较研究。在这样的学术背景下，产生了黄宗羲、颜元等热心数学教育的著名学者及王锡阐、梅文鼎等天文、数学专家。

与此同时，传教士则过分乐观地估计了形势。如果说早期耶稣会士以合儒为手段，对儒家经典中模糊的部分给出利于传教的解释，而儒家士大夫中的皈依者以援耶“补儒”为目的，那么，清代初年，传教士们则开始觉得他们可以进入超儒的阶段，他们在宗教布道方面更为公开并开始强调天主教和儒教伦理间的不同点及宗教神学中超验的部分。儒家学者士大夫则为了

纯化儒家传统而更加排斥其他文化的影响。二者间不可调和的矛盾,促成了他们之间的对立。在顺治帝去世而康熙帝尚未成年期间,由于帝王不能够为传教士提供足够强大的保护,发生了杨光先教案。虽然由杨光先引发的排教对西方知识传播的阻碍作用及他对天文历法知识的无知使得他成为中国近代科学史上的一个灰色人物,但在当时,他还是得到了很多儒家学者和士大夫的同情。

杨光先排教引发的历狱及解决该历狱的过程使康熙帝对学习西方数学产生了兴趣。传教士为了迎合康熙帝的需要,系统地为他讲授了西方数学、天文学知识。代数学就是在这样的背景下被引入中国的。但很可能由于康熙帝学习西方知识的动机的复杂性,他并不积极推广西方知识在中国的普遍传播。传教士引入的新知识的传播范围仅限于宫中。从某种角度上来说,传教士成为康熙帝的私臣,他们在讲解西方知识的同时,亦参加了大地测量及尼布楚条约的谈判等工作。康熙帝不时向大臣们炫耀他得自耶稣会士的天文学、数学知识并藉此讥讽汉人在这两方面的无知。

宫廷以外,学者们继续研究和比较中、西数学和天文学知识。梅文鼎等一些数学家致力于会通中、西数学。由于西方传教士介绍的最新成果未能传到民间,而传统数学著作又很难得见,所以,他们会通工作的基础并不牢固。这一点我们还将在下文中提到。

康熙帝很可能希望传教士永远留在宫廷并能召之即来,以利用西方知识协助他及他的继任者处理国家事务。为了回报传教士的工作,他对天主教表现出一定程度的宽容。然而,传教士传播天主教的使命再一次对西方数学的传播产生了决定性的影响。

17 世纪下半叶,欧洲在宇宙论方面有了很大的发展。但当时在华耶稣会士还是固守 17 世纪上半叶编成的《崇祯历书》中介绍的宇宙体系及计算方法和相关常数与数表。一个重要的原因是,宇宙论与天主教教义直接相关,且如果坚持明末传教士所宣传的西方知识是一个整体的说法,那么,对宇宙论和天文常数的改变便意味着承认西方知识本身是不够完备的,这很可能引起中国人对天主教教义的怀疑。然而,不引入新的方法和知识就要冒不能准确预报天文现象的风险,这亦很可能对耶稣会士的事业造成毁灭性打击。传教士内部围绕着是否应该引入最新知识产生分歧和争论。此后,天文现象预测的失准及耶稣会士迫于时势所承认的欧洲在相关领域的新发展,很有可能使康熙帝对耶稣会士的忠诚程度感到怀疑。对在中国传

播西方知识影响最大的还是"礼仪之争"。当天主教教义和儒家传统发生根本冲突的时候,康熙帝选择了与中国社会结构对应的儒家传统。这标志着耶稣会士使康熙帝皈依天主教的努力的彻底失败,并造成了西方知识传入的再一次中断。

放弃传教士的康熙帝一方面以"西学中源"说对其学习和研究西方知识的行为给出合乎儒家传统的解释。另一方面则致力于使中国人在天文学、数学等事务上的自立。其结果是《数理精蕴》的编撰。

清中叶《四库全书》的编撰使得一批传统数学著作得到较为广泛的流传。在乾嘉学派数学家的努力下,这批数学著作被重新校勘,其中的数学成果亦被重新理解,由此出现了一个中国传统数学复兴的高潮。然而,18 世纪中叶以后,虽然几乎不再有新的西方数学知识传入中国,但中国数学西化并未中断。我们在下文中还会再回到这个问题。

19 世纪 40—60 年代,两次鸦片战争使得部分中国人开始清醒地看待中、西科学技术之间的差距。在以后的 50 年间,中国次第出现了从学习西方军事技术到学习西方政治社会理论以求富求强的自强运动和维新运动。同时,虽然当时在华传播西方知识的主体仍是传教士,但较之明末清初的传教士,他们具有更强的世俗性,并承担了更多的世俗工作,他们在传播西方科学和技术方面的顾忌亦较他们的先辈少得多。最终,传统的政治体系和教育体系走向崩溃。西方数学作为西方军事技术及民用技术的基础得到了普遍重视,并最终进入基础教育体系并主导了中国数学研究的方向。中国数学的西化正是在这样的环境中基本完成的。

西方数学在明代政权将被取代之际被引入中国,而中国数学西化的历程在清代政权接近灭亡及传统文化、政治体系遭遇毁灭性重创之时完成,这本身亦显示出其与当时中国社会、文化环境之间的不可分割的关系。

二、虽然西方数学知识在中国的传播是断续的,但在 300 年间,中国数学的西化则并未间断过。

前文已述,中国数学的西化并不是一个单纯的数学知识的传播问题,中国的数学西化主要表现在三个方面:一是,西方数学知识在中国的传播和研究情况。二是,中国数学家对西方数学研究内容的认识和态度的转化与发展。三是,中国数学家的研究方法和思维模式的转化过程。从 16 世纪末到 20 世纪初的 300 余年间,中国数学的西化是由这三个方面构成的整体。正因如此,明末至清末之间,虽然西方数学的输入呈阶段性,但中国数学的西

化的历程却是持续的。

明代传入的最为重要的数学知识有欧几里得的演绎性几何体系、西方笔算数学和三角学。虽然《几何原本》中严格的演绎推理体系在当时并没有被普遍的理解和接受,但数学著作必须包含理论性的阐述则成为此后中国数学家的共识。自明末以来,中国数学著作的著述方式的转化为中国数学家逐步认同西方数学的理论体系的一个重要表现。此外,徐光启在翻译西方天文历算方法时提出的"翻译"、"会通"、"超胜"的口号亦成为此后中算家们追求的目标。

清代初年,王锡阐和梅文鼎等的会通工作虽然以提倡古学为口号,但他们所撰写的数学书籍的体例与传统数学著作已有显著不同,且他们多采取欧几里得式的证明方式。梅文鼎虽然试图以传统勾股术解释西方数学,宣称"几何即勾股",但他对勾股术中最基本的勾股定理的证明却用到了西方平行线理论。他对方程术的解释也是在未见到传统数学著作的基础上做的。所以,梅文鼎自认的对传统数学的研究和会通工作都受到了西方数学的影响。梅氏稍后的学者江永清楚地看到了这一点,他并不满意梅文鼎以会通及"西学中源"说掩饰其数学研究的来源的方式。认为应该明确地承认西方数学的地位。

清中叶以后,很少有西方数学知识传入中国。但《数理精蕴》的刊印和《四库全书》的编撰,以及其他传统数学著作的复原与重新流传,使得西方数学知识和中国传统数学的知识真正相遇于同一时空。然而,我们此处不得不强调的是,所谓的西方数学知识和方法是由部分到华传教士引入的,经过康熙帝筛选及理解的一部分知识,它远不能完全反映当时西方数学的全貌及发展趋势。在这样的基础之上,中国数学家对中、西数学方法进行了深入的研究、比较及发展。虽然部分数学家提倡传统知识和古代数学,但从本书第五、六、七三章中,我们可以看到,他们亦对传入的西方数学方法有较为全面的了解。西方数学的思维方式及西方数学著作的著述方式对他们都产生了很大的影响。同时,他们以传统数学方法研究传统数学中未曾涉及的西方数学内容,这本身亦是数学西化的一个表现。通过清代中叶数学家的工作,传入中国的西方数学知识不仅得到了深入的理解,还得到一定的发展。虽然他们所得到的数学成果并不能和同时国际数学的发展相比,但这也可以算是中算家试图"超胜"西方数学的一次努力。

19 世纪 60 年代以后,西方代数学、微积分学、解析几何、概率论等都被

较为系统地传入中国。面对这些明显优越的数学方法,中国数学家大都表现出较为客观的态度:承认西方方法的优势,同时在教学和研究中传播和应用这些方法。时至19世纪末至20世纪初,西方数学的内容、方法和思维方式已完全得到中国数学家的认同,传统数学方法亦基本被取代。

对于这样的结局,我们可能会有很多的感慨或追思,但本书只限于初步描述数学在这一历史阶段的发展过程。对这一段历史的评述,对中、西数学发展历史的比较以及对中国数学的西化的评价等等,都是值得我们继续探讨的问题。

主要参考文献

埃德蒙·帕里斯．耶稣会士秘史．北京：中国社会科学出版社，1990．

艾儒略，西学凡．天学初函．

白晋．康熙皇帝．赵晨译．刘耀武校．哈尔滨：黑龙江人民出版社，1981．

白尚恕．《测量全义》的底本问题初探．科学史集刊．第11期．地质出版社，1984．

白尚恕．介绍我国第一部三角学——《大测》．数学通报．1963．(2)．

包世臣．费隐与知录序．费隐与知录．1842年刊本．

乔纳森·波特著．中国近代早期的科学界．林贻纹，王冰译．科学史译丛．1．中国科学院自然科学史研究所．1983．

薄树人，清钦天监人事年表．科技史文集．第一辑(天文学史)．上海：上海科学技术出版社．86—101．

曹汝英，潘应祺．算学杂识．卷4．1898年广州刊本．

陈恩，等修．缪荃孙，等纂．南菁高等文科第一类学堂．江阴县续志．卷6．1920．

陈恩，等修．缪荃孙，等纂．南菁书院．江阴县续志．中国方志丛书．成文出版社影印．卷6．1920．

陈鼓应，辛冠洁，葛荣晋，明清实学简史．北京：社会科学文献出版社，1994．

陈际新．割圆密率捷法序．割圆密率捷法．1839年刊本．

陈居渊，焦循儒学思想与易学研究．济南：齐鲁书社，2000年．

陈世仁．少广补遗．四库全书本．

陈棠．四元玉鉴易简草．1910年刊本．

陈献章．书漫笔后．引自：黄宗羲．明儒学案．卷五．杭州：浙江古籍

出版社，1994.

陈旭麓．近代中国社会的新陈代谢．上海：上海人民出版社．1992.

陈垣．汤若望与木斋忞．吴泽主编．陈垣史学论著选．上海：上海人民出版社，1981.

陈琇莹．请开算学科摺．洋务运动．第 2 册．

陈子龙．农政全书凡例．农政全书．

程贞一，席泽宗．陈子模型和早期对于太阳的测量．中国古代科学史论续篇．京都大学，1991．363—379.

程大位．算法统宗．1716 年刊本．

筹办夷务始末(同治朝)．北京：故宫博物院影印本．1930.

崔朝庆．垛积通术序．垛积通术．1935.

崔朝庆．垛积一得序．垛积一得．古今算学丛书．

崔朝庆．读四元玉鉴记．南菁书院札记本．1894 年刊本．

崔景荣等．为胜制(应为制胜)务须西铳敬述购募始末书．徐文定公集．增订本．卷三．

戴敦元．九章算术细草图说序．九章算术细草图说．鸿语堂刊本，1820.

戴震．策算序．策算．戴震全书（张岱年主编)．合肥：黄山书社，1997．第 5 册．5.

戴震．割圆弧矢补论．戴震全书（张岱年主编)．合肥：黄山书社，1997．第 5 册．79—96.

戴震．句股割圆记．戴震全书（张岱年主编)．合肥：黄山书社，1997．第 5 册．117—254.

戴震．与是仲明论学书．戴震全书（张岱年主编)．合肥：黄山书社，1997．第 6 册．370—372.

戴震．凖望简法．戴震全书（张岱年主编)．合肥：黄山书社，1997．第 5 册．39—78.

邓恩(*George H. Dunne*)著．从利玛窦到汤若望．余三乐译．上海：上海古藉出版社，2003.

邓玉函．大测．新法算书．四库全书本．

邓玉函．大测序．大测．新法算书．卷 9.

邓玉函．割圆八线表．四库全书本．

狄考文．辑．邹立文．述．笔算数学．北京：京师同文馆刊本，1896.
狄考文．辑．邹立文．述．笔算数学．武备学会校刊本，1902.
丁立钧主编．南菁文钞．三集．1901年刊本.
丁韪良．格物测算.京师同文馆刊本.
丁韪良．李善兰传．格致汇编．上海：格致书室刊本，1877，夏．2.1a.
丁韪良．同文馆课程表．转引自:朱有瓛中国近代学制史料．第一辑．上册.
董次容．代数演题叙．代数演题．1906年刊本.
董光璧主编，中国近现代科学技术史，湖南教育出版社，1995.
董化时．四元玉鉴详草．董氏所著书本．1920.
董化时．元代汇通序．1922年石印本.
董祐成．董方立遗书．1830.
董祐诚．割圆连比例图解跋．割圆连比例图解．董方立遗书本.
董祐诚．割圆边比例术图解序．割圆连比例图解.
董祐诚．堆垛求积术序．堆垛求积术．董方立遗书本.
棣么甘著．伟烈亚力，李善兰译.代数学．1859年刊本，
邸永君．清代翰林院制度．北京：社会科学文献出版社，2002.
丁伟志，陈崧，中体西用之间，中国社会科学出版社，1995.
杜石然，朱世杰研究．宋元数学史论文集．北京:科学出版社，1966. 259—273.
杜知耕．几何论曰.四库全书本.
杜知耕．几何论约序．几何论约．四库全书本.
杜知耕．数学钥．四库全书本.
樊洪业．耶稣会士与中国科学．北京：中国人民大学出版社，1992.
方豪．李之藻研究．台北：台湾商务印书馆，1966.
方豪．中西交通史．长沙：岳麓书社，1987.
方恺．代数学通艺录.1890年刊本.
方以智．物理小识.宁静堂刻本．1884.
方以智．物理小识自序．物理小识．康熙三年重订刻本.
方中通．数度衍．四库全书本.
费正清，剑桥中国晚清史，(1800—1911).北京:中国社会科学出版社，

1985.

费赖之著．罗雅谷．在华耶稣会士列传及书目．中外关系史或著译丛．冯承钧译．北京：中华书局，1995.

冯桂芬．校邠庐抗议．中州古籍出版社,1998.

冯桂芬．采西学议．校邠庐抗议．209—213.

冯桂芬．陈君传．碑传集补．卷42．清代碑传全集．上海：上海古籍出版社．1987.

冯桂芬．西算新法直解.1876年吴县冯氏校邠庐刊本.

冯桂芬．西算新法直解序．西算新法直解．1876年吴县冯氏校邠庐刊本.

冯桂芬．变科举议．校邠庐抗议．179.

冯澂，强自力集，1900年，上海著易堂书局石印本.

冯澂.学天元宜从借根方起说．数学眰录．强自立集.

冯锦荣．明末熊明遇〈格致草〉内容探析．自然科学史研究，1997，16(4)：304—328.

冯焌光，郑藻如．计呈酌拟广方言馆课程十条．中国近代学制史料.第1辑．上．221—224.

冯天瑜，黄长义．晚清经世实学．上海：上海社会科学院出版社，2002.

傅大为．中算史垛积源流新论——“商功”与“少广”两条线索的演化．异时空里的知识追逐．台北:东大图书公司．69—113.

傅兰雅.口译．华衡芳．笔述．决疑数学．上海：飞鸿阁石印本，1897.

傅良主编．南菁札记．江阴使署刊本．1894.

傅圣泽.阿尔热巴拉新法．抄本．中国科学院自然科学史研究所图书馆藏.

傅圣泽．详阿尔热巴拉新法与旧法之所以异．阿尔热巴拉新法．抄本．中国科学院自然科学史研究所图书馆善本部藏.

傅庭芳．对李善兰《垛积比类》的研究．自然科学史研究．4(1)，1985，267—283.

傅祚华．《畴人传》研究．明清数学史论文集．219—260.

葛荣晋．中国实学思想史．北京：首都师范大学出版社，1994.

顾长声．传教士与近代中国．上海：上海人民出版社．1991.

顾颉刚. 秦汉的方士与儒生. 上海：上海古籍出版社，1978.

顾应祥. 勾股论说. 勾股算术. 1553年刊本.

顾应祥. 勾股算术序. 勾股算术. 1553年刊本.

顾应祥. 测圆海镜分类释术序. 引自:阮元. 畴人传. 卷三十.

顾应祥. 测圆算术序. 测圆算术. 1553年刊本.

顾应详. 弧矢算术序. 弧矢算术. 1553年刊本.

光绪帝. 诏定国是. 光绪朝东华录. 第四册. 4093.

郭伯恭.《四库全书》纂修考. 民国丛书.

郭世荣. 罗士琳《三角和较算例》简介. 中国数学史论文集(三). 济南：山东教育出版社，1987. 113—122.

郭世荣. 李锐《观妙居日记》研究. 谈天三友. 149—166.

郭世荣. 梅文鼎的会通中西数学思想. 数学史研究文集. 第六辑. 1998. 56—64.

郭世荣. 明代数学与天文知识的失传问题. 法国汉学. 第六辑. 北京：中华书局，2002. 320—335.

郭世荣:纳贝尔筹在中国的传播与发展,中国科技史料. 第18卷(1997). 第1期. 3—11.

郭世荣. 清代中期数学家焦循与李锐之间的几封信. 谈天三友. 125—140.

郭世荣. 西方传入我国的第一部概率论专著——《决疑数学》. 中国科技史料. 第10卷(1989). 第2期. 90—96.

郭书春. 贾宪《皇帝九章算经细草》初探. 自然科学史研究. 1988，7(4)，1988. 328—334.

郭书春. 九章算法比类大全提要. 九章算法比类大全. 中国科学技术典藉通汇·数学卷. 二. 1—3.

郭书春. 九章算术细草图说提要. 九章算术细草图说. 中国科学技术典藉通汇·数学卷. 第四卷. 郑州：河南教育出版社，1994.

郭书春. 评戴震对〈九章算术〉的整理. 明清数学史论文集. 261—294.

郭书春. 艺游录提要. 中国科学技术典藉通汇·数学卷. 5—141.

郭书春. 中国古代数学. 北京：商务印书馆,1997.

郭书春. 关于《九章算术》及其刘徽注. 九章算术(郭书春汇校). 沈阳：辽宁教育出版社，1990.

郭书春. 古代世界数学泰斗刘徽. 济南: 山东教育出版社. 1990.

郭书春. 刘钝主编. 李俨、钱宝琮科学史全集. 第8卷. 沈阳: 辽宁教育出版社, 1998.

海麻士辑. 三角数理. 华蘅芳, 傅兰雅译. 江南制造局刊本. 1877.

韩琦. 白晋的《易经》研究和康熙时代的"西学中源"说. 汉学研究. 第16卷. 第1期. 1998. 185—201.

韩琦. 从《明史》历志的撰修看西学在中国的传播. 科史薪传. 61—70.

韩琦. 错综法义提要. 中国科学技术典藉通汇·数学卷. 683—684.

韩琦. 奉教天文学家与"礼仪之争"(1700—1702). 相遇与对话:明末清初中西文化交流国际学术研讨会文集. 北京: 宗教文化出版社, 2003. 381—399.

韩琦. 君主与布衣之间——李光地在康熙时代的活动及其对科学的影响. 清化学报. 新26卷. 第4期. 1996. 421—445.

韩琦. 康熙时代传入的西方数学及其对中国数学的影响. 中国科学院自然科学史研究所博士论文. 1991.

韩琦, 詹嘉玲. 康熙时代西方数学在宫廷的传播——以安多和《算法纂要总纲》的编纂为例. 自然科学史研究. 第22卷(2003). 第2期. 145—156.

韩琦.《数理格致》的发现——兼论18世纪牛顿相关著作在中国的传播. 中国科技史料. 1998, 19(2). 78—85.

韩琦.《数理精蕴》对数造表法与戴煦的二项展开式研究. 自然科学史研究. 1992, 11(2). 109—119.

韩琦."自立"精神与历算活动——康乾之际文人对西学态度之改变及其背景. 自然科学史研究, 2002, 21(3): 210—221.

韩琦. 中国科学技术的西传及其影响. 石家庄: 河北人民出版社. 1999.

A.W. 恒幕义编著. 清代名人传略. 清朝名人传略翻译组译. 西宁:青海人民出版社, 1995.

洪万生. 焦循给李锐的一封信. 谈天三友. 141—148.

洪万生主编, 谈天三友, 台北:明文书局股份有限公司, 1993.

洪万生. 谈天三友: 焦循、汪莱和李锐——清代经学与算学关系试论. 谈天三友. 台北:明文书局, 1993. 43—124.

洪万生，刘钝．汪莱，李锐与乾嘉学派．谈天三友．9—36．

洪万生．张文虎的舒艺世界：一个数学社会史的取向．汉学研究．台北:汉学中心，1999．11(2)．163—184．

胡道静．印刷术反馈与西方科学第二次东传的头一个据点:上海墨海书馆．出版史料．1987．第4期；1988．第1期．

胡居仁．居业录．引自：黄宗羲．明儒学案．卷二．杭州：浙江古籍出版社，1994．

胡明杰．四元术的一般性程度．自然科学史研究．10（1)，1991．8—16．

胡明杰．“四元消法问题”别解．北京师范大学学报(自然科学版)．1989．1．91—96．

胡适．戴震对江永的始终敬礼．胡适手稿．第一集,1966．

胡威立．著．艾约瑟．译．李善兰．笔述．重学．1866刊本．

黄宗羲．宋元学案．浙江古籍出版社．1985．

胡铁珠．晓庵新法提要．中国科学技术典籍通汇·天文卷．六．429—431．

胡铁珠．《历学会通》中的宇宙模型．自然科学史研究．第11卷(1992)．第3期．224—232．

华蘅芳．恒河沙馆算草序．恒河沙馆算草．1885年华氏刊本．

华蘅芳．开方别术．华氏中西算学全书初集本．1872．

华蘅芳．开方古义．华氏中西算学全书初集本．1872．

华衡芳．论加减乘除开方之用．学算笔谈．

华蘅芳．论学算之法．学算笔谈．卷5．

华蘅芳．微积溯源序．微积溯源．上海：江南制造局刊本．1874．

华蘅芳．行素轩时文序．行素轩时文存．

华蘅芳．学算笔谈．1882年刊本．

华里司辑．微积溯源．傅兰雅译．华衡芳述．上海：江南制造局，1874．

华里司著．代数术．傅兰雅,华蘅芳译．1889年刊本．

华世芳辑．龙城书院课艺．1901年刊本．

华世芳．至缪荃孙．艺风堂友朋书札．上海：上海古籍出版社，1983．

黄承吉．加减乘除释序．加减乘除释．里堂学算记．

黄一农. 清初钦天监中各民族天文家的权力起伏. 新史学. 第 2 卷(1991). 第 2 期. 75—108.

黄一农. 择日之争与中西历狱. 清华学报(新竹). 新 21 卷. 第 2 期. 1991. 247—280.

黄一农. 中西文化在清初的冲突与妥协——以汤若望所编民历为个案研究. *Western Learning and Christianity in China. China—Zentrum and the Monumenta serica Institute* (*Roman Malek Ed. Sankt Augustin*: *China—Zentrum*, *the Monumenta Serica Institute*, 1998), 431—438.

黄以周. 南菁讲舍文集序. 南菁讲舍文集. 1889 年刊本.

黄以周辑. 南菁讲舍文集. 1889 年刊本.

黄钟骏. 畴人传四编. 澧阳黄氏留有余斋算学本. 1898.

黄宗羲. 安定学案. 宋元学案. 杭州: 浙江古籍出版社. 1990.

计文德. 从《四库全书》探究明清间输入之西学. 台北: 汉美图书有限公司, 1991.

纪昀, 陆锡熊, 孙士毅. 四库全书·数学钥题要. 数学钥. 四库全书本. 1a—b.

纪昀, 陆锡熊, 孙士毅, 陆费墀. 四库全书·新法算书提要. 新法算书. 四库全书本.

贾步纬. 上海广方言馆算学课艺序. 上海广方言馆算学课艺. 上海著易堂刊本.

江晓原. 试论清代"西学中源"说. 自然科学史研究. 第 7 卷. 第 2 期. 1988. 101—108.

江晓原. 天学真原. 沈阳: 辽宁教育出版社, 1995.

江永. 数学. 北京: 商务印书馆, 1936.

江永. 续数学. 四库全书本.

蒋良骐. 东华录. 北京: 中华书局, 1980. 卷 16.

焦循. 天元一释. 里堂学算记. 1799 年刊本.

焦循. 加减乘除释. 里堂学算记. 1799 年刊本.

焦循. 开方通释. 里堂学算记. 1799 年刊本.

焦循. 石埭儒学训导汪君孝婴别传. 雕菰楼集.

焦循. 释弧. 里堂学算记本.

焦循. 易通释叙目. 易通释. 雕菰楼易学.

焦循．致李锐．转引自:朱家声，吴裕宾．焦循年谱．谈天三友．

焦循．修补六家术序．雕菰楼集．卷15

焦循．第五册算书焦记．衡斋算学．第6册．夏燮鄱阳县署刊本,9a—b．

借根方比例．数理精蕴．下编．卷31—36．940—1109．

康熙帝．满文朱批奏折全译．北京：中国社会科学出版社，1996．

康熙帝．圣训．引自:章梫．康熙政要．中共中央党校出版社，1994．356—357．

康熙帝．珠批．康熙与罗马关系文书．台北：台湾学生书局．1973．70—71．

康熙帝．三角形推算法论．康熙政要．卷十八．引自:章燮．康熙政要．中共中央党校出版社，1994．

M．克莱因．古今数学思想．申又枨,冷生明译．上海：上海科学技术出版社,1981．

冷东．叶向高与明末政坛．汕头：汕头大学出版社，1996．

礼部．崇祯二年四月二十九日礼部题为日食事．新法算书．四库全书本．

礼部．题为日食事．引自:新法算书．卷一．

李迪．对“如积释锁”的探讨．内蒙古师大学报(自然科学版)．30(2)．2001．6．167—173．

李迪．傅兰雅汉文译著目录,中国科学技术史论文集,内蒙古教育出版社,1991，153—172．

李迪．主编．中国数学简史．济南：山东教育出版社，1986．

李迪，白尚恕．我国近代科学先驱邹柏奇．自然科学史研究．3(4)．1994．378—390．

李迪，郭世荣．清初著名天文数学家梅文鼎，上海：上海科技文献出版社，1988．

李恭简修．魏俊,任乃庚撰．刘彝程传．续修兴化县志．1943年铅印本．

李光地．绩学堂文钞序．绩学堂文钞．梅彀成刊本．

李光地．陈祖武点校．榕村续语录．中华书局．1995．

李国祥，杨昶主编．明实录类纂．文教科技卷．武汉：武汉出版社，

1992.

李鸿章. 李鸿章会同曾国藩奏开办情形. 洋务运动. 第4册.

李鸿章.上海初次议立学习外国语言文字同文馆试办章程十二条. 朱有瓛编. 中国近代学制史料. 上海: 华东大学出版社, 1986. 第一辑. 上册: 216—218.

李鸿章. 奏办广方言馆摺. 筹办夷务始末(同治朝). 卷14. 故宫博物院影印本.

李康先. 题为朝请关防以便俯循职掌事. 缘起. 新法历书. 卷3.

李兰琴. 汤若望传. 北京: 东方出版社, 1995.

李培德. 对南怀仁科学工作的总评价. 传教士、科学家、工程师、外交家南怀仁. 北京: 中国社会科学文献出版社, 1994.

李培业.《陈厚耀算书》研究. 数学史研究文集 (李迪主编. 台北: 九章出版社, 呼和浩特: 内蒙古大学出版社). 第3辑. 72—77.

李锐. 勾股算术细草. 李氏遗书本.

李锐. 弧矢算术细草. 李氏遗书本.

李锐. 开方说. 白芙堂算学丛书.

李锐. 三统术衍钤跋. 三统术钤. 嘉定钱大昕全集.

李锐. 释轮序. 释轮. 里堂学算记, 1799年刊本. 1a—2b.

李锐. 天元一释序. 天元一释. 里堂学算记.

李锐.《衡斋算学》第五册跋. 衡斋算学. 6. 嘉树堂刊本.

李善兰. 测圆海镜序. 测圆海镜. 京师同文馆聚珍版.

李善兰. 代微积拾级序. 代微积拾级. 1a.

李善兰. 垛积比类序. 垛积比类. 则古昔斋算学本.

李善兰. 垛积比类. 则古昔斋算学本.

李善兰. 方圆阐幽. 则古昔斋算学本.

李善兰. 几何原本序. 几何原本. 1865年刊本.

李善兰. 开方别术序. 开方别术. 华氏中西算学全书初集本. 1872.

李善兰. 则古昔斋算学序. 则古昔斋算学. 1867.

李善兰. 重学序. 重学.

李天纲. 中国礼仪之争——历史·文献和意义. 上海: 上海古藉出版社, 1998.

李天经. 谨题为钦奉圣谕据实奏明事. 缘起. 新法历书. 卷3.

李细珠．晚清保守思想的原型——倭仁研究．北京：社会科学文献出版社．2000．

李俨．近代中算著术记．中算史论丛．第二集．李俨、钱宝琮科学史全集．第6册．494．

李俨．三角术和三角函数表的东来．中算史论丛．3．李俨钱宝琮科学史全集(郭书春，刘钝主编．沈阳：辽宁教育出版社，1998)．7．192—253．

李俨．唐宋元明数学教育制度．中算史论丛．4．李俨钱宝琮科学史全集．8．223—266。

李俨．中算家的级数论．中算史论丛．1．北京：中国科学院．1954．360—361．

李俨．伊斯兰教和中国历算的关系．中算史论丛．5．李俨、钱宝琮科学史全集(郭书春，刘钝主编)．沈阳：辽宁教育出版社，1998．8．423—441．

李冶．益古演段自序．益古演段．知不足斋丛书．

李冶．测圆海镜．四库全书本．

李约瑟．中国科学技术史．天文学．北京:科学出版社，1975．

李约瑟．中国科学技术史．第四册．北京：科学出版社，1975．

李兆华．董方立遗书提要．中国科学技术典藉通汇·数学卷．

李兆华．董祐诚垛积术与割圆术述评．古算今论．113—117．

李兆华．古算今论．天津科学技术出版社．2000．

李兆华．关于《数理精蕴》的若干问题．古算今论．1—25．

李兆华．衡斋算学校证．西安：陕西科学出版社，1998．

李兆华．李善兰垛积术与尖锥术略论．古算今论．80—101．

李兆华．时曰醇《百鸡术衍》．数学史研究文集．第二辑．123—132．

李兆华．汪莱《递兼数理》、《参两算经》略论．谈天三友．227—254．

李兆华．汪莱方程论研究．自然科学史研究．第11卷(1992)．第3期．193—208．

李兆华．汪莱球面三角成果讨论．古算新论．255—276．

李兆华．中国数学史．台北：文津出版社，1995．

李之藻．浑盖通宪图说序．浑盖通宪图说．天学初函本．

李之藻．同文算指．天学初函本．

李之藻．同文算指前编．同文算指．天学初函本．

李之藻．同文算指通编．同文算指．天学初函本．

李之藻．同文算指序．同文算指．天学初函本．

李之藻．职方外记序．职方外记．天学初函本．

李贽．续焚书．中华书局，1975．

利玛窦授，李之藻演．圜容较义．天学初函本．

利玛窦．天主实义．天学初函本．

利玛窦．徐光启译．测量法义．天学初函本．

利玛窦．译几何原本引．几何原本．天学初函本．

梁家勉．徐光启年谱．上海：上海古籍出版社．1981．

林力娜(K. Chemla)．数学与注释：《九章算术》注研究．田淼译．法国汉学．第六辑．2002．78—103．

林力娜．盈不足术的世界传播管见．科史薪传．122—131．

凌步芳．百砚斋算稿序．百砚斋算稿．1906．

凌廷堪．至焦循．释轮．里堂学算记本．

刘钝．从“老子化胡”到“西学中源”：“夷夏之辨”背景下外来文化在中国的奇特经历．法国汉学．第六辑．中华书局，2002．538—564．

刘钝．大哉言数．沈阳：辽宁教育出版社，1993．

刘钝．方程论提要．中国科学技术典藉通汇·数学卷．四．

刘钝．方圆幂积提要．中国科学技术典藉通汇·数学卷．四．

刘钝．勾股举隅、几何通解题要．中国科学技术典藉通汇·数学卷．四．

刘钝．弧三角举要提要．中国科学技术典藉通汇·数学卷．四．

刘钝．开方通释提要．中国科学技术典籍通汇·数学卷．郑州河南教育出版社．1993．4．1447．

刘钝．李锐与笛卡儿符号法则．谈天三友．263—284．

刘钝．略论李锐的数学研究方法——以方程正根个数的判定为例．谈天三友．255—262．

刘钝．梅文鼎在几何学领域中的若干贡献．明清数学史论文集．182—218．

刘钝．平三角举要提要．中国科学技术典藉通汇·数学卷．四．459．

刘钝．《数理精蕴》中《几何原本》的底本问题．中国科技史料．1991，12(3)：88—96．

刘钝，韩琦等编．科史薪传——庆祝杜石然先生从事科学史研究40周

年学术论文集．沈阳：辽宁教育出版社，1997．

刘光蕡．训味经时务斋诸生．烟霞草堂文集．民国间刊本．

刘徽．圆田术注．九章算术．武英殿聚珍版．卷一．

刘徽．勾股术注．九章算术．武英殿聚珍版．卷 9．1b．

刘坤一，张之洞．光绪二十七年六月二十七日奏摺．江楚会奏．清末刊本．

刘瑞骄．刘光蕡行状．烟霞草堂文集．民国间刊本．

刘彝程．简易庵算稿跋．简易庵算稿．上海：江南制造局刊本．1900．

刘彝程．简易庵算稿序．简易庵算稿．上海：江南制造局刊本．1900．

刘彝程．简易庵算稿．上海:江南制造局刊本,1900．

刘彝程．九章实义序．九章实义．简易庵石印本，1901．

刘彝程．九章实义．1901 年刘氏简易庵石印本．

刘禺生．张之洞罢除宾师．世载堂杂忆．北京：中华书局，1960．

卢靖．九章代数草．抄本．藏天津师范大学数学系图书馆．

罗光．徐光启传．台北:传记文学出版社，1982．

罗杰斯．南怀仁时代鲁汶大学的学术环境．传教士、科学家、工程师、外交家南怀仁．

罗密士撰.八线备旨．潘慎文，谢洪赉译．美华书馆铅印本．

罗密士撰．八线备旨四卷，八线学总习问一卷．潘慎文选译．上海：上海美华书馆石印本，1898．

罗密士．著．伟烈亚力，李善兰．译．代微积拾级．上海：墨海书馆刊本，1859．

罗士琳．比例汇通．1818．

罗士琳．比例汇通自序．比例汇通．1818 年刊本．1a—2b．

罗士琳．畴人传续编．观我生室汇稿本．

罗士琳．割圆密率捷法跋．割圜密率捷法．岑氏校刊本，1839．

罗士琳．弧矢算术补．1843 年刊本．

罗士琳．三角和较术．观我生室汇稿本．

罗士琳．三角和较术序．三角和较术．观我生室汇稿本．

罗士琳．三角和较算例．观我生室汇稿本．

罗士琳．四元玉鉴细草．1836 年刊本．

罗士琳．台堆积演．观我生室汇稿本。

罗雅谷．测量全义．新法算书．四库全书本．上海古籍出版社影印文渊阁本．

罗雅谷．测量全义序．新法算书．卷 87．

杰西·格·卢茨．中国教会大学史(1850—1950)．杭州：浙江教育出版社，1988．

骆滕凤．艺游录．1843 年刊本．

马楚坚．西洋大炮随传教士之引进及其对明清态势的改变．明清人物史事论析．南昌：江西高校出版社,1996．498．

马齐，张廷玉，蒋廷锡监修．大清圣祖仁皇帝实录．清实录．北京：中华书局影印，1985．

毛鸿宾．广东同文馆章程．筹办夷务始末(同治朝)．故宫博物院影印本．

毛际可．梅先生传．勿庵历算书目．知不足斋丛书本．

梅瑴成．赤水遗珍．梅氏丛书辑要本．61．

梅荣照．略论梅文鼎的《方程论》．自然科学史研究所数学史组编．科学史文集．第八辑(数学史专辑)．上海：上海科学技术出版社，1982．144—158．

梅荣照．王锡阐的数学著作——圜解．明清数学史论文集．97—113．

梅荣照．圜解提要．圜解．中国科学技术典籍通汇·数学卷．四．

梅荣照．明清数学概论．明清数学史论文集．1—20．

梅荣照主编．明清数学史论文集．南京：江苏教育出版社，1990．

梅荣照,王渝生，刘钝．欧几里得《原本》的传入和对我国明清数学的影响．明清数学史论文集．南京：江苏教育出版社,1990．53—83．

梅文鼎．测量．方程论．卷六．梅氏丛书辑要．卷十六．

梅文鼎．筹算．梅氏丛书辑要本．

梅文鼎．方程谬误之故．方程论．梅氏丛书辑要．卷十一．

梅文鼎．方程著论校刻缘起．方程论．梅氏丛书辑要．卷十一．

梅文鼎．方圆相容，方圆幂积．梅氏丛书辑要．卷二十四．

梅文鼎．弧三角举要序．弧三角举要．梅氏丛书辑要．卷 29．

梅文鼎．几何举隅．梅氏丛书辑要．卷十七．

梅文鼎．几何通解．梅氏丛书辑要．卷十八．

梅文鼎．寄怀青州薛仪甫先生．绩学堂诗钞．卷二．

梅文鼎．历学疑问．梅氏历算全书．四库全书本．

梅文鼎．历学疑问补．梅氏历算全书．四库全书本．

梅文鼎．论西历源流本出中土即周髀之学．历学疑问补．卷一．梅氏丛书辑要．承学堂刊本．5a—b．

梅文鼎．论中土历法得传入西国之由．历学疑问补．卷一．梅氏丛书辑要．承学堂刊本．

梅文鼎．平三角举要．梅氏丛书辑要本．

梅文鼎．三角法举要．勿庵历算书记．四库全书本．46b．

梅文鼎．勿庵历算书记．四库全书本．

梅文鼎．上孝感相国．绩学堂诗钞．

梅文鼎．与潘稼堂书．绩学堂文钞．卷一．

梅文鼎．雨坐山窗，得程偕柳书，寄到吴东岩诗箑，依韵合之．绩学堂诗钞．卷四．

梅文鼎．圜解序．绩学堂文集．卷二．37a—b．

梅文鼎．赠吴胥巘．绩学堂诗钞．卷 3．乾隆间梅觳成校刊本．

梅鷟，尚书考异．丛书集成初编．上海：商务印书馆．1937．

缪朝铨．秋澄算稿自序．秋澄算稿．1892 年刊本．

缪荃孙，祁埙．续碑传集．卷 24．

闵萃详．张先生行状．舒艺室随笔．1874 年刊本．

闵廷德．中西算法大成禁止私自翻刻启示．中西算法大成．1901 年铅印本．

明安图．弧背求通弦率数法解．割圆密率捷法．卷 3．

明安图．弧矢弦相求图解．卷 3．2b—13a．

明安图．圆密率捷法．1839 年岑建功刊本．

穆尼阁著．薛凤祚注．历学会通．正集．

穆尼阁，薛凤祚．三角算理．双啸室藏书．抄本．中国科学院自然科学史研究所图书馆藏．

南怀仁．辨依西洋新法五字并中国奉西洋正朔．天主教东传文献．页 348—353．

聂辑椝．上海广方言馆经费数目．中国近代学制史料．第一册．上．

潘衍桐．请开艺学科折．转引自：中国近代学制史料．第二册．

佩雷菲特著，王国卿，毛凤支、谷炘，夏春丽，钮静籁、薛建成译，停滞

的帝国——两个世界的撞击，三联书店，1995.

皮锡瑞．经学历史．丁卯年春．涵芬楼影印本．

钱宝琮.戴震算学天文著作考.钱宝琮科学史论文集.151—174.

钱宝琮．《九章算术》盈不足术流传欧洲考．中国科学院自然科学史研究所编．钱宝琮科学史论文选集．北京：科学出版社．1993，83—96.

钱宝琮．授时历法略论．钱宝琮科学史论文集．李俨、钱宝琮科学史全集．第九卷．

钱宝琮.宋元时期数学与道学的关系．宋元数学史论文集．北京：科学出版社，1966．225—240.

钱宝琮．汪莱〈衡斋算学〉评述．钱宝琮科学史论集．李俨钱宝琮科学史全集．沈阳：辽宁教育出版社，1998．9．252.

钱宝琮．增乘开方法的历史发展．宋元数学史论文集．北京：科学出版社,1966．36—59.

钱宝琮主编．中国数学史．北京：科学出版社，1992.

钱宝琮．中国数学中之整数勾股形研究.中国科学院自然科学史研究所编．钱宝琮科学史论文选集．北京：科学出版社．1983.

钱大昕．赠谈阶平序．潜研堂文集．卷 23．嘉定钱大昕全集．第 9 册．

钱穆．国史大纲．修订本．北京：商务印书馆，1996.

钱穆．中国 300 年学术史．北京：中华书局．1984.

桥本敬造.《历象考成》の成立(《历象考成》的形成)．薮内清、吉田光邦主编．明清时代の科学技术史．京都:Institute for Humanistic Studies，1970，49—92.

秦蕙田．五礼通考．四库全书本．

任道斌．方以智年谱．安徽教育出版社，1983.

任松如．四库全书答问．民国丛书．7—29.

容肇祖．李卓吾评传．上海：商务印书馆．1936.

阮元．畴人传．观我生室汇稿本．

沈康身．从《视学》看十八世纪东西方透视学知识的交融和影响．自然科学史研究．第四卷(1985)，258—266.

沈括．梦溪笔谈．1631 年马元调刊本．

沈钦裴．四元玉鉴细草．王萱铃抄不全本．现藏北京图书馆善本部．

沈钦裴．四元玉鉴细草．稿本,北京图书馆藏．

沈善蒸辑．广方言馆算学课艺．上海：上海著易堂书局刊本．

沙百里(J. Charbonnier)著．中国基督徒史．耿昇，郑德弟译．北京:中国社会科学出版社,1998．

沈德符．万历野获篇．北京：中华书局，1980．

史静寰．狄考文和司徒雷登在华的教育活动．台北：文津出版社，1991．

史松，林铁军．清史编年．北京：中国人民大学出版社，1985．

舒新城编．中国近代教育史资料．北京：人民教育出版社．1981．

四库全书馆．四库全书·历算全书提要．历算全书．四库全书．

孙尚扬．基督教与明末儒学．北京：东方出版社，1994．

谭嗣同．浏阳算学馆．引自:中国科学技术团体．上海：上海科学普及出版社．1990.12—23．

谈泰．开方通释序．开方通释．里堂学算记．1799．

汤若望．历法西传．新法算书．四库全书本．卷98．

汤若望．民历铺注解惑．耶稣会罗马档案馆明清天主教文献(钟鸣旦，杜鼎克主编.台北:台北利氏学社,2002).第六册.465—544．

汤若望等改编,西洋新法历书(提疏、奏疏,1629—1645),见:中国科学技术典籍通汇．天文卷．八．郑州：大象出版社,1998．874—875．

汤若望．新法表异．新法算书．四库全书本．卷99．

汤志钧．近代上海大事记．上海辞书出版社．1989．

特古斯．清代中算家的递加数．自然科学史研究，1995，14(4)：337—348．

田淼．刘彝程垛积术研究．数学史论文集(李迪主编．呼和浩特：内蒙古师范大学出版社，台北：九章出版社)．5．1994,70—81．

田淼．刘彝程〈简易庵算稿〉研究．天津师范大学硕士论文．1992．

田淼．清末书院的数学教育．中国科学院自然科学史研究所．博士论文．1997．

田淼.清末数学家与数学教育家刘彝程．数学史研究文集(李迪主编)．第三辑．台北：九章出版社，呼和浩特：内蒙古大学出版社．117—122．

田淼．清末数学教师的构成特点．中国科技史料，1998，19(4)：19—24．

田淼．清末数学教育对中国数学家的职业化的影响．自然科学史研

究，1998.17(2)：119—128.

田森.《四元玉鉴》的清朝版本及清人对《假令四草》的校勘研究. 自然科学史研究. 18(1999)，1. 36—47.

田森. 四元消法研究. 李迪从事科学史工作四十周年纪念会议宣读，1995.

万斯同. 送梅定九南还序. 转引自：杨向奎. 新编清儒学案. 第一卷. 济南：齐鲁书社，1985.

万历帝. 谕礼部. 破邪集. 卷一. 转引自：明史欧洲四国志注释. 161.

汪莱. 递兼数理. 衡斋算学.嘉树堂刊本.

汪莱. 开方通释序. 开方通释. 德化李氏刊本.

汪莱. 叁两数说. 叁两算经. 衡斋遗书. 卷二.

汪莱. 叁两算经. 衡斋遗书. 卷二.

汪莱. 原始. 叁两算经. 衡斋遗书.

汪晓勤. 伟烈亚力与中西数学交流. 中国科学院自然科学史研究所博士论文，1999.

汪宜楷. 汪莱年谱. 谈天三友. 333—354.

汪曰桢. 翠微山房数学序. 翠微山房数学. 上海：上海鸿宝斋石印本，1897. 1a.

王国维. 聚珍本戴校水经注跋. 观堂集林. 卷 12.

王立新. 美国传教士与晚清中国现代化. 天津：天津人民出版社，1997.

王萍. 西方历算学之输入. 台北：中央研究院近代史研究所专刊. 17. 1980.

王韬. 王韬日记. 中国近代人物日记丛书. 北京：中华书局，1987.

王文素. 算学宝鉴. 稿本. 中国科学技术典籍通汇·数学卷.二.

王锡阐. 历策. 转引自：阮元. 畴人传. 卷 35.

王锡阐. 两弧损益第十. 圜解. 抄本. 中国科学技术典藉通汇·数学卷.四.

王锡阐. 晓庵新法自序. 晓庵新法. 守山阁丛书本.

王锡阐. 晓庵新法. 守山阁丛书本.

王阳明. 传习录. 王阳明全集. 卷一.

王阳明. 答罗整庵少宰书. 语录. 吴光，钱明，董平，姚延福等编较.

王阳明全集．上海：上海古籍出版社，1992．上．卷二．

王阳明．答顾东桥书．语录．王阳明全集．卷二．

王阳明．语录．王阳明全集．上．卷三．

王扬宗．傅兰雅与近代中国的科学启蒙．北京：科学出版社，2000．

王扬宗．江南制造局翻译书目新考．中国科技史料．16(2)．1995．3—18．

王扬宗，明末清初“西学中源”说新考．科史薪传．沈阳：辽宁教育出版社，1997．71—83．

王渝生．李善兰研究．明清数学史论文集．334—408．

王元稚．致汪康年．汪康年师友书札．上海：上海古籍出版社．1986．

伟烈亚力．数学启蒙．上海：墨海书馆．1853．

伟烈亚力．数学启蒙自序．数学启蒙．1853．

魏若望．编．南怀仁—鲁文国际学术研讨会论文集．北京：社会科学文献出版社，2001．

魏源．书赵校水经注后．魏默深遗文．载：周寿昌．思益堂日记．卷五．光绪戊子夏刊本．

倭仁．反对同文馆算学馆摺．筹办夷务始末(同治朝)．卷四十七．

倭仁．同治六年四月奏．筹办夷务始末(同治朝)．卷四十七．

倭仁．奏摺．筹办夷务始末(同治朝)．卷四十八．

吴嘉善．吴氏算书二十一种．1872年刊本．

吴庆坻．通饬各府厅州县变通书院章程札．皇朝蓄文编．卷十六．转引自：朱有瓛．中国近代学制史料．上海：华东师范大学出版社．1986．第一辑．下册．163．

吴思孝．句股割圆记序．句股割圆记．微波谢本．1a—b．

吴学颢．几何论约序．几何论约．四库全书．

吴裕宾．“谈天三友”易为哪仨？谈天三友．

席淦．弧矢启秘图解．古今算学丛书．

席淦，贵荣．同文馆算学课艺．上海：著易堂石印本，1896．

席文．王锡阐．王锡阐研究文集．47—63．

席泽宗．试论王锡阐的天文工作．王锡阐研究文集．1—20．

夏炘．衡斋遗书跋．衡斋遗书．

夏原吉监修．太祖实录．明实录．台北：中央研究院历史语言研究所

校印，1962.

项名达. 象数一原. 1888年上海高斋汇刻本.

项名达. 象数一原序. 象数一原. 1888年上海高斋汇刻本.

萧开泰辑. 游艺课草初集. 1898年刊本.

萧穆. 刘融斋别传. 续碑传集. 清代碑传全集. 上海：上海古籍出版社. 1987.

肖书云，测圆全义，1904年刻本.

谢和耐. 中国文化与基督教的冲撞. 余硕，红涛，东方译. 沈阳：辽宁人民出版社，1989.

谢和耐. 中国与基督教. 耿升译. 王元化主编. 海外汉学丛书. 上海：上海古籍出版社，1991.

熊三拔口授. 周子愚，卓尔康笔记. 表度说. 天学初函本. 15b—23a.

熊三拔撰说. 徐光启劄记. 简平仪说. 天学初函本.

熊明遇. 表度说序. 表度说. 天学初函本. 4a.

熊明遇. 格致草自序. 格致草. 函宇通本.

熊明遇. 七克引. 七克. 天学初函本.

熊月之. 西学东渐与晚清社会. 上海：上海人民出版社，1994.

徐凤先. 中国古代异常天象观. 自然科学史研究. 1994，第13卷. 第3期. 201—208.

徐光启. 测量法义序. 测量法义. 天学初函本.

徐光启. 测量异同. 天学初函本. 1a.

徐光启. 句股义. 天学初函本.

徐光启. 句股义序. 句股义. 天学初函本.

徐光启. 函件. 式古堂书画汇考. 引自:徐光启年谱.

徐光启. 几何原本序. 几何原本. 天学初函本.

徐光启. 几何原本杂议. 几何原本. 天学初函本.

徐光启. 简平仪说序. 简平仪说. 天学初函本.

徐光启. 恳祈圣鉴,以完大典事. 新法算书. 卷二. 四库全书本.2b.

徐光启. 泰西水法序. 泰西水法. 天学初函本.

徐光启. 同文算指序. 同文算指. 天学初函本.

徐光启. 条议历法修正岁差疏. 治历缘起. 新法算书. 四库全书本,卷一.

徐光启．为修改历法事．缘起．新法算书．卷一．

徐光启．先妣事略．增订徐文定公文集．卷一．

徐谦．简易庵算稿跋．简易庵算稿．上海：江南制造局刊本，1900．

徐世昌．清儒学案．北京：中国书店．1990．

徐义保．对《益古集》的复原与研究．数学史研究文集（李迪主编．台北：九章出版社，呼和浩特：内蒙古大学出版社）．第一辑．1990．64—73．

徐有壬．演元九式序．演元九式．观我生室汇稿．

徐有壬．造各表简法序．造各表简法．务民义斋算学本．

徐宗泽．明清间耶稣会士译著题要．上海：中华书局，1949．

徐宗泽．中国天主教传教史概论．民国丛书．上海：上海书店影印本，1990．

爱新觉罗·玄烨．圣祖仁皇帝庭训格言．

薛凤祚．古今历法中西历法参订条议．历学会通．益都薛氏遗书本．

薛凤祚，穆尼阁，三角算法，双啸室抄本，中国科学院自然科学史研究所图书馆藏．

薛凤祚．历学会通·正弦序．历学会通．益都薛氏遗书本．

薛凤祚．西法会通参订十一则．历学会通．正集．

薛凤祚．中法四线引．历学会通．益都薛氏遗书本．

学部．将《四元玉鉴易简草》纳入高等学等参考书撰．四元玉鉴易简草．1911年刊本．

严敦杰．跋《决疑数学》．明清数学史论文集．421—444．

严敦杰．明清之际西方传入我国之历算记录．明清数学史论文集．114—181．

严敦杰，李善兰年谱订正及补遗．明清数学史论文集．南京：江苏教育出版社．1990．

严敦杰．李尚之年谱．明清数学史论文集．445—472．

严敦杰．欧几里得《几何原本》元朝传入中国说．东方杂志．1943，39(13)．

严敦杰，梅荣照．程大位及其数学著作．明清数学史论文集．

严敦杰．李善兰恒等式．明清数学史论文集．409—420．

严敦杰．罗雅谷比例规解之蓝本．上智编译馆馆刊．卷3．三、四期合刊．1948．130—133．

阎若璩．尚书古文疏证．四库全书本．

晏文辉．晏文辉疏．破邪集．引自：明史欧洲四国传注释．160．

杨辉．详解九章算法，宜稼堂丛书本．

杨模．锡金四哲事实汇存．1910．

杨廷筠．同文算指通编序．同文算指通编．天学初函本．

杨廷熙．反对同文馆算学馆摺．筹办夷务始末(同治朝)．卷49．

叶耀元．形学补编．古今算学丛书．1898年．算学书局石印本．

奕譞，等．议开算学科摺．洋务运动．第2册．

奕劻．光绪十五年七月二十九日奏．洋务运动．第2册．

奕訢．同文馆开办算学馆摺．筹备夷务始末(同治朝)．卷46．3b—4a．

奕訢．同治二年正月丙子摺．筹办夷务始末(同治朝)．卷47．

奕訢．同治六年三月丙辰摺．筹办夷务始末(同治朝)．卷48．

奕訢．酌拟同文馆学习天文算学章程六条．筹办夷务始末(同治朝)．卷46．26b—48b．

易之翰．四元玉鉴释例．1836年刊本．

英桂．沈葆桢，请考试算学折．转引自：礼部考试算学折．中国近代学制史料．上海：华东师大出版社，1986．第二册．18—19．

余英时．戴震的〈经考〉与早期学术路向．论戴震与章学诚．外篇．201—219．

俞樾修．求志书院．上海县续志．民国间刊本．

俞樾．求志书院课规．上海县续志．民国间刊本．

裕祥．经正书院课艺序．经正书院课艺．1898年刊本．

曾国藩．曾国藩日记．曾国藩全集．岳麓书社．

曾国藩．奏摺．筹办夷务始末(同治朝)．卷1．22—26．

曾国藩．奏陈办理情形．洋务运动．第4册

詹嘉玲．欧洲数学在康熙年间的传播情况——傅圣泽介绍符号代数尝试的失败．徐义保译．数学史研究文集．呼和浩特：内蒙古大学出版社，台北：九章出版社，1990．1．．117—122．．

詹嘉玲．清代初期和中期的数学教育．田淼译．法国汉学．出版中．

詹嘉玲．是“在中国的欧洲科学”还是“西学”？——17世纪至18世纪末跨文化的交流之表述．田淼译．法国汉学．第六辑．北京：中华书局，2002．420—447．

张百熙．成钧课士录.北京：国子监刊本．1897.

张柏春．明清测天仪器之欧化 —— 十七、十八世纪传入中国的天文仪器技术及其历史地位．沈阳：辽宁教育出版社，2000.

张柏春．王徵与邓玉函《远西奇器图说录最》新探．自然辩证法通讯，1996，18(1)：45—51.

张柏春．影响欧洲天文仪器技术东渐的若干因素．自然辩证法通讯，1999，21(5)：48—57.

张贡九．笔算数学全草．上海：上海文明书局刊本．1906.

张久春．《九章算法比类大全》与"九章"的渊源．自然科学史研究．2003，22(1)：54—59.

张鑑．黄爱平点校．阮元年谱．北京：中华书局，1995.

张铠．庞迪我与中国——耶稣会"适应"策略研究．北京：北京图书馆出版社，1997.

张盛藻．同治六年四月奏．筹办夷务始末(同治朝)．卷四十七.

张维华．明史欧洲四国传注释．上海：上海古籍出版社，1982.

张文虎．舒艺室随笔．1874 年刊本

张文虎．舒艺室杂著．1874 年刊本.

张爔．堆垛术．1903.

张煜．读玉鉴随笔．北京：京都琉璃厂龙云斋刻本，1905 年.

张之洞．李忠熙评注．劝学篇．郑州：中州古籍出版社．1998.

章开源，林蔚．中西文化与教会大学．长沙：湖南教育出版社，1991.

章梫．康熙政要．中共中央党校出版社，1994.

赵惟仁纂．黎广润辑．吴嘉善传．南丰县志．1924 年刊本.

曾国藩．曾国藩全集．传忠书局刻本．1876.

支宝枏辑．上虞算学堂课艺．1901 年刊本.

支伟成．清代朴学大师列传．长沙：岳麓书院，1986.

中国科学院自然科学史研究所编．钱宝琮科学史论文选集．北京：科学出版社，1983.

中国天文学史整理研究小组编．中国天文学史．北京：科学出版社，1981.

周子愚．表度说序．表度说．天学初函本.

周达．垛积新义．福慧双修馆算稿．1909.

邹达泉，邹徵君遗集序．邹徵君遗集．1873．

朱家生，焦循与〈加减乘除释〉，谈天三友，页 167—184．

朱家生，李锐〈开方说〉研究，谈天三友，285—310．

朱家生，吴裕宾，焦循年谱，谈天三友，311—332．

诸可宝．畴人传三编．南菁书院丛书本．卷 3．

朱世杰．四元玉鉴．白芙堂丛书．

朱有瓛主编，中国近代学制史料．上海：华东师范大学出版社，1983．

朱元璋．祖训录．洪武御制全书(张德信．毛佩琦主编)．合肥：黄山书社．1995．362—386．

朱元璋．问天时．御制文集．卷 11．洪武御制全书(张德信．毛佩琦主编)．合肥：黄山书社．1995．148—149．

朱元璋．皇明祖训．洪武御制全书(张德信．毛佩琦主编)．合肥：黄山书社．1995．387—412．

朱元璋．谕历法事．转引自：畴人传．卷二十九．2a—b．

祝平一．三角函数表与明末的中西历法之争——科学的物质文化试探(上)．台北：大陆杂志．99(5)：236．

邹达泉．邹徵君遗集序．邹徵君遗集．1873．

邹道济．致汪康年．上海图书馆编．汪康年师友书札．上海：上海古籍出版社，1986．2803．

祖颐．四元玉鉴后序．四元玉鉴．宛委别藏本．

佚名作者．借根方算法节要．稿本．中国科学院自然科学史研究所图书馆藏．

佚名作者．借根方算法．稿本．故宫博物院图书馆藏．

佚名著者．数学本原．清末抄本．天津图书馆藏

A. Bréard. “On Mathematical Terminology : Culture Crossing in Nineteenth—Century China” , in *New Terms for New Ideas—Western Knowledge and Lexical Change in Late Imperial China* (M. Lackner, I. Amelung, J. Kurtz. Ed. Leiden, Boston, Koeln: Brill. 2001). 305—326.

C. Clavius, Opera mathematica. Mainz. 1612.

C. Clavius, Cristoph Clavius a Galileo Galilei. *Cristoph Clavius: Corrispondenza*, V. VI. 157—158.

M. H. Henri Cordier, “Life and Labours of Alexander Wylie”, in Chinese

Researches, 7—18.

Ferdinand Dagenais, *John Fryer' s Calendar: Correspondence, Publications, and Miscelleous Papers*, *Version* 3, 1999.

J. M. Dubbey, "DE Morgan", *Dictionary of scientific biography*,

Joseph Edkins. Preface. in "Jottings on the Science of Chinese Arithmetic", in: Wylie. *Chines Researches*.

P. D' Elia. Presentazione dela prima traduzione cinese di Euclide. *Monumenta Serica* 15, 1956.165.

P. D' Elia, *Galileo in China – Relations through the Roman College between Galileo and the Jesuit Scient – Missionaries (1610—1640). Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press*, 1960.

Peter M. Engelfriet. *Euclid in China, The genesis of the First Translation of Euclid' s Elements in* 1607 *and it' s Reception up to 1723. Leiden*: Brill. 1998.

Galileo Galilei, Galileo Galilei a Cristoph Clavius a Romal, Cristoph Clavius: Corrispondenza, V. VI. 159—162.

Guo Shirong. "The Influence of Yang Hui' s Works on the Mathematical Mainstream in the Ming Dynasty", *Historical Perspectives on East Asian Science, Technology and Medicine*, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong: World Scientific Press, 2001. 358—367.

John B. Henderson. *The Development and Decline of Chinese Cosmology. New York*: Columbia University Press. 1984.

Wann – Sheng Horng. *Li Shanlan: The Impact of Western Mathematics in China During the Late* 19*th Century*, A dissertation submitted to the Graduate Faculty in History in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy, The City University of New York, 1991.

I. Iannanccone, *Johann Schreck Terrentius – Le cienze rinascimentali e lo spirito dell' accademia dei Lincei nella cina dei Ming*, Napoli: Istituto Universitario Orientale, 1998.

C. Jami. Mathematical Knowledge in the *Chongzhen Lishu*. Western Learning and Christianity in China. 667—678.

Gisela Kutzbach. Loomis, Elias. Dictionary of Scientific Biography, Vol. VIII.

James M Lattis. *Between Copernicus and Galileo——Christoph Clavius and the Collapse of Ptolemaic Cosmology*. Chicago and London : The University of Chicago Press, 1994.

Tiziana Lippiello, Astronomy and Astrology: Johann Adam Schall Von Bell, *Western Learning and Christianity in China*. 404—428.

Jean - Claude Martzloff, *A History of Chinese Mathematics* (Translated into English by Stephen S. Wilson), Berlin: Springer - verlag, 1997.

E. Knobloch, "Christoph Clavius - ein Astronom zwishen Antike und Kopernikus". in: *Vortraege des ersten Symposions des Bamberger Arbeitskreises, Antike Naturwissenschaft und ihr Rezeption*"(H. v. K. Doering, G. Woehrle ed. Wiesbaden: Otto Harrassowitz. 1990.). 113—139.

E. Knobloch, "L'oeuvre de Clavius et ses sources scientifiques". in : *Les Jésuites a la Renaissance*, Presses Universitaires de France, 1995.

J. Macdonnell, *Jesuit Geometers - A study of Fifty - six Prominent Jesuit Geometers During the First Two Centuries of Jesuit History*. Vatican City: Uatican Observatory Publication, 1971.

A. De Morgan, *Elements of Algebra*. London: Booksellers and Publishers to the university of London, 1837.

Louis Pfister, *Notices biographiques sur les jésuites de l' ancienne mission de Chine 1552—1773*, 2 vols. Shanghai, 1934.

A. Sprenger, "Johann Adam Schall's Educational Foundation and the Intellectual Climate of His Time". *Western Learning and Christianity in China*. China - Zentrum and the Monumenta serica Institute (Roman Malek Ed. Sankt Augustin: China - Zentrum, the Monumenta Serica Institute, 1998), 41—56.

Rev. James Thomas, "Biographical Sketch of Alexander Wylie", in: Chinese *Researches* (Alexander Wylie), Shanghai, 1897, pp. 1—6.

Tian Miao, "Eductaion of Mathematics of traditional Academies in Late Qing China". *Proceedings of the Fourth International Symposium on the History of Mathematics and Mathematical Education Using Chinese Characters* (T. Kobayashi, T. Ogawa, K. Sato, S. Jochi ed.). Maebashi: Maebashi Institute of Technology. 251—267.

Tian Miao, "*Jiegenfang*, *Tianyuan*, *and Daishu*: *Algebra in Qing China*",

in Historia Scientiarum, *Vol*. 9—1(1999), 101—119.

Tian Miao, "The Westernization of Chinese Mathematics: A case study of the Duoji method and its Development", EASTM 20(2003): 45—72.

W. A. Wallace. *Galieo's logic of discovery and proof* – the Background, Content, and Use of His Appropriated Treatises on Aristotle's Posterior Analytics, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992.

W. A. Wallace. "Galileo Galilei and the Doctores Parisienses". In: *New Perspectives on Galileo* (R. E. Butts, J. C. Pitt ed., Dordrecht: D. Reidel, 1978). 87—138.

Robert Wardy. *Aristotle in China*. Cambridge University Press, 2000.

Alexander Wylie. *Chinese Researches*. (Alexander Wylie), Shanghai, 1897.

Xu Yibao, "The First Chinese Translation of the Last Nine Books of Euclid's Elements and its Source", *Historia Mathematica*. (in publicating).

索 引

D

H

I

J

K

L

N

O

P

Q

R

S

T

U

V

W

X

Y

Z

致谢与后记

1989年,我考入天津师范大学数学系数学史专业,在李兆华老师的指导下学习。1994年,至中国科学院自然科学史研究所攻读博士学位,在导师郭书春教授的指导下,于1997年完成了博士学位论文《清末书院的数学教育》。两位导师把我从一个只是对历史感兴趣的数学专业学生培养成一个专业的科学史研究人员,作为学生的我深知其间艰辛,谨在此表达我对二位导师深深的谢意。

在我刚开始从事研究工作时,一位同行好友便告诫我说,明、清的数学史并不甚值得去做,因为那时的中国数学已经没有什么地位了,所以,那段历史也没有意义了。好友的话有其道理。从数学进步的角度来看,明末至清末的300年间,中国数学确实已经很少有能在世界数学史上算得上成果的成就了。但是,无论一段历史在后人心目中值得自豪的闪光点是多么的稀少,它都是有意义的,也是值得去研究的。这便是我十余年探索于斯而无悔的理由。

自1989年开始学习数学史以来,我便一直在思考,在16世纪末至19世纪末的300年间,西方数学究竟是如何在中国传播的?中国传统数学又是如何被取代的。带着这个问题,我几乎翻遍了我能得到的这300年来出版的中国数学书籍及与它相关的资料和档案。初时觉得每看一部书便加深了一点认识,似乎感到自己很快便会为这300年的数学史廓清一条主线。但随着阅读量的增加,眼前反而呈现出一种近乎混乱的错综复杂的局面。所以,如果说三年前我是踌躇满志地接下这个课题的,那么三年后的今天,我却是战战兢兢地将这部书告捧献给诸位读者的。

“中国近现代科学技术发展综合研究”项目为期三年。三年间,我辗转于北京、柏林、巴黎、爱尔兰根之间。所幸的是,各地的同行专家给了我热情的鼓励和援助。同时,各地图书馆为我的研究提供了充足的资料。在此,我

要特别感谢的有：中国科学院自然科学史研究所张柏春研究员、内蒙古师范大学科学史与科技管理系郭世荣教授、中国科学院自然科学史研究所韩琦研究员在百忙之中认真审阅全部书稿，提出了很多建设性的意见，同时，他们还无私地提供了很多资料信息和研究资料。德国柏林工业大学 E. Knobloch 教授应我的要求为我复制了一些相关文献。法国科研中心林力娜教授和詹嘉玲教授，在我于巴黎工作的一年中(2002 年 9 月—2003 年月 10 月)，她们在生活和工作上给了我很多的帮助和启发。爱尔兰根大学阿梅龙博士经常关心本书的写作进程，在我于爱尔兰根工作期间，他无私地提供了他的个人藏书并帮助我寻找相关资料。中国科学院自然科学史研究所王扬宗研究员提供了很多宝贵的资料。中国科学院科技政策与管理研究所樊洪业研究员提供了宝贵的资料线索。中国科学院自然科学史研究所研究员刘钝老师对我的工作提出了很多宝贵的意见并给予了鼓励。我的导师郭书春先生，每当我在研究中遇到困难或产生疑虑时，他总是适时地给予我悉心的指导和全力的支持。

在本书的写作过程中，我曾在北京图书馆、中国科学院自然科学史研究所图书馆、中国科学院图书馆、中国第一档案馆、天津市图书馆、广东图书馆、柏林国立图书馆、柏林工业大学图书馆、巴黎国立图书馆、法兰西学院汉学研究所图书馆、巴黎科研中心科学史工作组图书室、德国马普学会马克斯-普朗克科学史研究所图书馆、爱尔兰根大学汉学系图书馆等查阅资料，得到了工作人员的热情服务和关照。此处值得特别感谢的有：马克斯-普朗克科学史研究所图书馆馆长 Urs Schoepflin 先生帮助我找到一些早期译成中文的数学著作的西方底本及其他研究资料，爱尔兰根大学汉学系图书馆馆长 A. Kieper 协助我查找资料；在需要时，自然科学史研究所图书馆员李映新先生经常主动加班。没有他们的帮助，本书是不可能顺利完成的。

在此，谨向以上各位师长、专家、朋友和机构致以最诚挚的谢意！

最后，我要感谢我的父母和姐姐田晶。多年来，他们总是在我需要的时候无私地给予我精神上和经济上的援助。如果没有他们的理解、关心与照顾，我不可能安心地从事研究工作。我愿将此书奉献给他们。

明清时期的“西学东渐”是一个内容丰富且比较复杂的研究领域。在十分有限的时间里，我只能大致描述“中国数学的西化历程”及其社会文化背景，并重点分析三个分支学科的发展情况。更为详实的历史描述和全面的专题分析还有待将来去完成。由于学力所限，书中肯定还有不少疏漏甚至

错误，敬请学界前辈、同人和读者教正！

田　森

2004年10月31日

图书在版编目(CIP)数据

中国数学的西化历程/田森著. —济南:山东教育出版社,2005
(中国近现代科学技术史研究丛书/路甬祥主编)
ISBN 7-5328-4980-5

Ⅰ.中... Ⅱ.田... Ⅲ.数学史-研究-中国 Ⅳ.O112

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第111080号

中国近现代科学技术史研究丛书

中国数学的西化历程

田 森 著

出 版 者:山东教育出版社
(济南市纬一路321号 邮编:250001)
电 话:(0531)82092663 传真:(0531)82092661
网 址:http://www.sjs.com.cn
发 行 者:山东教育出版社
印 刷:山东新华印刷厂
版 次:2005年10月第1版第1次印刷
印 数:1—3000
规 格:787mm×1092mm 16开本
印 张:27印张
字 数:432千字
书 号:ISBN 7-5328-4980-5
定 价:44.50元

(如印装质量有问题,请与印刷厂联系调换)